

1

Introdução às Funções

O QUÊ?

Funções e suas diferentes representações (numérica, algébrica e gráfica); domínio, contradomínio e imagem; aplicações em situações envolvendo a análise, interpretação e resolução de problemas em contextos diversos.

POR QUÊ?

Funções são objetos matemáticos que nos permitem compreender como a variação de uma grandeza influencia na variação de outra. Por isso elas são ferramentas essenciais para a compreensão, análise e tomada de decisão em diversas situações do nosso dia a dia.

O estudo de funções nos permite, por exemplo, relacionar a área de um polígono com o comprimento de seus lados, a distância percorrida por um objeto com o intervalo de tempo gasto no percurso e o valor da conta de energia elétrica com o consumo de energia.

De um modo mais geral, funções são úteis para o estudo do crescimento populacional, disseminação de doenças, lançamento de foguetes e satélites, interpretação de exames médicos, etc.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

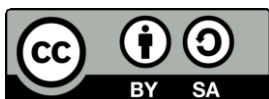
Versão digital do capítulo:

https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/AF106.html

Título:	Introdução às Funções
Ano/ Versão:	2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autores:	Gladson Antunes (UNIRIO) Michel Cambrinha (UNIRIO)
Revisão:	Cydara Ripoll Letícia Rangel
Design:	Andreza Moreira (Tangentes Design)
Diagramação:	Tarso Caldas
Ilustrações:	Miller Guglielmo
Gráficos:	Beatriz Cabral e Tarso Caldas
Capa:	Foto de Engin Akyurt no Pexels https://www.pexels.com/pt-br/foto/animacao-ao-ar-livre-ativo-borrão-1435537/

Desenvolvido por

Licença:

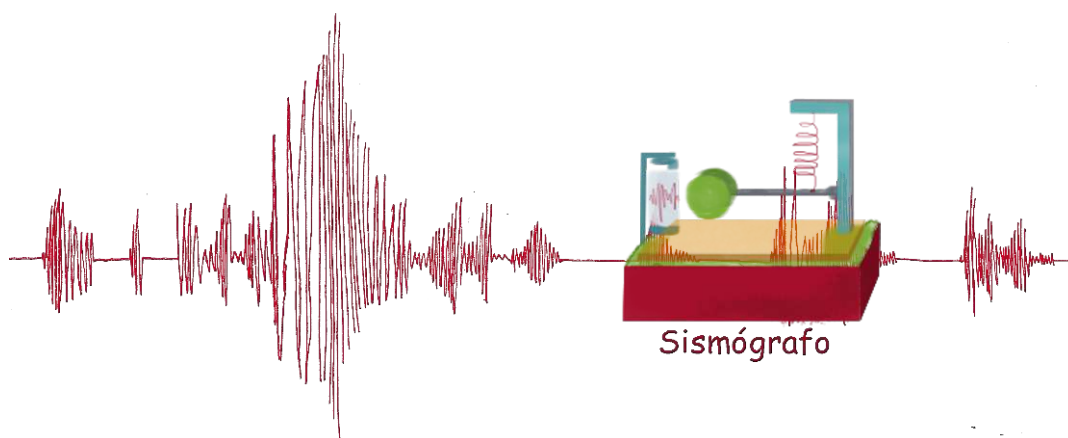


Patrocínio:



EXPLORANDO CONCEITO DE FUNÇÃO

O que o nosso batimento cardíaco, um terremoto ou a variação das ações de uma empresa na bolsa de valores possuem em comum? Os batimentos cardíacos podem ser monitorados a partir de um sinal bioelétrico cujo gráfico é representado em um eletrocardiograma, as ondas sísmicas produzidas por um terremoto podem ser observadas a partir do registro de um sísmógrafo e as variações dos valores das ações de uma empresa percebidas ao longo do tempo podem ser facilmente visualizadas em um gráfico.



Como nos fenômenos descritos acima, muitas situações e decisões do dia a dia dependem do reconhecimento de uma relação entre duas grandezas e da análise de como a variação de uma delas influencia na variação da outra (Por exemplo, a distância percorrida e o tempo transcorrido, a área de um polígono e o comprimento de seus lados, a absorção de um medicamento pelo organismo humano e o tempo desde a sua ingestão, valor da conta de energia elétrica e consumo, quantidade de vereadores e a população etc). O tema funções trata da relação entre grandezas, identificando um tipo especial de relação. Funções são uma ferramenta matemática importante para descrever, analisar e tomar decisões em diversas situações.

As funções, de maneira geral, conectam grandezas, medidas, conjuntos numéricos e até variáveis que não podem ser quantificadas, ou seja, não numéricas, como, por exemplo, as variáveis qualitativas estudadas pela Estatística (classe social, cor dos olhos, local de nascimento, gênero etc).

Função é um dos conceitos centrais da Matemática, e sua importância transcende os limites dessa ciência, sendo fundamental para descrever fenômenos em diversas áreas do conhecimento, não só nas mais próximas, como a Física, a Química, ou as Engenharias como também em Biologia, Geografia, Sociologia, e em situações cotidianas diversas, como será exemplificado nas atividades a seguir.

A noção de função não surgiu ao acaso. É um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, tendo sua origem nos estudos desenvolvidos por Kepler (1571-1630) e Galileu (1564-1642) sobre os movimentos dos planetas e a queda dos corpos pela ação da força da gravidade, respectivamente. Nesses estudos era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que oferecessem uma descrição matemática simples.

A aplicação da Matemática nas mais diversas áreas é feita, na maioria das vezes, por meio da noção de modelo matemático. Um modelo matemático permite representar uma determinada situação ou fenômeno a partir de variáveis e de relações entre essas variáveis. Portanto, fun-

ções são fundamentais tanto na concepção e construção de um modelo matemático como no estudo desses modelos.

Pluviometria no Sistema Cantareira

Atividade 1

As chuvas são a principal fonte de água para os reservatórios que abastecem as grandes cidades. Com base em dados passados, constrói-se uma média mensal esperada de chuvas. Em períodos em que a chuva real é menor do que o esperado pode-se observar uma diminuição da quantidade de água armazenada no sistema.

O gráfico a seguir apresenta a variação pluviométrica (em milímetros) da chuva real e da chuva esperada no Sistema Cantareira, que abastece a região metropolitana de São Paulo, no período de dezembro de 2013 (2013-12) a novembro de 2016 (2016-11).

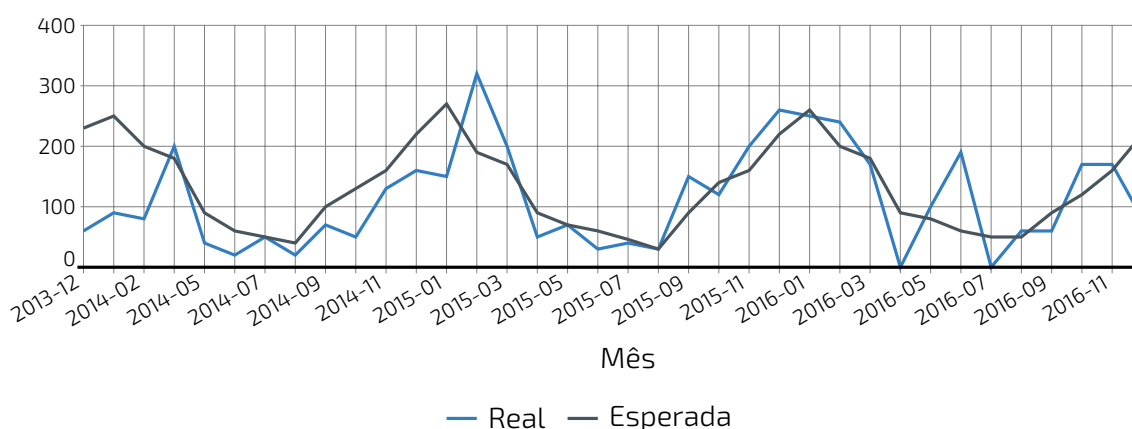


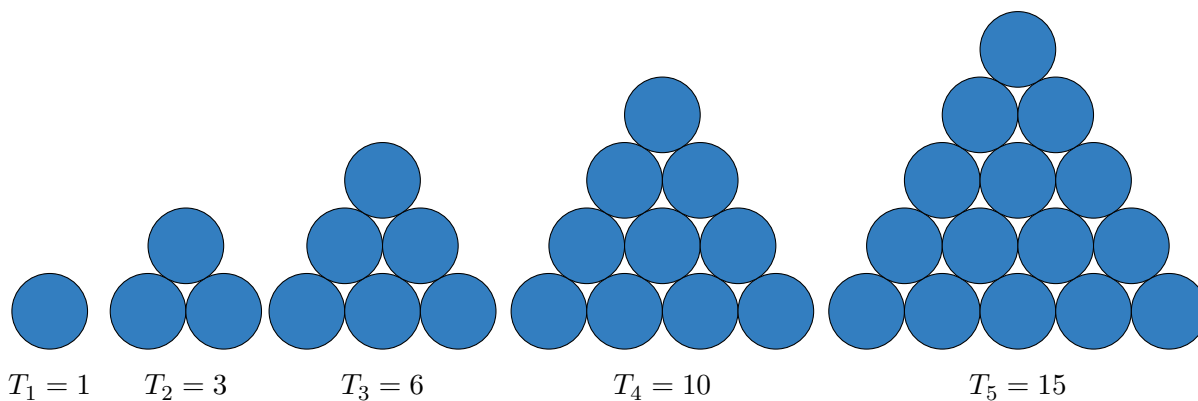
Figura 1.1: Volume de chuvas real e esperado no Sistema Cantareira

De acordo com o gráfico acima:

- Que grandezas estão sendo relacionadas?
- Em que mês e ano houve a maior incidência de chuvas? E a menor?
- Em que período(s) a diferença entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade real de chuva superou 100mm?
- Houve algum mês em que não foi registrada chuva na região do Sistema Cantareira?
- O que pode ser observado nos meses de agosto de 2015 e março de 2016?

Números triangulares

Atividade 2



Considere a sequência de números ilustrada acima. Ela é conhecida como a sequência dos *números triangulares*. O n -ésimo número triangular, T_n , é igual a quantidade total de círculos congruentes necessários para formar um triângulo equilátero cujo lado tem n círculos. Por exemplo, o quarto número triangular é $T_4 = 10$, porque são necessários 10 círculos congruentes para formar um triângulo cujo lado tem, 4 desses círculos.

- Determine o 6º, o 7º e o 8º números triangulares.
- Descreva o procedimento que você usou para determinar T_6 , T_7 e T_8 no item anterior.
- Determine o milésimo número triangular, T_{1000} .
- Descreva um procedimento que permita determinar qualquer número triangular a partir da sua ordem na sequência? Explique.
- Quais são as variáveis relacionadas?

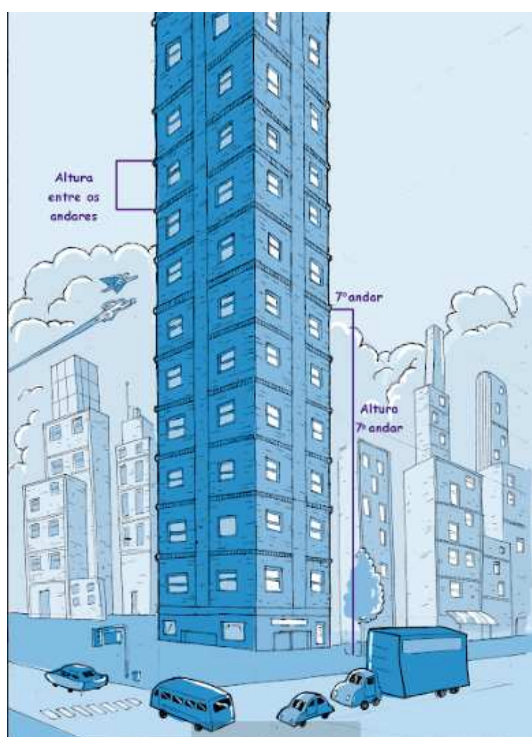
Arranha-céu

Atividade 3

Imagine um arranha-céu de 40 andares cujas diferentes alturas que correspondem a alguns andares estão representadas na tabela abaixo.

Número do Andar	Garagem (0)	1	2	3	4	...	10	...		
Altura (metros)	-1	3	7	11	15	...		...		91

Considere que a altura de um andar é medida a partir do nível da rua até o piso desse andar e que a altura entre os andares seja sempre a mesma, conforme o esquema abaixo.



- Qual a altura entre os andares?
- Qual a altura do 10º andar?
- O que significa o sinal negativo do andar da garagem?
- A que andar corresponde a altura de 91 m?
- Qual é a altura total desse prédio?
- Realize uma pesquisa na internet e descubra o maior arranha-céu brasileiro atualmente. Dividindo a altura total desse arranha-céu pela quantidade de andares, determine a altura média de um andar.

ORGANIZANDO CONCEITO DE FUNÇÃO

Vamos identificar juntos quais são as características comuns presentes em cada uma das situações anteriores. Em todas elas há pelo menos dois conjuntos bem determinados cujos elementos estão sendo relacionados. Nessa relação, **cada** elemento de um desses conjuntos está associado a um **único** elemento do outro conjunto.

Na **Atividade: Pluviometria no Sistema Cantareira**, um dos conjuntos se refere ao tempo e é determinado pelos meses do ano, no período de dezembro de 2015 a novembro de 2016. O outro é um conjunto numérico que deve conter todos os possíveis valores para o índice pluviométrico do Sistema Cantareira em milímetros. A relação representada no gráfico pela linha azul associa a cada ano-mês o índice de chuva real naquele período. Já a relação representada pela linha vermelha associa a cada mês-ano o índice de chuva esperada naquele período. Observe que, em ambos os casos, para cada mês-ano é associado um único índice pluviométrico.

Na **Atividade: números triangulares no plano**, um dos conjuntos tem como elementos as ordens dos termos da sequência, indicadas de maneira geral por n . O outro conjunto deve conter todos os possíveis números triangulares T_n . Assim, a cada ordem n está associado, sem ambiguidade, o número triangular T_n .

Por fim, na **Atividade: Arranha-céu** temos cada andar do prédio sendo relacionado com sua altura até o nível da rua.

Nas três relações apresentadas, **cada** elemento de um conjunto A está associado a um **único** elemento de um conjunto B . Uma relação com essas propriedades é chamada **função**.

Função Dizemos que uma relação f entre os elementos de dois conjuntos não vazios, A e B , é uma função de A em B se *todo* elemento do conjunto A estiver relacionado a um **único** elemento do conjunto B .

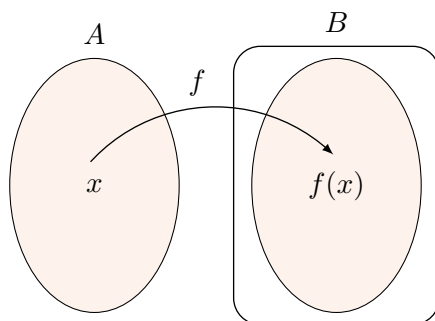
Assim, para cada $x \in A$ deve existir um único elemento $y \in B$ que está associado a x pela função f . Esse elemento y é também denotado por $f(x)$:

$$y = f(x)$$

nome da função
elemento do domínio

Imagem de x

O conjunto A é chamado domínio da função f , o conjunto B é chamado contradomínio de f e o subconjunto de B formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado conjunto imagem da função f .



De maneira geral, escreve-se:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Por exemplo, na [Atividade: Pluviometria no Sistema Cantareira](#), se f é a função que associa a cada ano-mês o índice de chuva real naquele período, $f(2014 - 3) = 200$ nos informa que o índice de chuva real observada na região do sistema Cantareira no mês de março do ano de 2014 foi de 200 milímetros.

Em uma função f de A em B , a dependência estabelecida entre as variáveis $x \in A$ e $y \in B$ permite que y seja identificada como “variável dependente” e x como “variável independente”, uma vez que os valores assumidos por y são determinados em função da variação de x no domínio. Na atividade “Arranha-céu” por exemplo, a variável independente é aquela que representa os andares e a variável dependente é a altura do andar.

A definição de uma função f de A em B exige que a cada elemento $x \in A$ corresponda uma imagem $y = f(x) \in B$ e que não haja ambiguidade na determinação dessa imagem, ou seja, que ela seja única. Assim, nem toda relação de A em B é uma função. Por exemplo, a relação que associa a cada pessoa o número de seu telefone não é função, pois a imagem pode não ser única, ou seja, há ambiguidade: algumas pessoas têm mais de um número de telefone. E além disso, nem todas as pessoas têm telefone.

PARA REFLETIR

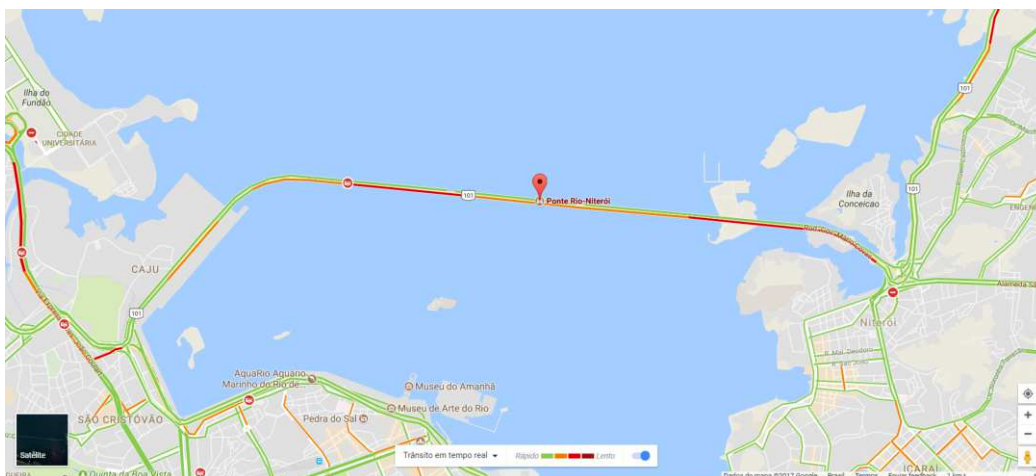
Junto com seus colegas, reflita sobre a definição que acabamos de ver. Vocês conseguem pensar em outros exemplos de relações do seu dia a dia que possam ser consideradas funções? Descrevam algumas delas e compartilhem com o restante da turma, destacando os conjuntos domínio e contradomínio dessas funções.

PRATICANDO CONCEITO DO FUNÇÃO

Colorindo o mapa

Atividade 4

A imagem a seguir, que foi retirada do aplicativo Google Maps, exibe o trânsito na ponte Rio-Niterói e seus acessos em um determinado dia e hora. Várias informações podem ser observadas a partir dos elementos apresentados. Por exemplo, as cores nas vias informam a velocidade média dos veículos que trafegam por elas, conforme a legenda na parte inferior; a distância entre dois pontos quaisquer do mapa pode ser estimada usando a escala exibida no canto inferior direito. Gráficos como esse são produzidos a partir das relações entre diversas informações coletadas.



A tabela a seguir mostra os dados coletados sobre o tempo gasto pelos veículos (em média) para atravessar a ponte, ao longo de um dia.

Período do Dia	Tempo (min)	Cor	Velocidade Média (km/min)
5:00 - 7:00	13		
7:00 - 9:00	18		
9:00 - 11:00	15		
11:00 - 13:00	15		
13:00 - 15:00	16		
15:00 - 17:00	16		
17:00 - 19:00	23		
19:00 - 21:00	14		
21:00 - 23:00	13		

- a) Tomando como referência a ilustração anterior e utilizando a escala de cores a seguir, complete a terceira coluna da tabela com a cor que a ponte deveria estar colorida em cada período do dia destacado. Descreva os critérios que você utilizou na escolha de cada uma das cores e compare com os critérios dos seus colegas.

RÁPIDO verde laranja vermelho marrom LENTO

- b) Você precisou associar uma mesma cor para para períodos diferentes do dia. Por que?
- c) Sabendo que a ponte Rio-Niterói tem aproximadamente 13 km de extensão complete a quarta coluna da tabela com a velocidade média registrada em cada um dos períodos do dia.
- d) É possível que uma mesma velocidade média esteja associada a dois tempos de travessia diferentes? Por quê?

Na atividade anterior, observam-se diferentes relações entre os dados. Por exemplo, para cada tempo de travessia é possível associar uma única cor e uma única velocidade média. Da mesma maneira, a cada velocidade média está associada uma única cor e um único tempo de travessia. No entanto, a uma mesma cor é possível associar tempos diferentes e velocidades médias diferentes.

É função?

Atividade 5

No contexto da atividade anterior são observados diferentes conjuntos de dados: O conjunto dos tempos de travessia da ponte, $A = \{13, 14, 15, 16, 18, 23\}$; O conjunto das cores que compõem a escala, $B = \{\text{Verde, Laranja, Vermelho, Vinho}\}$; e o conjunto de velocidades obtidas, C . Considere as diferentes relações de dependências estabelecidas entre esses conjuntos. Quais são funções?

Relação	É função?	Se não, por que?
De A em B		
De B em A		
De A em C		
De C em A		
De B em C		
De C em B		

Toda relação de um conjunto A em um conjunto B pode ser identificada por um conjunto de pares ordenados. Nesse caso, cada associação entre elementos do conjunto A e elementos do conjunto B fica representada por um par ordenado tal que o elemento do conjunto A ocupa a primeira posição do par e o correspondente elemento do conjunto B a segunda posição.

Por exemplo, se consideramos a relação dos números reais em si mesmo que, a cada número real, associa o seu quadrado, os pares ordenados $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(\sqrt{3}, 3)$, $(-\pi, \pi^2)$ indicam elementos que estão relacionados. Já os pares ordenados $(9, 5)$ e $(4, 2)$, $(\sqrt{2}, -2)$ formados por números reais, não indicam números associados pela mesma relação, uma vez que 5 não é quadrado de 9, 2 não é quadrado de 4 e -2 não é o quadrado de $\sqrt{2}$.

Como funções são um tipo especial de relação, a mesma ideia se estende para representação das funções. Assim, os pares ordenados de uma função $f : A \rightarrow B$ serão da forma (x, y) em que $x \in A$ e $y = f(x) \in B$.

Não é função!**Atividade 6**

Considere a relação formada por todos (a, b) de números naturais tais que b é múltiplo de a . Assim, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$ e $(9, 9)$ são pares ordenados dessa relação, pois 4 é múltiplo de 2, 6 é múltiplo de 2 e de 3 e 9 é múltiplo de 9. No entanto, $(4, 2)$ e $(7, 17)$ são pares ordenados de números naturais, mas não são pares dessa relação.

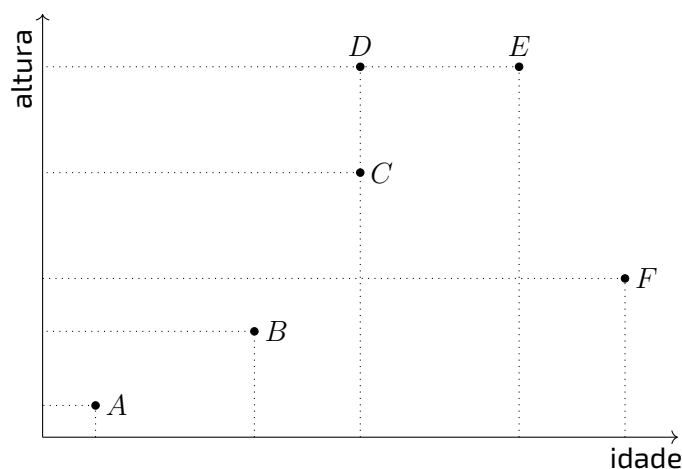
- Exiba outros quatro pares ordenados dessa relação.
- Explique porque essa relação não é uma função.
- $(5, 405)$ é um par ordenado dessa relação. Quantos outros pares ordenados dessa relação têm 5 como primeiro elemento?
- Dê exemplo de uma ou mais relações que não sejam funções. Não precisam ser exemplos numéricos.

A família**Atividade 7**

Cada ponto do gráfico a seguir representa uma das seguintes pessoas.



- Associe cada ponto do gráfico à pessoa correspondente.
- A relação expressa pelos pares ordenados (idade, altura) apresentados no gráfico é função? Por que?



*Adaptado de The Language of Functions and Graphs, Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd., 1985.

Quando nos deparamos com uma função é fundamental identificarmos os conjuntos domínio e contradomínio, e a maneira como os elementos desses conjuntos estão relacionados. Tal maneira pode ser muito variada, no entanto, principalmente quando os conjuntos envolvidos são numéricos, é comum considerar como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$. Por isso, daqui por diante, quando estivermos considerando funções numéricas, o contradomínio será igual a $\mathbb{R}$.

Em muitos casos, a forma de associação entre os elementos é dada por uma expressão analítica. Vejamos alguns exemplos.

(I) Para calcular o perímetro de um quadrado de lado ℓ usa-se a expressão $P = 4\ell$. Percebe-se então que o perímetro está relacionado com o lado. A partir daí pode-se definir a função perímetro:

$$P :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad P(\ell) = 4\ell.$$

Da mesma forma a área de um quadrado de lado ℓ é dada por $A = \ell^2$, que permite definir a função:

$$A :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad A(\ell) = \ell^2.$$

A variável ℓ pode assumir qualquer valor dentro do intervalo $]0, +\infty[$ que é o domínio da função P . Se quisermos saber o valor do perímetro do quadrado de lado 5cm, basta substituímos ℓ por 5 na expressão de $P(\ell)$. Ficamos assim com

$$P(5) = 4 \times 5 = 20\text{cm}.$$

A área do quadrado de lado 9cm é

$$A(9) = 9^2 = 81\text{cm}^2.$$

(II) A fórmula de Lorentz já foi muito utilizada pelos médicos para o cálculo do "peso ideal" p , em kg, em função da altura h , em centímetros, do paciente.

$$p :]0, 300[\rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad p(h) = h - 100 - \frac{h - 150}{k}$$

em que k vale 4 para homens e vale 2 para mulheres.

Que tal usar a fórmula acima para calcular o seu peso ideal?

(III) Imagine que um objeto é solto, a partir do repouso, de uma altura de 10 metros e percorre uma trajetória vertical em queda livre. Da Física, sabemos que sua altura h em metros medida a partir do solo, em função do tempo t em segundos, quando desprezamos a resistência do ar, é dada por

$$h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h(t) = 10 - \frac{gt^2}{2},$$

em que g representa a aceleração da gravidade em m/s^2 . metros por segundo ao quadrado.

Fazer a variável tempo assumir o valor $t = 0$ segundos na expressão de $h(t)$ significa que estamos medindo a altura no início da contagem do tempo, ou seja a altura inicial do corpo. Nesse caso teremos

$$h(0) = 10 - \frac{g \cdot 0^2}{2} = 10.$$

Se por exemplo, quisermos saber em quanto tempo o corpo chegará ao solo, o que devemos fazer? Como a medição é feita a partir do solo, dizer que o objeto chegou ao solo é o mesmo que dizer que sua altura é igual a 0. Portanto, precisamos descobrir o valor da variável t , de maneira que $h(t) = 0$. A partir da expressão de $h(t)$ e aproximando g por $10m/s^2$, obtemos $10 - 5t^2 = 0$, donde concluímos que $t = \sqrt{2}$ aproximadamente.

Praticando a notação

Atividade 8

Considere as funções f , g , k e h , todas de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

$$f(x) = 3x^2 + 5x \quad ; \quad g(x) = \frac{x-1}{x^3+3} \quad ; \quad k(x) = (x-2)^2 + 6 \quad ; \quad h(x) = 2x - 7$$

Determine o valor de:

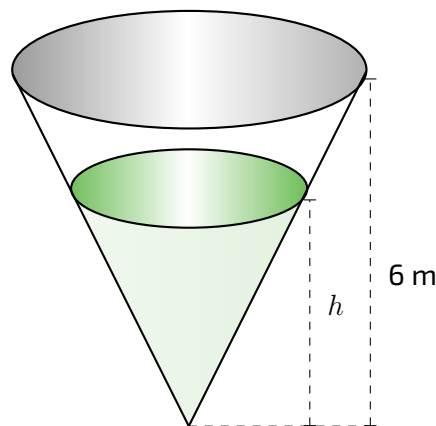
Função	Valor
$f(3)$	
$g(-1)$	
$k(2)$	
$f(1) + g(1)$	
$g(2) - k(-1)$	
$k(0) \cdot f(-2)$	
$f(0) + h(0) - 1$	
$f(-2) \cdot g(-2) + k(2)$	
$\frac{f(-3)}{k(0)}$	
x quando $h(x) = 0$	
x quando $h(x) = 3$	

Enchendo o cone

Atividade 9

O reservatório representado a seguir tem a forma de um cone cuja altura é $6m$ e a base é um círculo de raio $3m$. O volume V em litros de água no reservatório pode ser estimado a partir altura do nível da água h (em metros) de acordo com a seguinte expressão:

$$V(h) = 250h^3$$



- Determine $V(2)$, $V(3)$ e $V(4)$ e explique os seus significados no contexto.
- Quais os volumes de água, mínimo e máximo, que o reservatório comporta?
- A que altura do nível da água corresponde o volume igual a 3456 litros?

Uniformemente variado

Atividade 10

A posição S (em quilômetros), medida a partir de um referencial, de um veículo que se desloca segundo um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é dada em função do tempo t (medido em horas) pela seguinte expressão:

$$S(t) = 2t^2 - 4t + 2$$

- Determine a posição inicial do veículo. Explique o significado desse resultado a partir do contexto.
- Após quanto tempo o veículo estará a 18km da origem?

PARA SABER +

Por que não é função?

Atividade 11

Vimos que para que uma relação de A em B seja uma função não pode haver:

(I) Elementos no conjunto A sem correspondente em B ; (II) Ambiguidade na determinação de correspondente em B .

Determine se cada uma das relações apresentadas a seguir é função. Justifique suas respostas a partir das condições (I) e (II).

- a) Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as pessoas e considere a relação de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$, que a cada "pessoa" associa "irmão da pessoa".
- b) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e considere a relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada "número real x " associa "raiz quadrada do número real x ".
- c) Sejam $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos e $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os triângulos. Considere a relação de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{T}$ que a cada "número real positivo x " associa "triângulo de área x ".

Domínio e imagem

Atividade 12

Considere a seguinte lista de expressões algébricas.

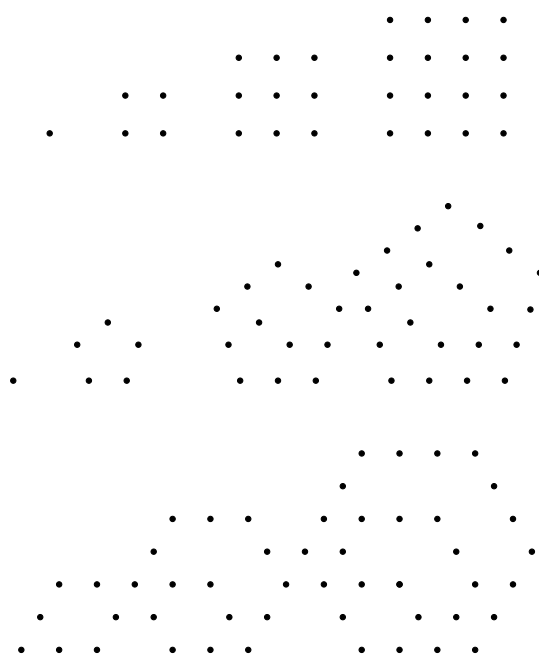
- | | | |
|---------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{x}$ | d) $J(t) = \frac{1}{t+8}$ | g) $g(u) = 5u^2 + 8$ |
| b) $G(z) = \sqrt{z-5}$ | e) $T(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | |
| c) $h(s) = \frac{1}{3-s}$ | f) $R(x) = (x-2)^2 + 7$ | h) $F(x) = (x+1)^2 - 3$ |

Veja que, em algumas das expressões, a variável independente não pode assumir alguns valores, por exemplo, na letra a) x não pode assumir valores negativos. Complete a tabela abaixo com o maior conjunto domínio possível que cada uma das funções pode ter e o correspondente conjunto imagem.

Expressão	Domínio A	Imagem
(a)	$\mathbb{R}^+$	
(b)		
(c)		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
(d)	$\mathbb{R} \setminus \{-8\}$	
(e)		
(f)		$[7, +\infty[$
(g)		
(h)		

EXERCÍCIOS

- 1 Assim como os números triangulares (ver [Atividade: números triangulares no plano](#)), fala-se nos números quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, inspirados, respectivamente, pelas sequências abaixo.



- Para cada uma destas sequências, represente as próximas duas figuras;
- Escreva uma sequência de números que possa estar associada a cada sequência de figuras;
- Descreva a regra de formação de cada uma dessas sequências de números.

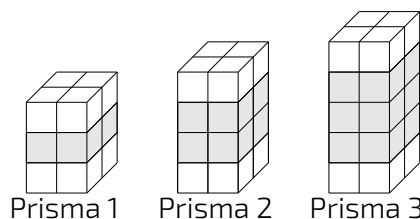
- 2 Observe as duas sequências que se seguem:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

1000, 100, 10, ...

- a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação que você percebe em cada uma das sequências apresentadas.
- b) Baseado na regra que você identificou no item anterior, descubra qual é o 20º termo de cada uma das sequências anteriores.

- 3 Cada prisma obtém-se empilhando cubos do mesmo tamanho, brancos e cinzas, segundo uma regra sugerida na figura.



- a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação sugerida pela figura.
- b) Para construir o prisma 4 dessa sequência, segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas são necessários?
- c) Justifique a afirmação: "O número total de cubos cinzas necessários para construir qualquer prisma desta sequência é par."
- d) Segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas terá o prisma 200?
- e) Explicita uma expressão numérica que permita determinar o número de cubos cinzas do Prisma n em função de n , isto é, uma expressão que de forma geral associe a ordem da figura à quantidade de cubos cinzas em sua composição.
- f) Justifique novamente a afirmação do item (c), agora a partir da expressão que você explicitou no item anterior.
- g) Se x representar o número total de cubos (brancos e cinzas) de um prisma desta sequência, qual das expressões seguintes representará o número de cubos cinzas desse prisma. Justifique sua escolha.

☐ $x - 8$ ☐ $2x - 4$ ☐ $x - 4$ ☐ $4x$

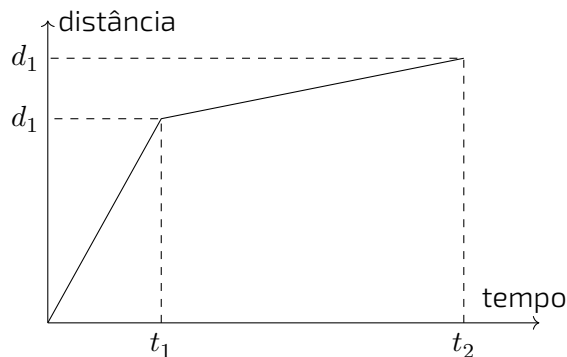
- 4 Ao final de um treino para a prova de 100 metros rasos, uma corredora recebe de seu treinador a seguinte tabela com as marcas intermediárias da sua melhor corrida.

Tempo (s)	Distância (m)
5	25
10	50
15	75
20	100

Considerando que a velocidade da atleta é constante ao longo dos 100 metros responda as seguintes perguntas.

- a) Quanto tempo ela gastou para percorrer os primeiros 30 metros?
- b) Pensando em uma estratégia para melhorar a performance da atleta, seu treinador resolve detalhar a tabela com os tempos correspondentes a cada 10 metros. Construa essa tabela.

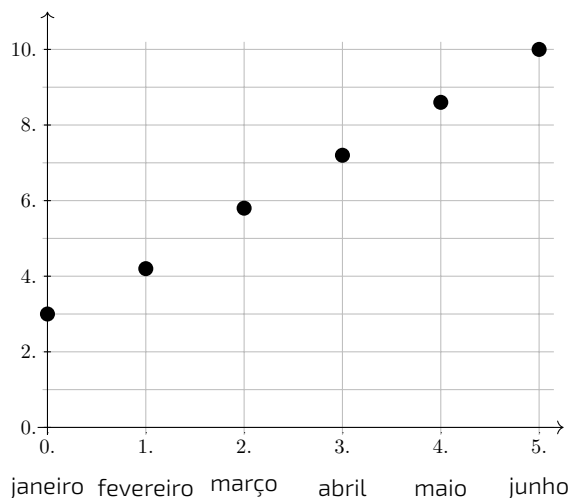
- 5 Hoje de manhã a Ana saiu de casa e dirigiu-se para a escola. Fez uma parte do percurso andando e a outra parte correndo. O gráfico a seguir mostra a distância percorrida pela Ana, em função do tempo que decorreu desde o instante em que ela saiu de casa até ao instante em que chegou à escola.



Apresentam-se, a seguir, quatro afirmações. De acordo com o gráfico, apenas uma é verdadeira. Assinale-a com X, explicando por que motivo cada uma das demais opções é falsa.

- () A Ana percorreu metade da distância andando e a outra metade correndo.
- () A Ana percorreu maior distância andando do que correndo.
- () A Ana esteve mais tempo correndo do que andando.
- () A Ana iniciou o percurso correndo e terminou-o andando.

- 6 Em Janeiro, o Vitor, depois de ter vindo do barbeiro, decidiu estudar o comprimento do seu cabelo, registrando todos os meses a sua medida. O gráfico seguinte representa o crescimento do cabelo do Vitor, desde o mês de Janeiro (mês 0), até ao mês de Junho (mês 5).



- a) A partir dos dados apresentados no gráfico, complete a tabela acima.

- b) Em cada mês, quantos centímetros cresceu o cabelo do Vitor?
- c) Escreva uma expressão geral que represente o Comprimento (C) do cabelo do Vitor, em função do número de meses (M) passados após o corte de cabelo inicial.
- d) Considerando o comportamento indicado no gráfico, se o cabelo do Vitor crescer $19,8 \text{ cm}$, se que haja cortes no período, quantos meses terão se passado desde o último corte de cabelo? Justifique.

7 Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 9 - x^2$.

- a) Coloque em ordem crescente os números $g(\sqrt{2})$, $g(\sqrt{5})$ e $g(\sqrt{10})$.
- b) Determine todos os possíveis valores de x do domínio que têm imagem igual a 8.
- c) Existe algum $x \in \mathbb{R}$ cuja imagem é igual a 10? Por que?
- d) Que condição deve satisfazer um número real b para que seja a imagem de algum número real x , isto é, $b = g(x)$?

8 Considere o processo que associa *cada número natural à soma de seus algarismos*.

- a) Por meio do processo descrito acima o número natural 13717 será associado a que número?
- b) Proponha um número cujo resultado do processo seja 22.
- c) Quantos números entre 1 e 10000 nos levam ao resultado 3?
- d) É possível obter qualquer número natural como resultado desse processo? Explique.

EXPLORANDO GRÁFICOS

Segundo informações do [Big Data Business](#), as palavras estimulam o lado esquerdo do cérebro e são um recurso essencial para a manutenção da memória. No entanto, as imagens são ainda mais eficazes, porque elas conseguem ativar os dois lados do cérebro simultaneamente e, assim, permitem o resgate de ideias e informações com maior precisão e agilidade. Especialmente quando se quer analisar grande quantidade de dados, apresentá-los em uma imagem ou em um gráfico, pode favorecer a comunicação.



Figura 1.2: Alguns exemplos de representações gráficas

Representar graficamente conjuntos de dados e suas relações pode fazer toda a diferença para transmitir informações. Há vários tipos de gráficos, cada um tem a sua particularidade e serve para transmitir as informações de forma específica. Nesta seção iremos estudar a representação gráfica de funções.

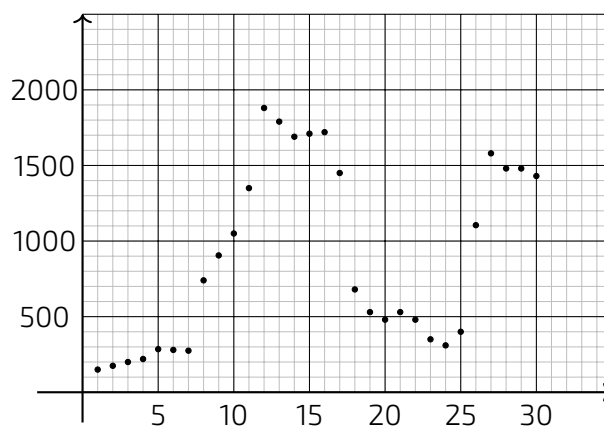
Vamos considerar a seguinte situação:

Ação promocional

Atividade 13

Uma empresa resolve lançar uma ação promocional na internet usando uma [hashtag](#). Um mês após o lançamento, o presidente dessa empresa resolve analisar o impacto da ação na rede. Para isso ele pede a um de seus funcionários que prepare um relatório sobre o número de vezes que a [hashtag](#) foi mencionada nas redes sociais em cada dia durante aquele mês. O

funcionário resolveu apresentar os dados das seguintes duas formas:

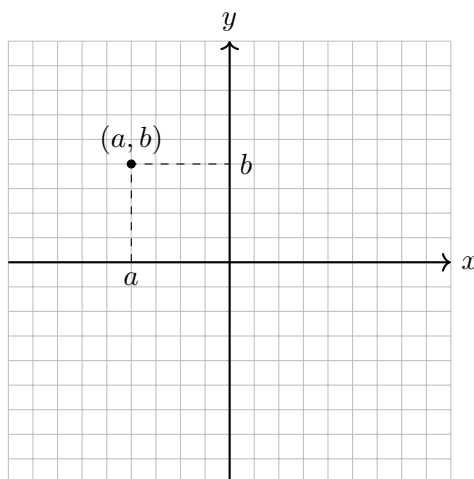


- Quantas vezes a *hashtag* foi mencionada mais de 1500 vezes em um dia?
- Em que dia a *hashtag* foi mais citada?
- Identifique todos os períodos em que houve crescimento no número de citações.
- Faça o mesmo para o decréscimo.
- Escreva um parágrafo explicando o comportamento global do gráfico, apontando possíveis causas para as variações observadas.

Uma função, essencialmente, relaciona duas ou mais grandezas ou variáveis, de forma que são obtidos pares (x, y) , em que x pertence ao domínio da função e $y = f(x)$. Perceba que a ordem em que os termos que compõem o par são apresentados é importante. Em matemática, chamamos esse tipo de objeto de *par ordenado*, eles são objetos fundamentais para a compreensão do gráfico de uma função.

No caso de funções reais de variável real, isto é, cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais (ou subconjuntos dele) tanto x como y serão números reais.

A representação geométrica mais comum para esses pontos, e que você provavelmente já conhece, é no plano cartesiano. Essa representação tem como base duas retas numéricas perpendiculares que se intersectam em suas origens conforme a figura abaixo.



As retas que compõem um sistema cartesiano são chamadas de eixos do plano cartesiano. O eixo em que são registradas as primeiras coordenadas do par é chamado de eixo das abscissas. O outro eixo, em que são registradas as segundas coordenadas do par é chamado de eixo das ordenadas.

Já vimos alguns exemplos de funções em atividades anteriores, vamos explorá-los um pouco mais.

Do mapa para o gráfico

Atividade 14

- A partir das colunas *Tempo de travessia* e *Cor* da **Atividade: colorindo o mapa**, escreva o conjunto de pares ordenados da forma (tempo, cor) respeitando o critério que você escolheu para a determinação das cores.
- Represente graficamente este conjunto de pares ordenados.
- Para colorir as vias de todo o mapa, precisamos distribuir as cores para outros valores de tempo. Como você faria a distribuição para o intervalo de 0 a 25 minutos considerando um trecho qualquer de 13 km (a mesma extensão da ponte)?
- Encontre outra maneira de representar graficamente a associação entre os tempos e as cores.

Números triangulares no plano

Atividade 15

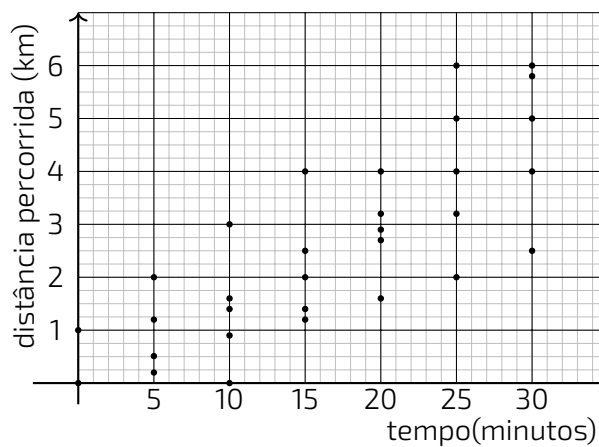
Represente, no plano cartesiano, o conjunto de pontos que correspondem aos pares ordenados $\{(n, T_n) ; n \in \{1, 2, \dots, 8\}\}$, em que T_n é o n -ésimo número triangular.

Jornada até a escola

Atividade 16

Leonardo mora a 6 km da escola onde estuda e utiliza o transporte escolar, que o busca na porta de sua casa. Em um certo dia, o percurso de Leonardo até sua escola foi assim: Ele estava na porta de casa às 7 horas, como de costume, mas o transporte escolar atrasou, passando em sua casa somente às $7h05min$. Leonardo entrou na van e sentou no penúltimo lugar vago. Ainda faltava Marina. “Ela mora a 3 km da minha casa!”, lembrou Leonardo. Às $7h10min$ em ponto, o transporte escolar chegou à casa de Marina, que já estava pronta aguardando para embarcar. Para tentar compensar o atraso, o motorista resolveu tomar um atalho, mas a estratégia não funcionou. Às $7h15min$ precisou ficar parado por 5 minutos em frente a uma cancela aguardando um trem de carga passar. Finalmente, às $7h25min$ chegaram à escola, 5 minutos antes do sinal tocar.

No plano cartesiano a seguir, o eixo horizontal indica o tempo em minutos e o eixo vertical a distância percorrida em quilômetros. Os pontos marcados correspondem às distâncias percorridas por diversos estudantes da escola a cada 5 minutos no período das 7h às $7h30min$ da mesma manhã descrita na situação acima.

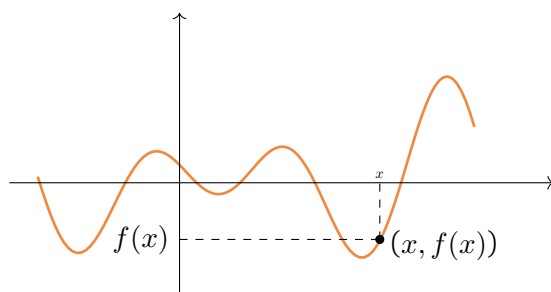


- Conecte os pontos que correspondem à jornada de Leonardo, desde a porta da sua casa até a chegada à escola, no dia descrito acima.
- Faça uma estimativa da distância a que Leonardo estará de sua casa às $7h07min$.
- Escolha um conjunto de pontos que possa representar a jornada de um outro estudante da sua casa à escola e descreva essa jornada.

ORGANIZANDO GRÁFICOS

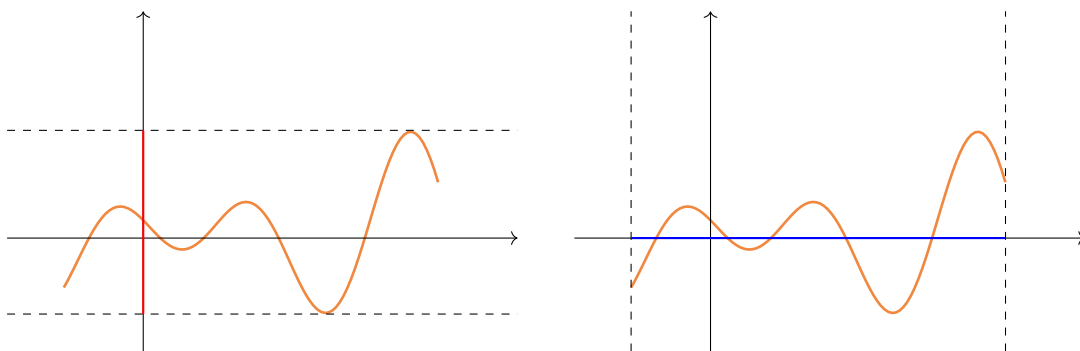
É hora de organizar as ideias sobre representação gráfica de uma função. Vimos que, para representar graficamente as funções, os pares ordenados são fundamentais. Cada par identifica as grandezas ou variáveis relacionadas e a ordem no par distingue o papel de cada uma delas: elemento do domínio, abscissa, e imagem, ordenada. Sendo assim, a representação gráfica de uma função exige: a identificação das variáveis do problema e a identificação da relação estabelecida entre as variáveis.

Para funções reais de variável real, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$, sua representação gráfica no plano cartesiano será o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ em que x pertence ao domínio da função.



PARA REFLETIR

Os conjuntos domínio e imagem ficam evidenciados na representação gráfica de uma função a partir dos eixos coordenados. Observe a representação gráfica a seguir, em que estão destacados conjuntos sobre os eixos. Qual deles você identifica como domínio? A que conjunto corresponde o outro?

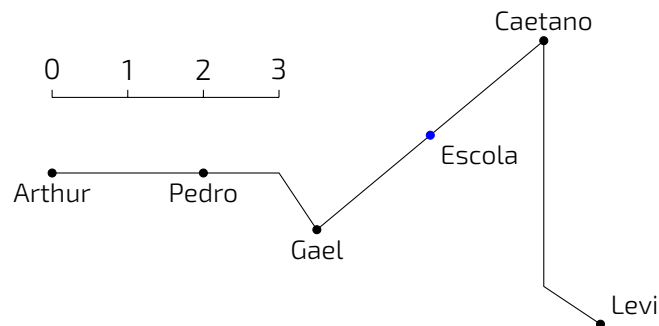


PRATICANDO GRÁFICOS

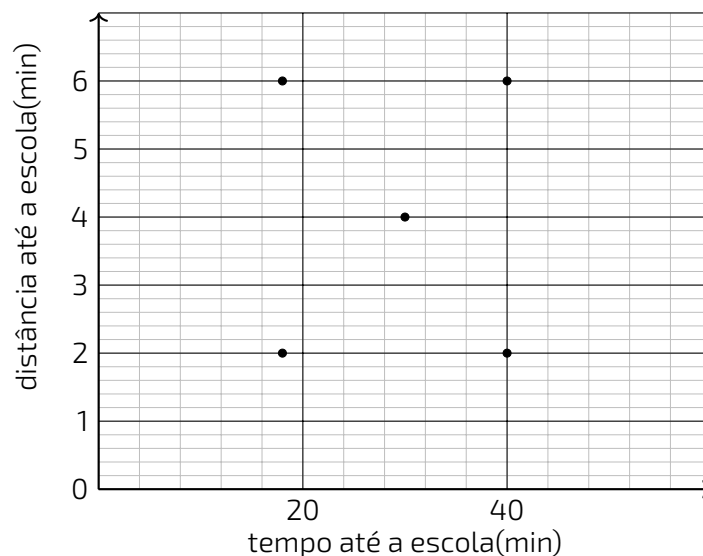
Indo para escola

Atividade 17

Arthur, Caetano, Gael, Levi e Pedro utilizam a mesma avenida para ir à escola a cada manhã. Levi vai com seu pai de carro, Arthur de bicicleta e Gael caminhando. Os demais variam, a cada dia, a forma como percorrem o trajeto. O mapa a seguir mostra a posição da casa de cada um em relação à escola.



Os pontos marcados no plano cartesiano abaixo fornecem informações sobre a jornada de cada criança na última segunda-feira.



- Associe cada ponto do gráfico com o nome da criança que ele representa.
- Como Pedro e Caetano foram para a escola na última segunda-feira? Por que?

Adaptado de *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd., 1985.

Qual é o gráfico?

Atividade 18

Dentre os gráficos apresentados a seguir identifique aquele que melhor descreve os dados apresentados em cada uma das tabelas seguintes.

a) Café esfriando

Tempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	90	79	70	62	55	49	44

b) Preparando a ceia

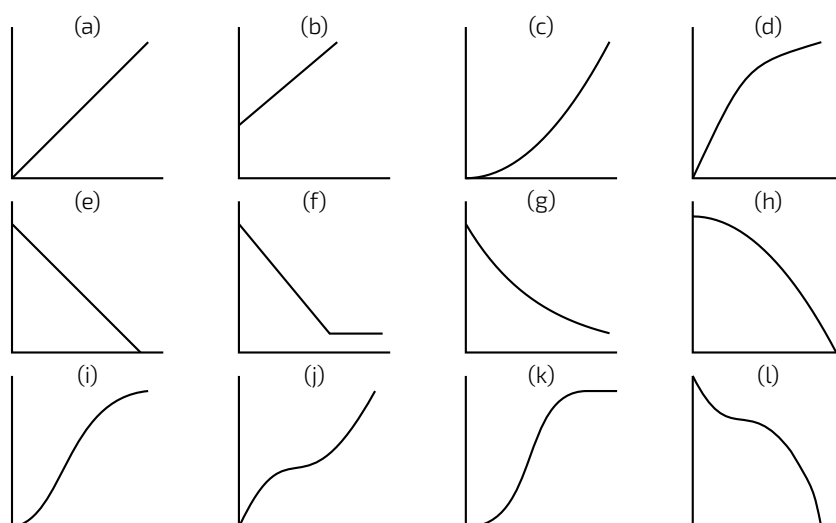
Peso (quilos)	3	4	5	6	7	8	9
Tempo (horas)	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

c) Depois de três canecas de cerveja...

Tempo (horas)	1	2	3	4	5	6	7
Álcool no sangue (mg/100ml)	90	75	60	45	30	15	0

d) Como um bebê cresce antes do nascimento

Tempo de gestação (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Comprimento do bebê (cm)	4	9	16	24	30	34	38	42

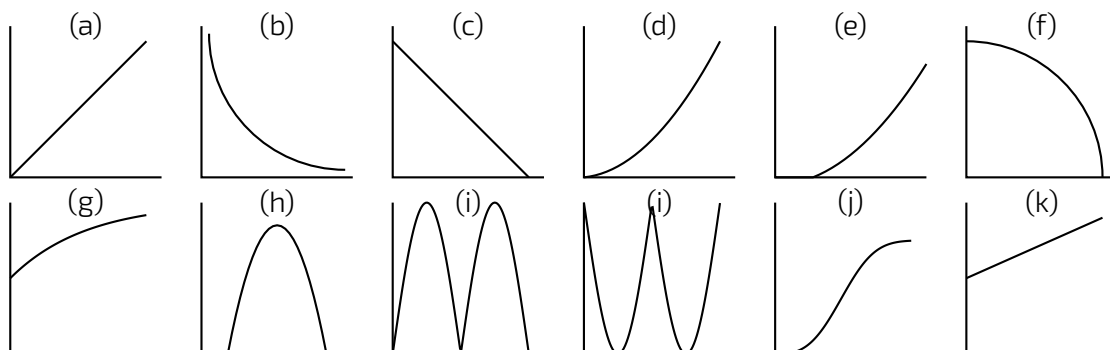


* Adaptado de *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd., 1985.

Imaginando gráficos

Atividade 19

Associe cada uma das situações apresentadas a seguir a um dos gráficos dados abaixo. Explique sua escolha e escreva, em cada um dos eixos, o que eles representam.

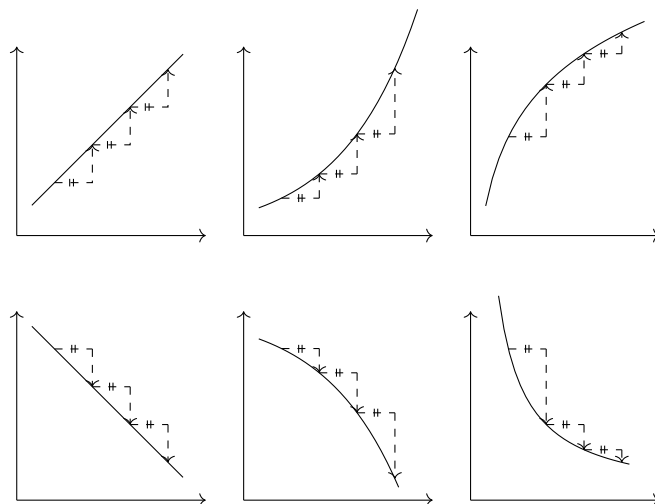


- (I) Após um concerto houve um grande silêncio. Então uma pessoa na platéia começou a aplaudir. Gradualmente, as pessoas à sua volta também começaram a aplaudir de forma que rapidamente todos estavam aplaudindo.
- (II) Se o preço cobrado pelo ingresso de um cinema for muito baixo, seu proprietário irá perder dinheiro. Por outro lado, se o valor cobrado for muito alto, poucas pessoas irão pagar e novamente o proprietário vai perder dinheiro. Um cinema deve portanto cobrar um preço moderado por seu ingresso de forma que seja lucrativo.
- (III) Preços estão agora subindo mais lentamente do que em qualquer época nos últimos cinco anos.

■ Adaptado do artigo Michal Ayalon & Anne Watson & Steve Lerman (2015). *Progression Towards Functions: Students' Performance on Three Tasks About Variables from Grades 7 to 12*.

PARA REFLETIR

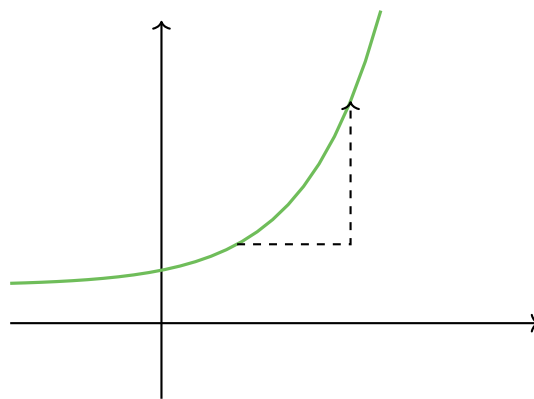
Observe as figuras abaixo



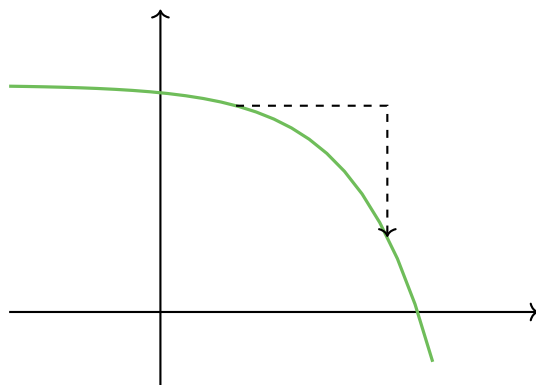
O que os gráficos da primeira linha têm em comum? E as da segunda linha?

Agora observe-os por coluna. Você consegue identificar algo em comum?

Função crescente e função decrescente Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *crescente* quando os valores das imagens, $f(x)$, aumentam à medida em que os valores de x aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$ tem-se $f(x_2) > f(x_1)$.



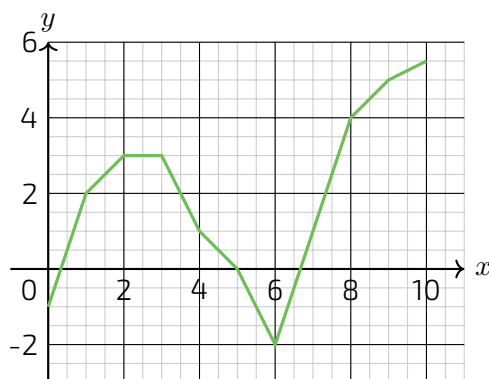
E é dita *decrescente* quando os valores das imagens, $f(x)$, diminuem à medida em que os valores de x aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$ tem-se $f(x_2) < f(x_1)$.



Leia no gráfico!

Atividade 20

Seja f a função real cuja representação gráfica é apresentada a seguir.

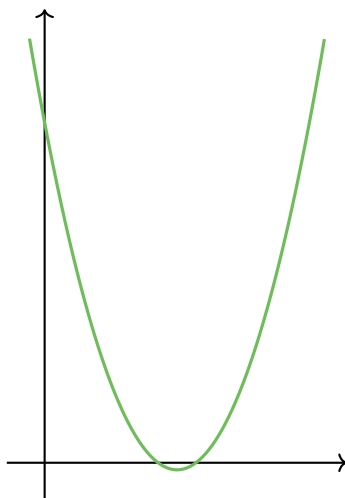


A partir da representação gráfica calcule os seguintes valores:

Notação	Valor
$f(1) - f(0)$	
$4 \cdot f(3)$	
$f(4)/f(2)$	
$f(6) \cdot f(2)$	
x quando $f(x) = -2$	
x quando $f(x) = 0$	
$f(3 \cdot 2) - 4 \cdot f(\sqrt{81}) + 1$	

PARA REFLETIR

Observe o gráfico da função real dada pela expressão $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$. Veja que ele possui interseções com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas. Qual procedimento você utilizaria para determinar esses pontos de interseção?



Os valores de x para os quais há interseção com o eixo das abscissas são chamados de zeros da função.

Imposto de renda

Atividade 21

A seguinte tabela é utilizada para o cálculo do Imposto de Renda para Pessoa Física (IRPF).

Tabela do IRF - Vigência a partir de 01/04/2015
(Medida Provisória 670/2015 convertida na Lei 13.149/2015)

Base de cálculo (R\$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IR (R\$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.825,55 até 3.751,05	15	354,80
3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Tabela 1.1: Fonte: <http://www.portaltributario.com.br>

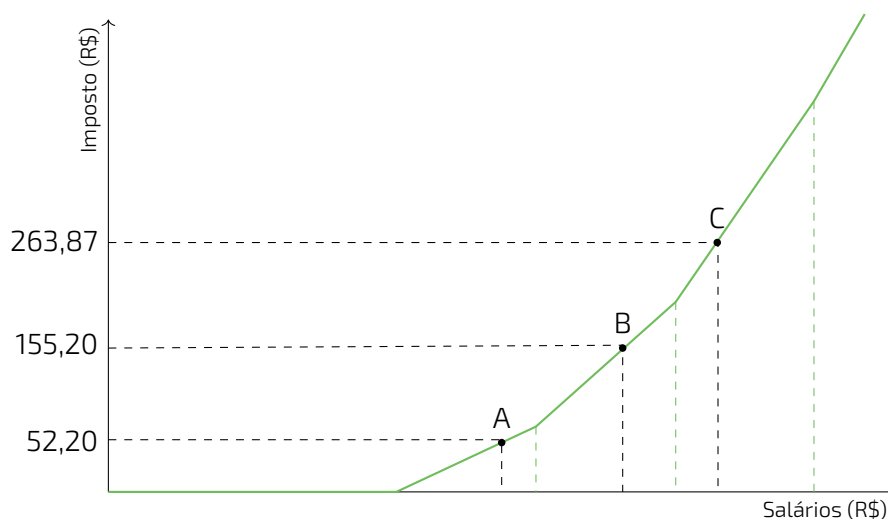
Por esta tabela, um trabalhador cujo rendimento é inferior a R\$ 1.903,98 está isento do imposto de renda. Já um trabalhador com rendimento de R\$ 3.000,00 tem um desconto, em reais, de 15% de 3.000,00 (450,00) menos a dedução de 354,80, isto é, deverá pagar de imposto de renda o valor $450 - 354,80 = 95,20$ R\$.

- a) Com os dados apresentados na tabela acima construímos a seguinte função que fornece o valor de imposto de renda a ser pago, a partir do rendimento informado:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1.903,98 \\ 0,075x - 142,90, & \text{se } 1.903,98 < x < 2.826,65 \\ 0,15x - 354,90, & \text{se } 2.826,65 \leq x < 3.751,05 \\ 0,225x - 636,13 & \text{se } 3.751,05 \leq x < 4.664,68 \\ 0,275x - 869,36 & \text{se } 4.664,68 \leq x \end{cases}$$

Determine o imposto que deverá ser pago por um trabalhador cujo rendimento seja:

- i) R\$ 1.750,00
 - ii) R\$ 2.680,00
 - iii) R\$ 4.060,00
 - iv) R\$ 5.500,00
- b) Observe o gráfico a seguir. Nele estão destacados os impostos de renda pago por três trabalhadores, indicados pelas letras A, B e C.



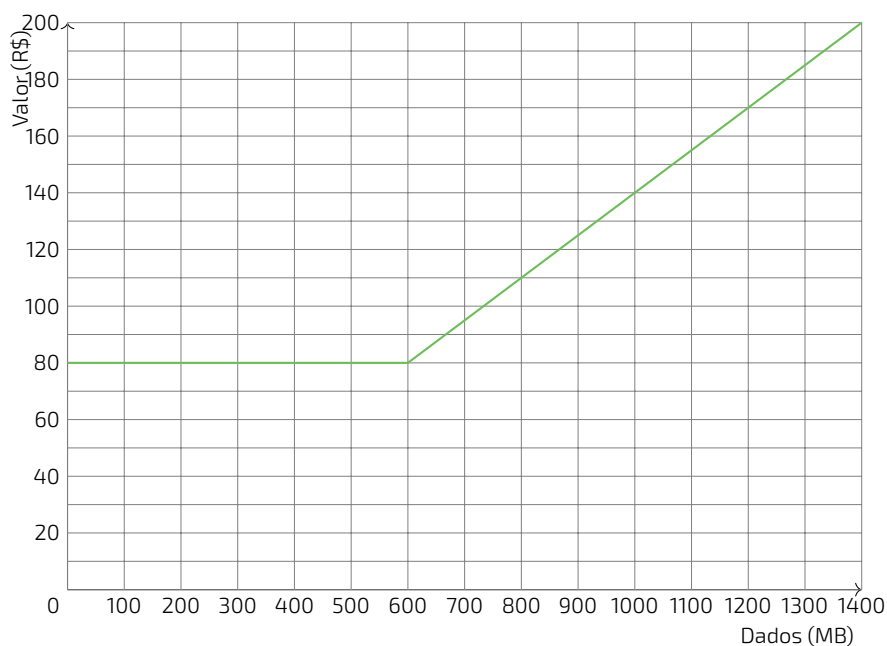
Segundo a tabela IRF, determine as alíquotas de desconto que estão sendo aplicadas a cada um destes trabalhadores e qual o salário de cada um deles.

Planos telefônicos

Atividade 22

Você deseja trocar o plano do seu telefone e ao consultar a sua operadora tem a opção de escolher entre dois planos: plano Prata e plano Ouro. No seu plano atual, você paga R\$ 70,00 por 500MB de internet e os dados além disso custam R\$ 0,20 por MB.

O plano Ouro cobra R\$ 140,00 por dados ilimitados e o plano Prata tem a mesma estrutura do seu plano atual. Os valores cobrados pelo plano Prata estão representados no gráfico a seguir.



- a) Qual o valor fixo cobrado no plano Prata e que quantidade de dados ele cobre?
- b) Qual o valor por MB excedente do valor estipulado?
- c) A partir de que quantidade de dados consumidos o plano Ouro passa a ser mais vantajoso?
- d) Represente no sistema de coordenadas acima o gráfico do preço a pagar pelo plano Ouro.

Bandeiras tarifárias

Atividade 23

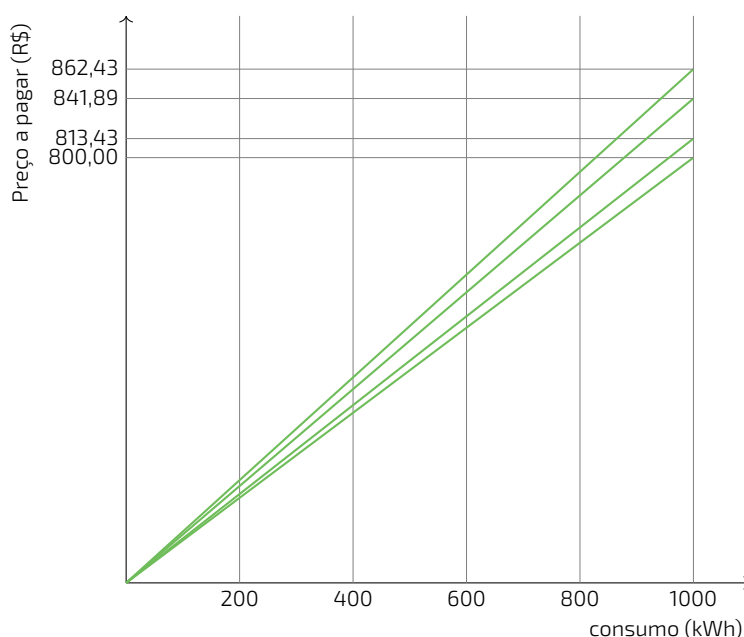
Desde o ano de 2015, as contas de energia passaram a trazer uma novidade: o Sistema de Bandeiras Tarifárias, que apresenta as seguintes modalidades: verde, amarela e vermelha - as mesmas cores dos semáforos - e indicam se haverá ou não acréscimo no valor de energia a ser repassada ao consumidor final, em função das condições de geração de eletricidade. Cada modalidade apresenta as seguintes características:

-  **Bandeira verde:** condições favoráveis de geração de energia. A tarifa não sofre nenhum acréscimo;
-  **Bandeira amarela:** condições de geração menos favoráveis. A tarifa sofre acréscimo de R\$ 0,01343 para cada quilowatt-hora (kWh) consumidos;
-  **Bandeira vermelha - patamar 1:** condições mais custosas de geração. A tarifa sofre acréscimo de R\$ 0,04169 para cada quilowatt-hora (kWh) consumido.
-  **Bandeira vermelha - patamar 2:** condições mais custosas de geração. A tarifa sofre acréscimo de R\$ 0,06243 para cada quilowatt-hora (kWh) consumido.

Texto extraído da página da ANEEL em 28/03/2020

<https://www.aneel.gov.br/bandeiras-tarifarias>

O sistema de coordenadas abaixo contém os gráficos para as funções que relacionam o preço a pagar pela energia em relação ao consumo em quilowatt-hora (kWh) para cada uma das bandeiras tarifárias, em uma cidade vizinha. Com base nas informações do gráfico a seguir, responda:



- a) Qual o preço da tarifa básica por quilowatt-hora nessa cidade?

- b) Considerando que uma residência tenha registrado um consumo de 350KWh em maio, e que seja um mês de bandeira amarela, qual o valor a pagar?
- c) Sabendo que em junho a bandeira será vermelha (patamar 1) e que uma família possa gastar no máximo R\$ 300,00 com a conta de energia elétrica, qual deve ser o consumo máximo nessa residência?

PARA SABER +

Todo mundo tem Facebook?

Atividade 24

A rede social virtual *Facebook* é um grande sucesso. O Facebook criado por Mark Zuckerberg em outubro de 2003, com o nome de *Facemash*, quando ele era um estudante do segundo ano em Harvard. Inicialmente 450 visitantes geraram 22.000 visualizações de fotos em suas primeiras 4 horas online. Em fevereiro de 2004, agora com o nome de *Thefacebook*, ele já contava com a participação de mais da metade dos alunos de Harvard, e um mês depois, estudantes das Universidades de Stanford, Columbia, Yale, Boston, Nova Iorque e MIT tiveram acesso à rede social criada por Mark Zuckerberg. A partir de setembro de 2005, funcionários de várias empresas, dentre elas *Apple* e *Microsoft*, puderam ter acesso ao *Facebook* e no final de 2006 o serviço ficou disponível para qualquer pessoa maior de 13 anos e com um endereço válido de *e-mail*.

A tabela a seguir mostra o número de usuários ativos do *Facebook* em janeiro dos anos de 2004 a 2015.

Ano	Número de usuários	Crescimento percentual
2004	5	–
2005	1.000.000	
2006	5.500.000	450%
2007	12.000.000	
2008	70.000.000	
2009	150.000.000	
2010	370.000.000	
2011	600.000.000	
2012	800.000.000	
2013	1.056.000.000	
2014	1.228.000.000	
2015	1.317.000.000	

Imagine que queremos investigar o crescimento anual do número de usuários. E, a partir da investigação formular um modelo que nos permita fazer previsões sobre a base de usuários para os próximos anos.

- a) Vamos começar investigando o crescimento percentual, preenchendo as lacunas da terceira coluna da tabela acima.
- b) Marque no plano cartesiano os pontos correspondentes aos dados fornecidos pelas duas primeiras colunas da tabela, usando a seguinte escala: no eixo das abscissas 1 cm corresponde a 1 ano e no eixo das ordenadas 1 cm corresponde a 200 milhões de usuários ativos.
- c) Como você descreveria o crescimento do número de usuários ativos do *Facebook*? Você acha que o crescimento está com tendência a diminuir, a aumentar ou a permanecer estável?
- d) Baseado no item c), faça uma previsão para o número de usuários para os anos de 2016 e 2017.
- e) Usando os dados da tabela e a representação gráfica feita no item b), faça uma previsão para o futuro do *Facebook*. Você acha que os números continuarão a aumentar? Se sim, quando ele atingirá a marca de 2 bilhões de usuários? Explique seu raciocínio.
- f) Um modelo matemático que fornece uma aproximação para a relação entre os dados das duas primeiras colunas da tabela é dado por uma função f que tem a seguinte expressão

$$f(x) = \frac{980}{0,7 + 670 \cdot 0,45^{(x+1)}}$$

em que x representa o tempo decorrido desde 2004, isto é, para 2010 tem-se $x = 6$, e $f(6)$ é o valor em milhões de usuários ativos no *Facebook* naquele ano. Com a ajuda de uma calculadora científica, use a expressão acima para calcular a estimativa do número de usuários nos anos de 2013 e de 2014, e em seguida compare com a tabela.

- g) Use a expressão anterior e calcule a estimativa para os anos de 2016 e 2017 e compare com as suas previsões do item (d).

Os dados reais para os meses de janeiro de 2016 e 2017 são 1.654.000.000 e 1.936.000.000, respectivamente. Isso significa que apesar do modelo descrever de forma satisfatória o comportamento do crescimento do número de usuários até o ano de 2015, para os anos seguintes ele não se mostra adequado. Existia de fato uma tendência para diminuição do crescimento, no entanto essa trajetória foi possivelmente modificada por ações que foram tomadas pela empresa ao perceber tal comportamento.

Situações como essa são bastante comuns em Modelagem Matemática. O modelo se mostra adequado sob certas condições, mas quando outras variáveis são consideradas (investimento em propaganda, alteração no algoritmo que escolhe as atualizações que serão exibidas para cada usuário, etc) ele pode perder sua acurácia, momento em que se fazem necessárias revisões.

Decodificando a mensagem

Atividade 25

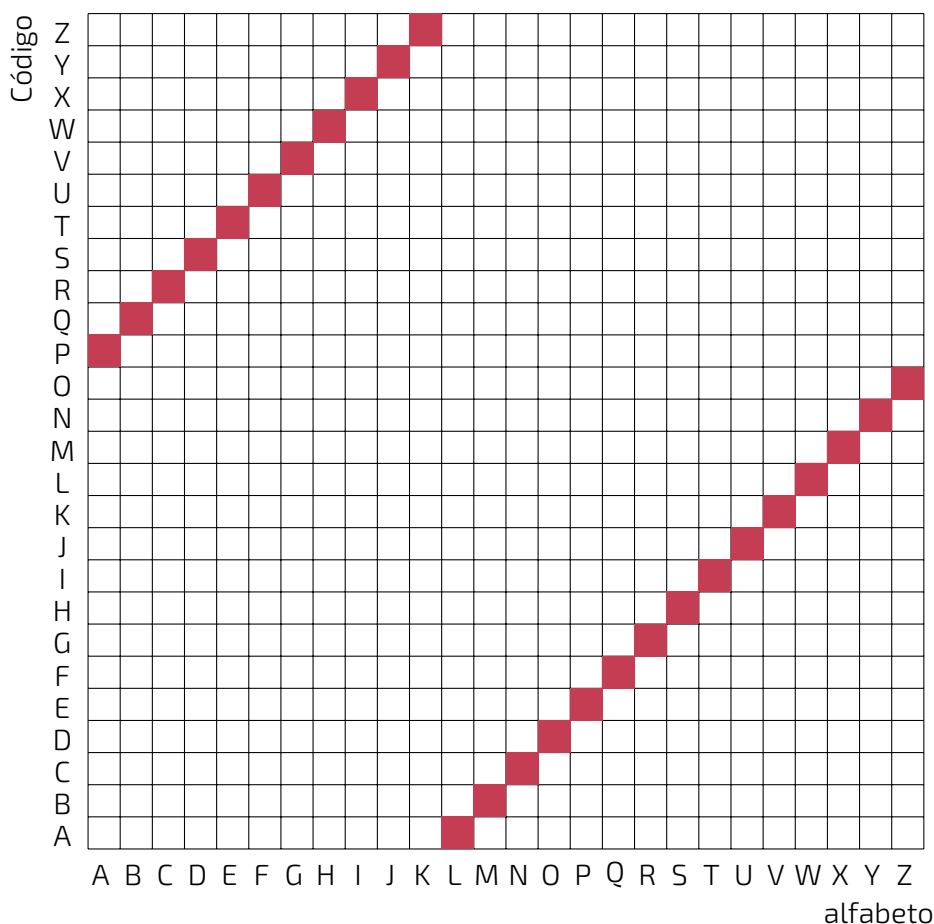
Um dos conceitos mais importantes para a segurança na *internet* nos dias de hoje é o que chamamos de **criptografia** (do grego *criptos* = escondido, *grafia* = escrita). Segundo o site *wikipedia* ela é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação pode ser transformada da sua forma original para outra codificada, de forma que possa ser conhecida apenas por seu destinatário (detentor da "chave secreta"), o que a torna difícil de ser decifrada por alguém não autorizado. Em outras palavras, cria-se um código que pode ser facilmente desfeito (decodificado) mas apenas por aqueles que conhecem a codificação.

Considere a seguinte maneira de codificar o alfabeto

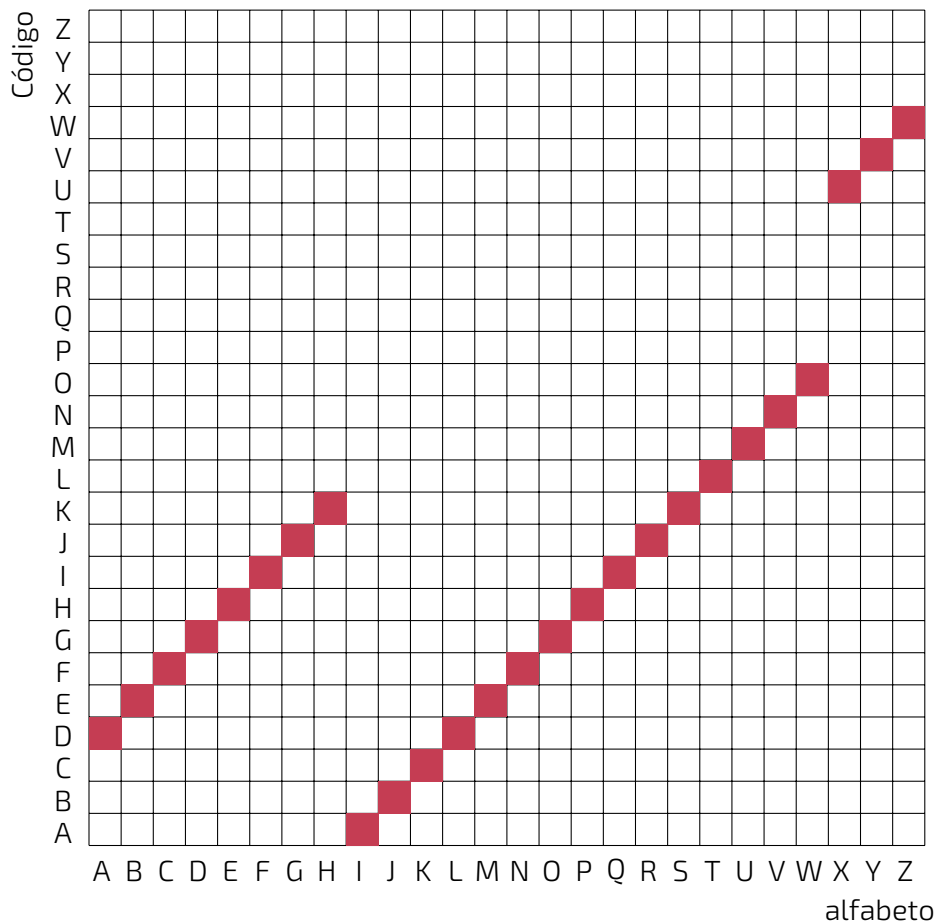
Original	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Código	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

- Use o código acima para codificar a palavra IMAGEM.
- Se você recebesse uma mensagem com a expressão RGXEIDVGPUPG, como faria para decodificá-la?

A codificação acima pode também ser representada em um gráfico em que no eixo horizontal estão as letras originais e no vertical os seus respectivos códigos.



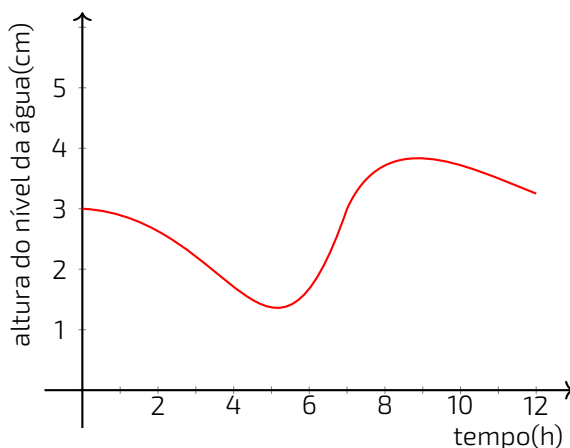
- c) Usando ainda o código acima escreva uma mensagem codificada com duas ou três palavras e troque com algum colega seu de classe. Decodifique a mensagem que recebeu. Você deve ter percebido que a codificação é uma função do conjunto das letras do alfabeto em si mesmo: todas as letras precisam ter um código e uma mesma letra não pode ter mais de um código associada a si.
- d) Seja X o conjunto dos números naturais de 1 a 26. Fazendo a correspondência, $A \mapsto 1, B \mapsto 2, C \mapsto 3$, e assim por diante até $Z \mapsto 26$, determine uma função $f : X \rightarrow X$ que corresponda ao código acima. Observe que por exemplo, $f(1) = 16$.
- e) Usando a expressão $f(x) = x^2$ crie um novo código entre as letras, representando-o no gráfico. O que devemos fazer quando os valores são maiores que 26?
- f) Considerando o código do gráfico abaixo, tente decodificar a palavra APQGJXV.



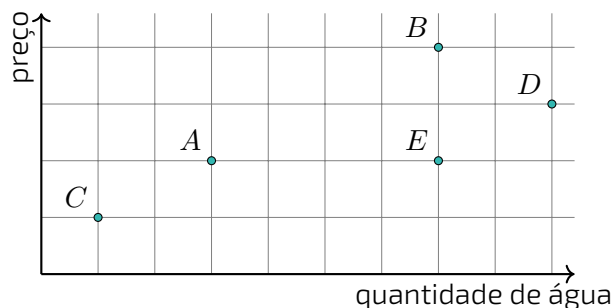
- g) Quais letras do código acima são impossíveis de decodificar e por quê?
- h) Que propriedades deve ter um código para que seja possível decodificá-lo?

EXERCÍCIOS

- 1 O gráfico abaixo mostra a altura do nível de água em uma piscina com vazamento. Identifique as variáveis na situação descrita e representada a partir do gráfico. Observe a relação apresentada no gráfico e indique possíveis causas para o comportamento observado.



- 2 Garrafas de água potável são vendidas em vários tamanhos e preços. Cada ponto no gráfico abaixo representa uma garrafa de água.



- Qual garrafa armazena a maior quantidade de água?
- Qual garrafa é vendida pelo preço mais alto?
- Identifique dois pontos que estejam sobre uma mesma reta paralela ao eixo das abscissas (reta horizontal) e interprete o que isso significa.
- Identifique dois pontos que estejam sobre uma mesma reta paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical) e interprete o que isso significa.
- Entre as garrafas A e E, qual tem o melhor custo-benefício? Por que? E entre B e E? Por que?

Referências Bibliográficas

Brasil (2016). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.

da Ponte, J. P. e Matos, A. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11:195–323.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. Em Harel, G. e Dubinsky, E., editores, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, página 153–174. Mathematical Association of America, Washington, Estados Unidos.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 7(2):1–20.

Ponte, J. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 2(3):3–8.

S., U. e M., T. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. Em Heuvel-Panhuizen, M. v. d., editor, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 4, páginas 327–334, Utrecht, Holanda. International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht University.

Sierpiska, A. (1992). On understanding the notion of function. Em Harel, G. e Dubinsky, E., editores, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, páginas 25–58. Mathematical Association of America, Washington, Estados Unidos.



Taxa de Variação

O QUÊ?

Taxas de variação média e instantânea de uma função real. Tipos de crescimento e decrescimento.

POR QUÊ?

É bastante comum nos depararmos com taxas em nosso cotidiano, informações que tratam de taxas de natalidade e mortalidade, taxa de variação cambial, velocidade, frequência, potência, inflação, aceleração, ritmo etc. Em algum sentido a taxa de variação é a generalização da ideia de razão. Enquanto razão é a comparação entre duas medidas a taxa de variação surge quando há covariação entre duas grandezas, ou seja, quando uma pode ser expressa como função da outra. A taxa de variação, então, é uma razão que traz consigo informações sobre duas grandezas que covariam sendo uma ferramenta poderosa para a interpretação de gráficos e a consequente compreensão de diferentes fenômenos e situações que nos cercam.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título: Taxa de Variação

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Gladson Antunes (UNIRIO)
Michel Cambrinha (UNIRIO)

Revisão: Wanderley Rezende

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

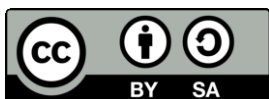
Ilustrações: Miller Guglielmo

Gráficos: Tarso Caldas

Capa: Foto de Autor desconhecido no Pexels
https://br.freepik.com/fotos-premium/mao-do-empresario-preparando-graficos-na-placa-de-vidro-com-marcador_2554735.htm#page=1&query=graficos%20graficos&position=30/

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



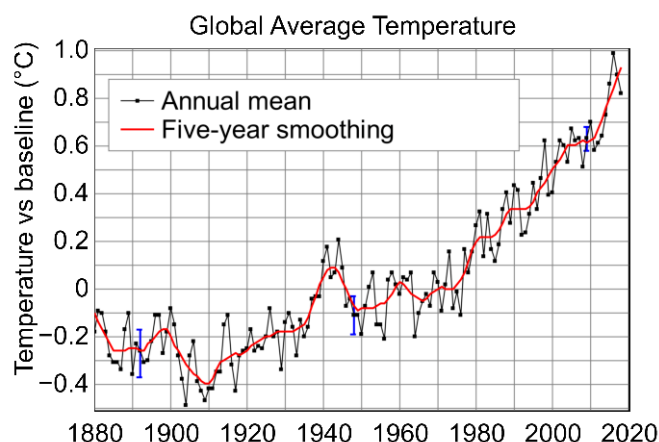


Figura 2.1: Por [NASA Goddard Institute for Space Studies](#)

A comparação está nas bases da matemática. Ela é fundamental para estabelecer os processos de contagem, de medida, para definir o conceito de número, também está presente nas ideias de razão e de proporção bem como em diversos outros contextos. No estudo das funções, quando estamos interessados em grandezas que variam conjuntamente, podemos usar a comparação para quantificar essas variações. Por exemplo, ao afirmarem que a temperatura média global está aumentando mais rapidamente agora que nos últimos anos, os cientistas fazem uso de uma ferramenta matemática que serve para medir esse crescimento: a taxa de variação. Ela serve especialmente para indicar de que maneira, ou a que velocidade, uma grandeza varia em relação a outra.

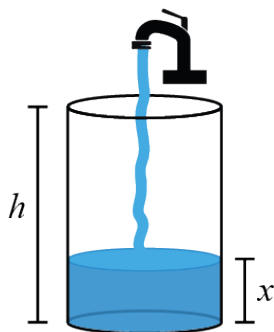
Um investidor da bolsa de valores precisa estar bem atento às taxas de variação do preço das ações para tomar as melhores decisões sobre compra e venda. Quando os preços das ações que ele possui mostram uma tendência a crescer mais rapidamente, é hora de começar a pensar em negociá-las. Para um biólogo que estuda populações é interessante conhecer a taxa de variação do número de indivíduos por unidade de tempo. Para um biomédico, conhecer a taxa de variação da quantidade de determinado medicamento na corrente sanguínea pode indicar a efetividade de um medicamento. Para um cientista social, a taxa de variação do número de encarcerados no país pode indicar se uma determinada política pública na área de segurança pública precisa ou não ser discutida. Neste capítulo, vamos introduzir e explorar esse conceito em diversos contextos.

Contudo a discussão não se restringirá somente a este capítulo, a taxa de variação voltará a aparecer diversas outras vezes neste livro.

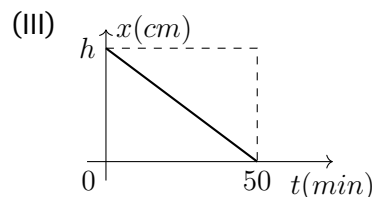
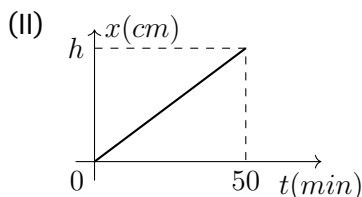
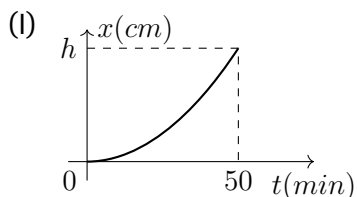
A água está subindo

Atividade 1

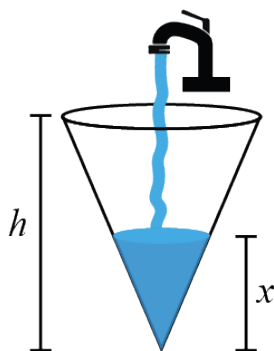
Parte I: Um reservatório cilíndrico de altura h (em cm), com capacidade máxima de 100ℓ , encontra-se vazio. Para enchê-lo, abriu-se uma torneira que despeja 2ℓ de água por minuto.



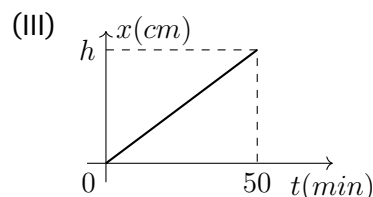
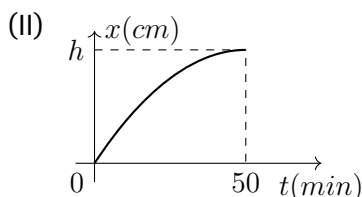
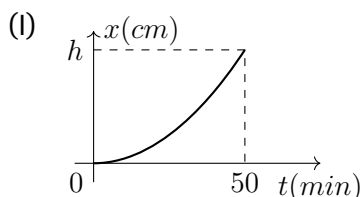
Qual dos gráficos seguintes expressa corretamente a variação da altura x da coluna de água em função do tempo t ? Explique.



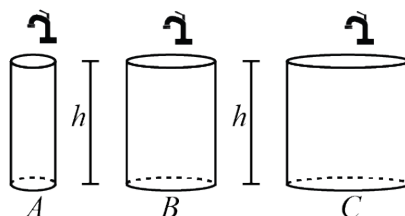
Parte II Um reservatório cônico de altura h (em cm), com capacidade máxima de 100ℓ , encontra-se vazio e posicionado com o vértice para baixo, conforme mostra a figura. Para enchê-lo, abriu-se uma torneira que despeja 2ℓ de água por minuto.



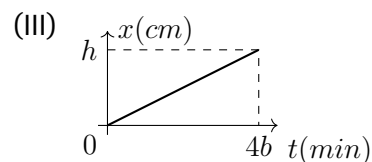
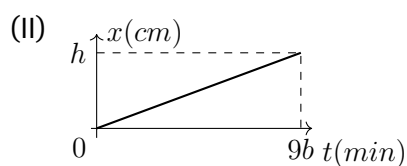
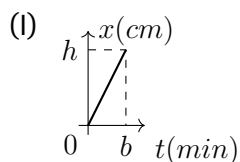
Qual dos gráficos seguintes expressa corretamente a variação da altura x da coluna de água em função do tempo t ? Explique.



Parte III Os recipientes cilíndricos A , B , e C , que têm altura h raios da base respectivamente iguais a r , $2r$ e $3r$, estão vazios. As torneiras que os abastecem estão igualmente reguladas para despejar o mesmo número de litros de água por minuto.



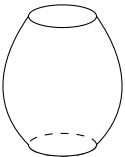
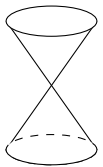
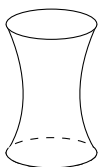
Os gráficos mostram a variação da altura x da coluna de água em função do tempo t . Associe cada recipiente ao gráfico correspondente a ele e justifique suas escolhas.



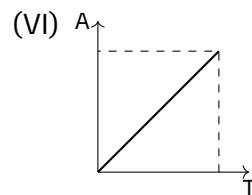
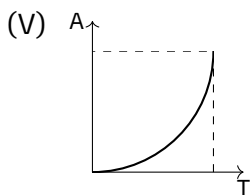
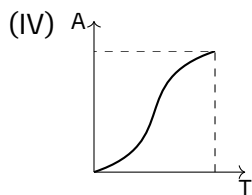
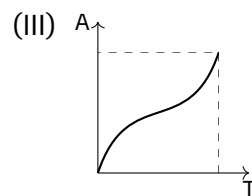
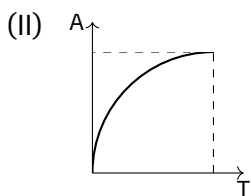
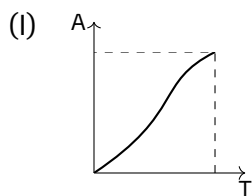
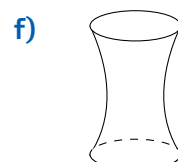
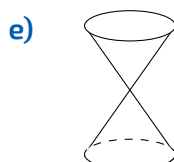
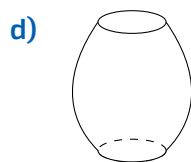
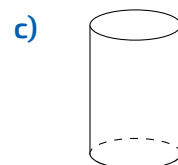
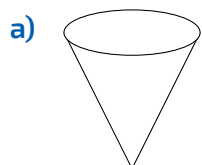
A água continua subindo

Atividade 2

Parte I Suponha que os diversos reservatórios abaixo têm a mesma capacidade, a mesma altura e que em cada um deles a água entra a uma vazão constante. Analisando a forma de cada um dos reservatórios, descreva de que maneira a altura varia em função do tempo no início, meio e fim do processo. Use, quando necessário, as palavras **lentamente**, **rapidamente** e **uniformemente**. (Gravina, 1992)¹.

Parte II Relacione a forma do pote com o gráfico da variação da altura em função do tempo de cada um deles.



¹GRAVINA, M. Um estudo de funções. Revista do Professor de Matemática, n° 20, SBM, pp. 33 –38, 1992

Uma viagem de carro

Atividade 3

Você está viajando de carro para uma cidade que está a 410 km de distância da sua casa. Você sai ao meio dia e depois de 2h de viagem faz a primeira parada em um posto de combustível na estrada. Olhando no GPS, calcula que já percorreu 140 km desde a sua partida. Depois de 30 minutos parte para a estrada novamente. Faz uma nova parada das 16h às 16h30 em outro posto 120 km adiante do anterior. E finalmente às 18h chega ao seu destino.

- a) Preencha a tabela abaixo com as distâncias percorridas e marque no sistema de coordenadas os pares ordenados correspondentes. (o eixo horizontal representa o tempo decorrido em horas desde a partida e o eixo vertical a distância percorrida em quilômetros).

Horário	Tempo decorrido desde a partida (h)	Distância percorrida (km)
	t	$d(t)$
12h	0	
14h	2	
14h30	2.5	
16h		
16h30		
18h		



- b) A distância total percorrida na viagem foi de 410 km, e durou 6h. Podemos obter a **velocidade média** da viagem dividindo esses dois valores, obtendo

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{410}{6} = 51,5 \cdot \frac{km}{h}$$

O que representa esse número no contexto do problema?

- c) Calcule a velocidade média para o trecho da partida até chegar à primeira parada

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \cdot = \frac{km}{h}$$

Ele é o mesmo que o anterior? Explique

- d) Sem fazer a conta, você imagina que o valor da velocidade média no trecho da partida até a hora de saída a primeira parada (14h30) será maior ou menor que o valor do item anterior? Por que?

- e) preencha a tabela com as velocidade médias nos trechos indicados.

Intervalo de tempo a, b	Velocidade média $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(b) - d(a)}{b - a}$
0, 2	
2, 2.5	
2.5, 4	
4, 4.5	
4.5, 6	

ORGANIZANDO

A taxa de variação de uma grandeza em relação a outra é a medida do ritmo de crescimento ou decréscimo entre tais grandezas. É quanto uma grandeza varia por unidade da outra.

Quando se diz que um recipiente está sendo enchido com um líquido à uma taxa de variação constante de $1\ell/min$ (um litro por minuto) significa que a cada minuto transcorrido, 1 litro de líquido é acrescido ao recipiente. A velocidade é a taxa de variação do espaço percorrido por unidade de tempo. Dizer que um carro tem uma velocidade uniforme de $50km/h$ significa que se mantiver essa velocidade por uma hora, percorrerá uma distância de 50 quilômetros.

Nem sempre estamos diante de situações em que as taxas de variação entre as grandezas são constantes (uniformes). Nestes casos, precisamos considerar a variação média dos valores de uma grandeza em um dado intervalo de valores da outra. Mais precisamente, considere uma y grandeza que pode ser expressa como função da grandeza x , isto é, $y = f(x)$. A **taxa de variação média** de y em relação a x no intervalo $[a, b]$ é definida por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

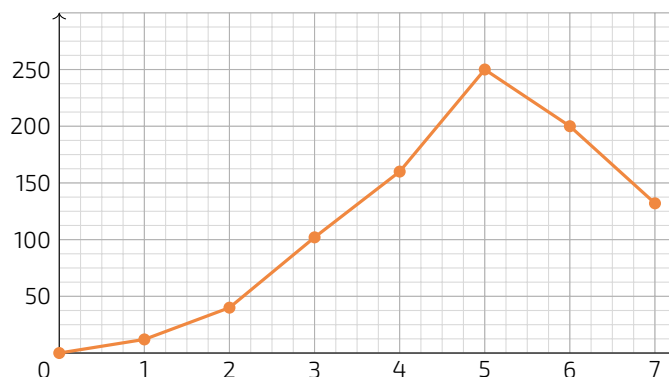
Ou seja, é a razão entre a variação total de $y = f(x)$ e o comprimento do intervalo. POor exemplo, se a temperatura (T) de um corpo aumenta de $36^\circ C$ para $39^\circ C$ no intervalo de tempo (t) entre 10h00min e 10h15min podemos dizer que a taxa de variação média da temperatura nesse intervalo de tempo é de

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{39^\circ C - 36^\circ}{10h15min - 10h00min} = \frac{3^\circ C}{15min} = 0,2^\circ C/min$$

Isso não significa que às 10h01min a temperatura era de $36,2^\circ C$ às $36,4^\circ C$ e assim sucessivamente. Apenas pode-se dizer que **em média**, a cada minuto, houve um aumento dessa magnitude. A taxa de variação média trata de informação apenas no início e no fim do intervalo.

O gráfico e a tabela a seguir mostram a variação do número de visualizações (*views*) de um determinado vídeo no YouTube ao longo de uma semana.

Dia (d)	Visualizações (V)
0	0
1	12
2	40
3	102
4	160
5	250
6	200
7	132



Perceba que a taxa de variação média entre os dias 1 e 7 é a mesma observada entre os dias 4 e 6, ao mesmo tempo que os valores intermediários são bem distintos.

$$\frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{132 - 12}{7 - 1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ views/dia}$$

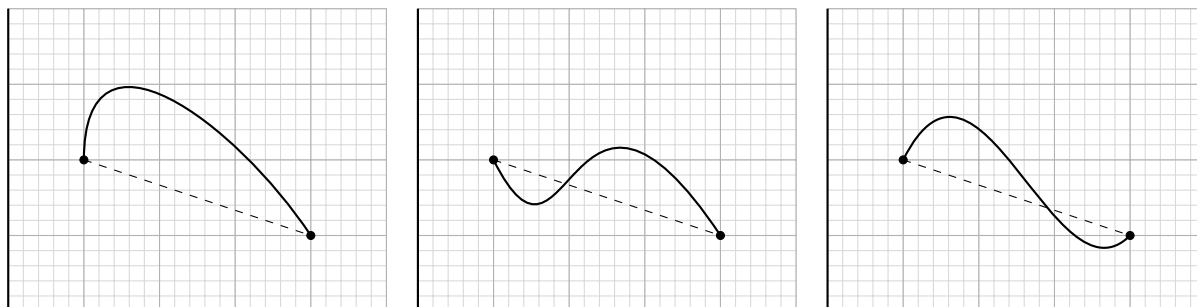
$$\frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{200 - 160}{6 - 4} = \frac{40}{2} = 20 \text{ views/dia}$$

Agora, vamos destacar um outro aspecto importante da taxa de variação. Vamos calcular, nesse último exemplo a taxa de variação média entre os dias 5 e 7:

$$\frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{132 - 250}{7 - 5} = \frac{-118}{2} = -59 \text{ views/dia}$$

Por que esse resultado foi negativo? O que isso pode significar? Qual a relação dele com o aspecto do gráfico?

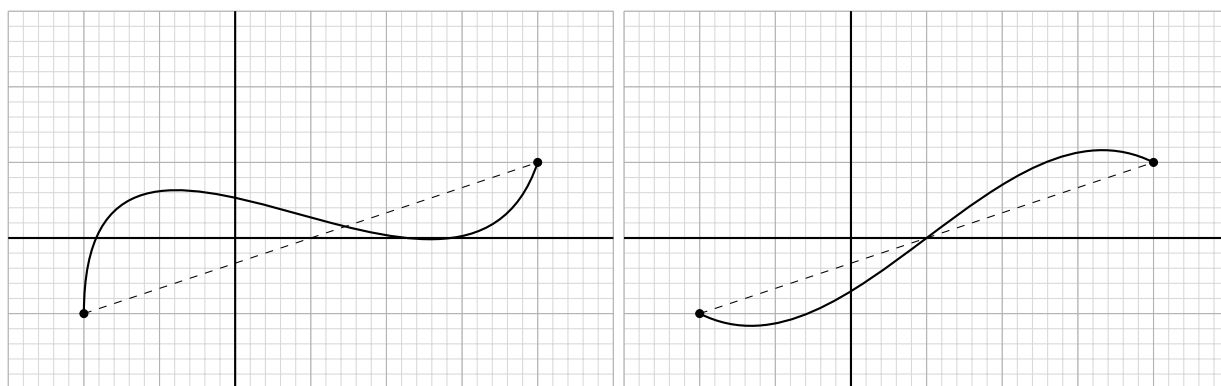
O resultado foi negativo pois a quantidade de visualizações no dia 7 foi menor do que a quantidade no dia 5, fazendo com que o resultado da subtração no numerador fosse negativo e indicando que houve, no período analisado, uma queda no número de visualizações. Dá para conjecturar que sempre que houver essa redução, teremos uma taxa de variação média negativa o que tem relação com algum tipo de decrescimento global da função nesse intervalo.

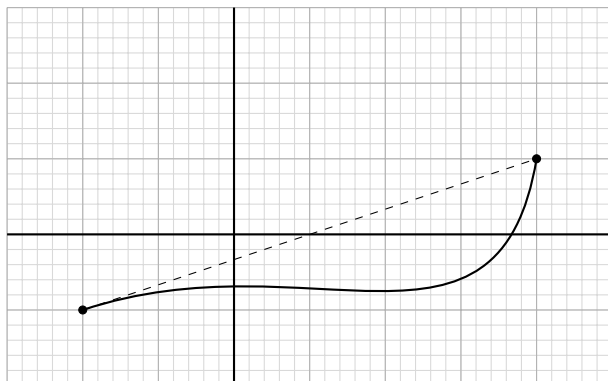


O numerador da taxa de variação média é a diferença entre os valores final e inicial. Assim, sempre que o valor final for menor que o inicial, o numerador Δy será negativo. Como o denominador Δx é sempre positivo, o resultado da razão entre eles será um número negativo.

Como mencionado antes, a taxa de variação média diz respeito apenas às imagens dos extremos do intervalo. Portanto, ao observarmos que em um determinado intervalo a taxa média foi negativa, não podemos afirmar que a função é decrescente em todo intervalo, mas apenas que houve mais decrescimento do que crescimento, em média. Os três gráficos acima têm taxa média negativa no intervalo destacado.

Com um raciocínio similar, podemos dizer que uma taxa de variação média positiva indica um crescimento entre os valores inicial e final da variável dependente no intervalo considerado, mas não que a função é crescente em todo o intervalo.

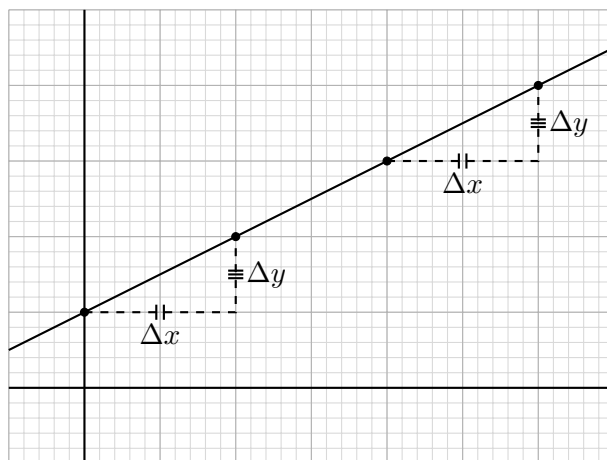




Lentamente, uniformemente ou rapidamente?

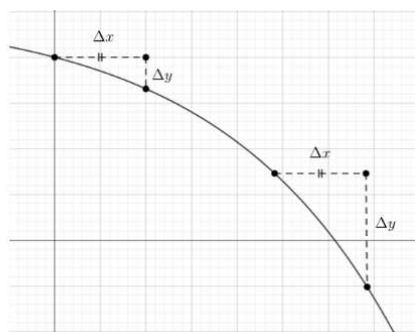
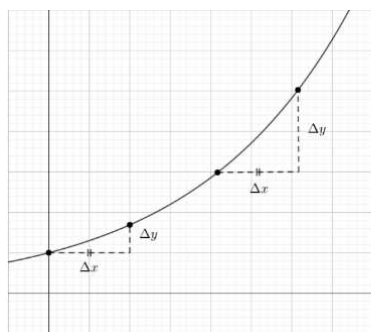
Os adjetivos acima somente fazem sentido quando estamos comparando o crescimento de duas ou mais funções ou a mesma função em dois ou mais intervalos diferentes.

Por exemplo, dizer que uma determinada função **crece uniformemente** significa que para intervalos Δx iguais a variável y apresentou a mesma variação, isto é, se dois intervalos do domínio têm o mesmo Δx , correspondendo a eles teremos o mesmo Δy . Em termos da taxa de variação podemos dizer que ambos os intervalos apresentam a mesma taxa média. Na verdade, só poderemos afirmar que há algum tipo de uniformidade se isso acontecer para quaisquer dois intervalos! Veja a figura ao lado. Esse caso será tratado com maiores detalhes no capítulo sobre as funções afins.



Nos casos em que a taxa média não é sempre a mesma, podemos comparar dois intervalos com taxas médias positivas distintas e dizer que onde a taxa for menor a função cresceu em média mais lentamente do que no outro intervalo onde a taxa média foi maior. Para o caso da taxa média negativa, acontece o oposto: quanto menor for o valor, mais decréscimo houve no intervalo.

Nos gráficos a seguir, os comprimentos dos intervalos Δx são iguais, mas os comprimentos dos respectivos Δy variam.

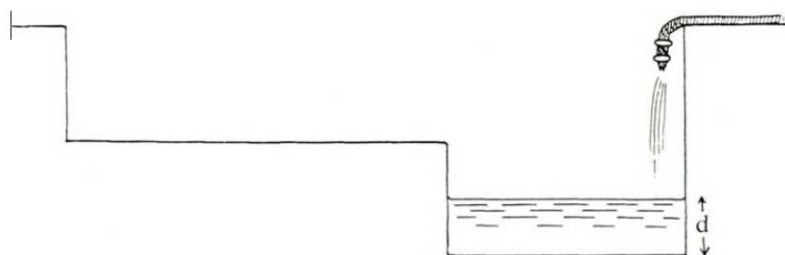


PRATICANDO

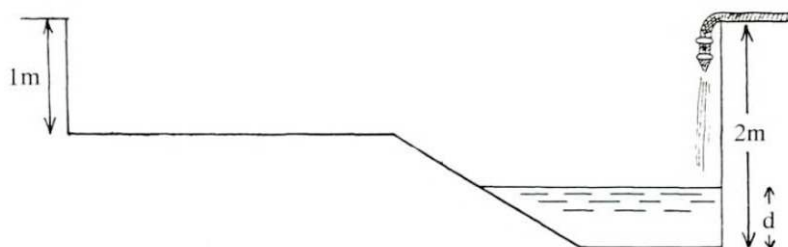
Hora de encher a piscina

Atividade 4

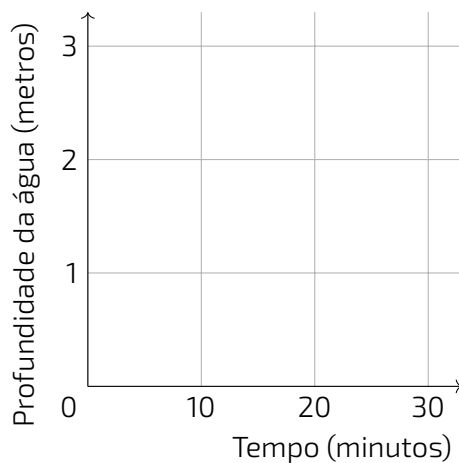
Uma piscina retangular está sendo cheia com uma mangueira que fornece água a uma taxa constante. Uma seção transversal da piscina é mostrada na imagem a seguir.



- Descreva em palavras como a profundidade d da água até o fundo da piscina varia com o tempo, a partir do momento em que a piscina vazia começa a encher.
- Uma piscina retangular está sendo cheia de maneira semelhante.



Supondo que a piscina leva 30 minutos para encher até a borda. Esboce um gráfico para mostrar como a profundidade d da água até o fundo da piscina varia com o tempo a partir do momento em que a piscina está vazia.



Aumento da população

Atividade 5

A população brasileira alcançou os 210,1 milhões de habitantes em 2019. Segundo dados do IBGE houve um aumento de 0,79% em relação a 2018 quando o instituto estimou a população do país em 208,5 milhões de habitantes. A tabela abaixo mostra a população aproximada de brasileiros nos anos de 2007, 2012 e 2019.

População aproximada	Ano
190 milhões	2007
200 milhões	2012
210 milhões	2019

- Qual foi a variação da população entre 2007 e 2012? E entre 2012 e 2019?
- Quando a população aumentou mais rápido? Explique.
- De quanto foi o aumento médio anual entre 2007 e 2012? E entre 2012 e 2019? E entre 2007 e 2019?

Gráficos, tabelas e fórmulas

Atividade 6

Para cada uma das situações a seguir:

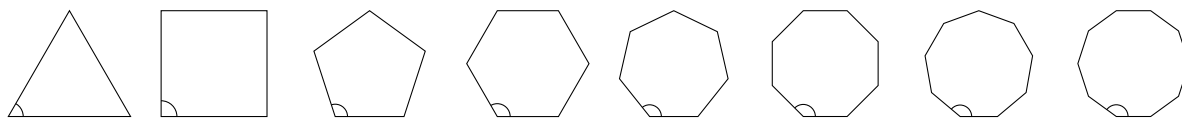
- Responda à pergunta fazendo o esboço de um gráfico
- Descreva com palavras a forma do seu gráfico
- Verifique seu gráfico construindo uma tabela de valores. Caso seja necessário, refaça seu esboço
- Tente encontrar uma expressão algébrica que descreva a situação

TV por assinatura Uma empresa de TV por assinatura cobra R\$ 80,00 por mês por um determinado pacote de canais. Uma oferta para novos assinantes oferece o primeiro mês gratuitamente. Como irá variar o custo da assinatura conforme o período de tempo aumenta?

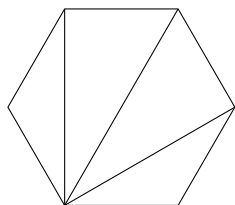
Valor de mercado de um carro Comprei um carro por R\$ 65.000,00 e seu valor está depreciando a uma taxa de 20% ao ano. Isso significa que depois de um ano seu valor era de $60.000 \times 0,8 = 52.000$, depois de dois anos, $52.000 \times 0,8 = 41.600$ e assim por diante. Como o valor de mercado desse carro continuará a mudar?

Subindo uma escada Uma passada normal tem em média 60cm de comprimento. Ela deve diminuir 2cm para cada 1cm que o pé é levantado quando estamos subindo os degraus de uma escada. Seguindo esse princípio, como deve variar o comprimento da passada com a altura de um degrau?

Polígonos Regulares Como a medida de um dos ângulos internos depende do número de lados de um polígono regular?



Sugestão: Você pode calcular a soma de todos os ângulos internos de cada um dos polígonos subdividindo-os em triângulos, por exemplo:



Soma dos ângulos internos: $4 \times 180^\circ = 720^\circ$

As imagens

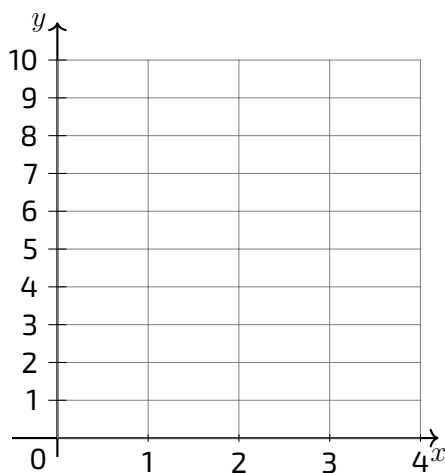
Atividade 7

Nas tabelas abaixo encontram-se as taxas de variação médias de funções e os intervalos correspondentes. Complete-as com os valores da função e em seguida represente os pontos no sistema de coordenadas

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

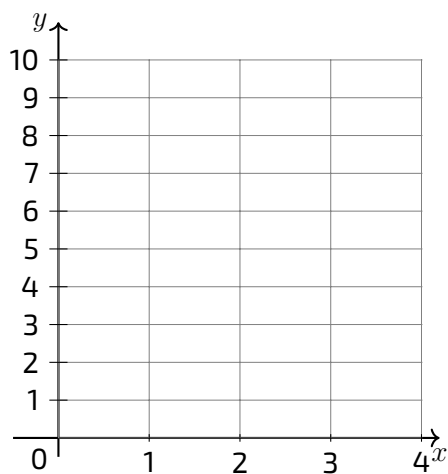
a)

$[a, b]$	$f(0) = 1$	$\Delta y / \Delta x$
$[0, 1]$	$f(1) =$	2
$[1, 2]$	$f(2) =$	2
$[2, 3]$	$f(3) =$	2
$[3, 4]$	$f(4) =$	2



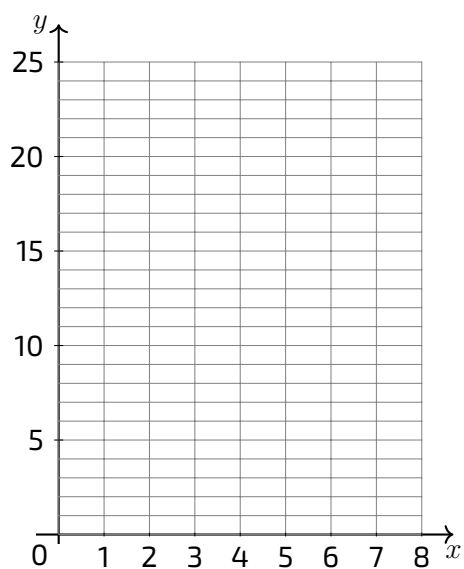
b)

$[a, b]$	$f(0) = 10$	$\Delta y / \Delta x$
$[0, \frac{1}{2}]$	$f(1/2) =$	-2
$[\frac{1}{2}, 1]$	$f(1) =$	-2
$[1, \frac{3}{2}]$	$f(3/2) =$	-2
$[\frac{3}{2}, 2]$	$f(2) =$	-2
$[2, \frac{5}{2}]$	$f(5/2) =$	-2
$[\frac{5}{2}, 3]$	$f(3) =$	-2
$[3, \frac{7}{2}]$	$f(7/2) =$	-2
$[\frac{7}{2}, 4]$	$f(4) =$	-2



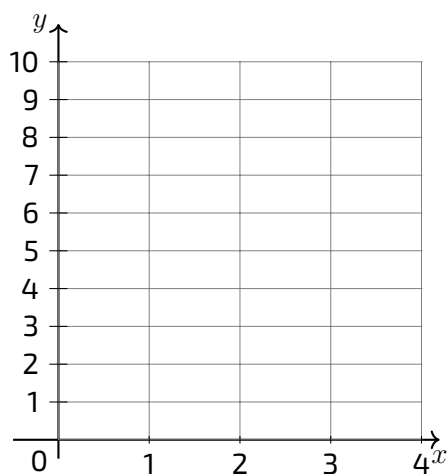
c)

$[a, b]$	$f(0) = 0$	$\Delta y / \Delta x$
$[0, 2]$	$f(2) =$	1
$[2, 4]$	$f(4) =$	2
$[4, 6]$	$f(6) =$	3
$[6, 8]$	$f(8) =$	4



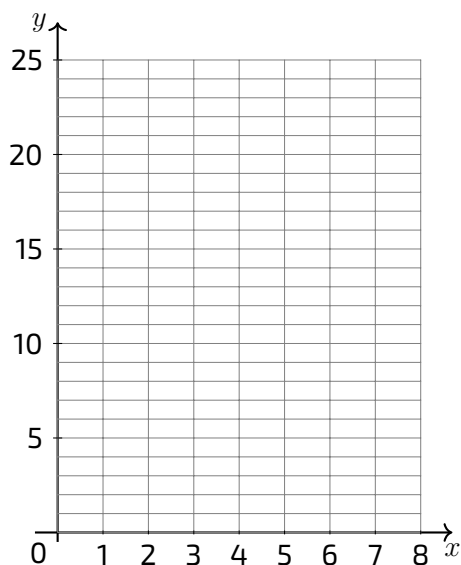
d)

$[a, b]$	$f(0) = 0$	$\Delta y / \Delta x$
$[0, 1]$	$f(1) =$	10
$[1, 2]$	$f(2) =$	-8
$[2, 3]$	$f(3) =$	6
$[3, 4]$	$f(4) =$	0



e)

$[a, b]$	$f(0) = 0$	$\Delta y / \Delta x$
$[0, 1]$	$f(1) =$	1
$[1, 2]$	$f(2) =$	3
$[2, 3]$	$f(3) =$	5
$[3, 4]$	$f(4) =$	7
$[4, 5]$	$f(5) =$	5
$[5, 6]$	$f(6) =$	3
$[6, 7]$	$f(7) =$	1
$[7, 8]$	$f(8) =$	0

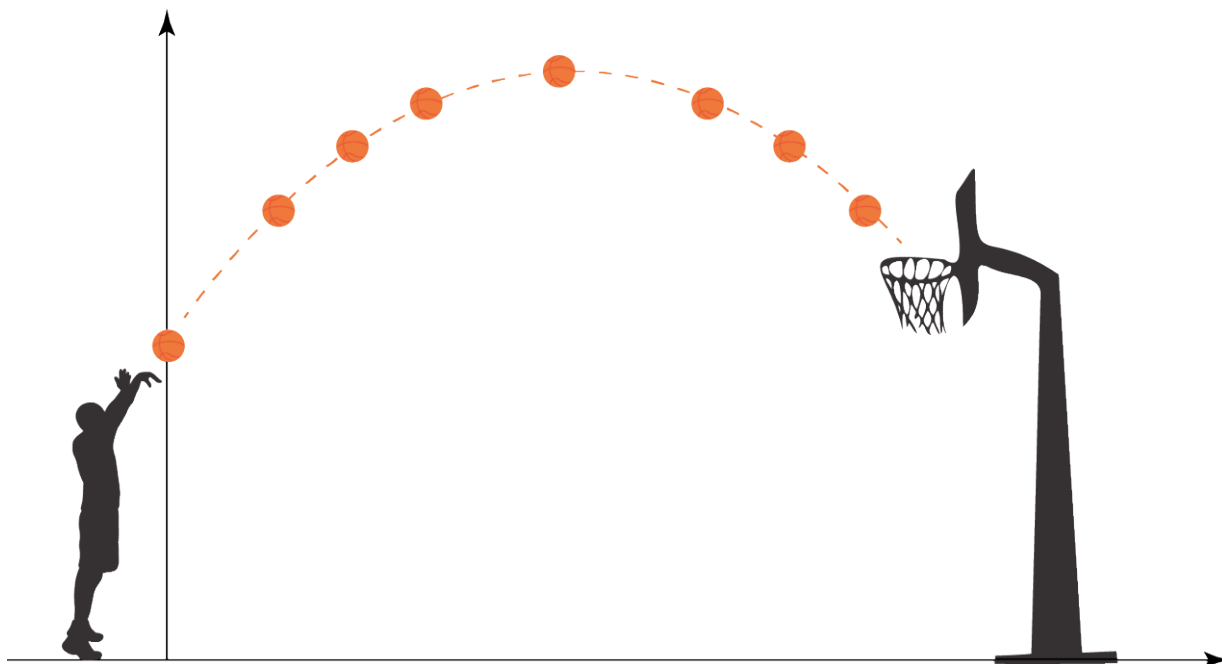


PARA SABER +

Arremesso

Atividade 8

Um jogador de basquete ao lançar a bola em direção à cesta a vê descrever uma curva no ar chamada *parábola*. Essa curva é resultado da combinação de dois movimentos: um na direção horizontal, responsável por fazer a bola "ir para frente" e outro na direção vertical que faz a bola "subir e descer".



Admitindo que o jogador lançou a bola de uma altura de $2,10m$ com velocidade inicial de $v_0 m/s$ (na direção vertical), a função que fornece a variação da altura da bola em função do tempo é dada pela expressão

$$h(t) = 2,10 + v_0 t - 5t^2$$

cujo gráfico também é uma parábola (representado a seguir apenas para $t \geq 0$):

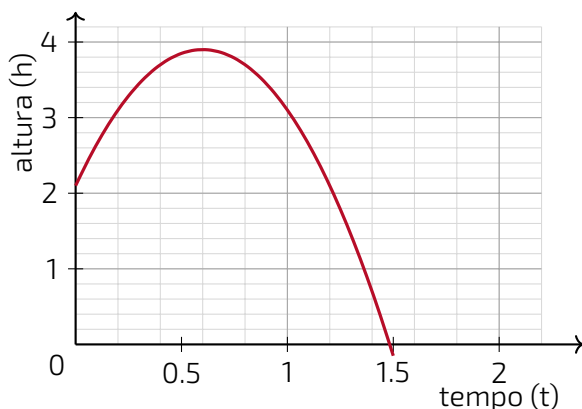


Figura 2.2: Gráfico de $h(t)$ para $v_0 = 6m/s$.

Com a ajuda de uma calculadora, calcule as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo para $v_0 = 6m/s$ e $v_0 = 7m/s$:

	$v_0 = 6m/s$	$v_0 = 7m/s$
Entre $t = 0$ e $t = 1$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,1$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,01$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,001$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,0001$		

- a) Olhando para as sequências de valores obtidos acima, o que se pode conjecturar sobre a tendência que eles apresentam?

Considerando a velocidade inicial igual a $6m/s$, a bola atinge sua altura máxima de $3,9m$ depois de $0,6s$ do lançamento. Ou seja, o ponto mais alto do gráfico é o par ordenado $(0,6; 3,9)$. Neste ponto a velocidade na direção vertical é igual a zero (uma vez que aí a bola deixa de subir e passa a descer). Observe, agora, as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo:

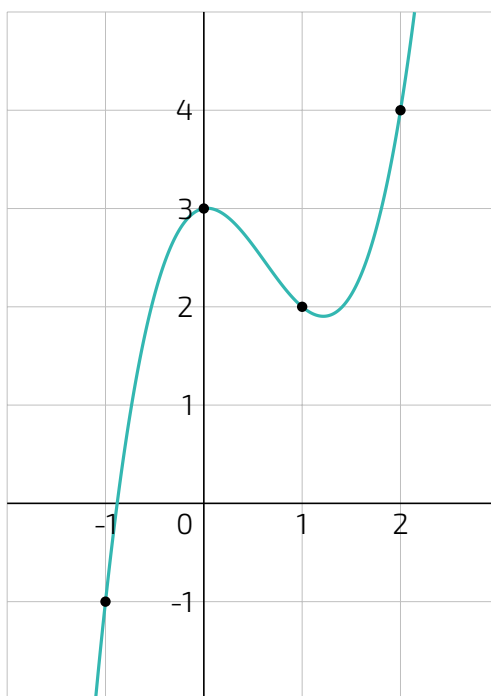
	$v_0 = 6m/s$
Entre $t = 0,5$ e $t = 0,6$	0,5
Entre $t = 0,59$ e $t = 0,6$	0,05
Entre $t = 0,599$ e $t = 0,6$	0,005
Entre $t = 0,5999$ e $t = 0,6$	0,0005

	$v_0 = 6m/s$
Entre $t = 0,6$ e $t = 0,7$	-0,5
Entre $t = 0,6$ e $t = 0,65$	-0,25
Entre $t = 0,6$ e $t = 0,605$	-0,025
Entre $t = 0,6$ e $t = 0,6005$	-0,0025

- b) A tendência observada nos valores obtidos acima corrobora a sua conjectura do item anterior? Explique.
- c) Calcule a taxa de variação média da função $h(t) = 2,1 + 6t - 5t^2$ entre os tempos $t = 1$ e $t = 1 + \alpha$, onde a variável α representa um número real próximo de zero. (A resposta ficará em função de α).
- d) À medida que o valor de α se aproxima de zero, o que se observa com o valor da taxa de variação média calculada no item anterior? O que esse valor significa no contexto do problema?

EXERCÍCIOS

- 1 Considere a função cujo gráfico está representado abaixo. Complete a tabela abaixo com as variações e as taxas de variação.



Intervalo $[a, b]$	Variação da função $\Delta f = f(b) - f(a)$	Variação média da função $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$[-1, 0]$		
$[0, 1]$		
$[1, 2]$		
$[-1, 1]$		
$[0, 2]$		
$[-1, 2]$		

- 2 (Velocidade Média) Se um objeto é arremessado para o alto a $20m/s$ a partir de uma altura de $6m$, sua altura S após t segundos é dada por

$$S(t) = 6 + 20t - 5t^2.$$

Qual é a velocidade média do objeto entre:

- a) 0 e 2 segundos.
- b) 2 e 4 segundos.

- 3 (Receita) A função que fornece a receita total em reais obtida com a venda de um determinado eletrodoméstico é

$$R(x) = 36x - 0,01x^2,$$

em que x é o número de unidades vendidas. Qual é a taxa da variação média da receita $R(x)$ à medida que x aumenta de 10 para 20 unidades?

- 4 (Demanda) Se a demanda por um produto p é dada pela função

$$D(p) = \frac{1000}{\sqrt{p}} - 1,$$

qual é a taxa de variação média da demanda quando p aumenta de

- a) 1 para 25?
- b) 25 para 100?

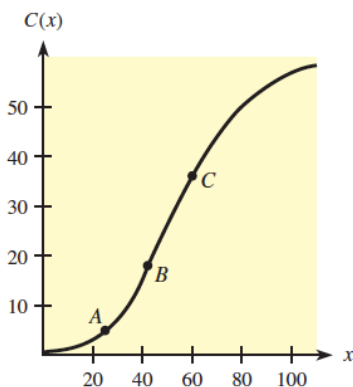
- 5 (Custo total) Suponha que o custo total em dólares para a produção de x impressoras seja dado pela função

$$C(x) = 0,0001x^3 + 0,005x^2 + 28x + 3000.$$

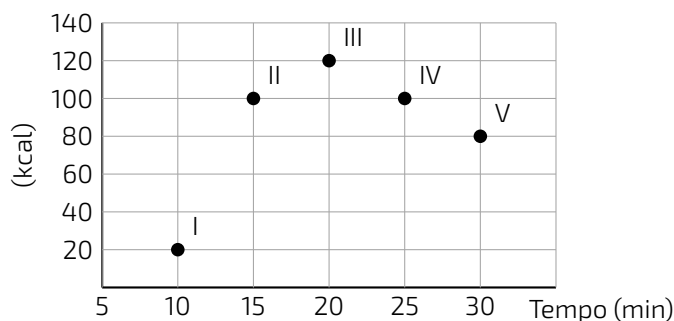
Encontre a taxa de variação média do custo total quando a produção varia:

- a) De 100 para 300 impressoras;
- b) De 300 para 600 impressoras.

- 6 A figura a seguir mostra o gráfico do custo total (em milhares de reais) em função da quantidade (em milhares de unidades) de um produto manufaturado por uma determinada companhia. Ordene, da menor para a maior, as taxas de variação médias do custo total de A para B , B para C e A para C .



- 7 (ENEM 2019) Os exercícios físicos são recomendados para o bom funcionamento do organismo, pois aceleram o metabolismo e, em consequência, elevam o consumo de calorias. No gráfico, estão registrados os valores calóricos, em kcal, gastos em cinco diferentes atividades físicas, em função do tempo dedicado às atividades, contado em minuto.

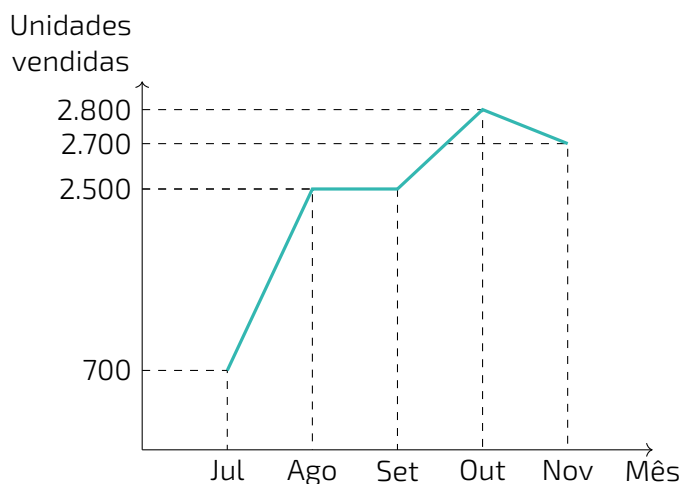


Qual dessas atividades físicas proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

8

(ENEM 2019) O gráfico a seguir mostra a evolução mensal das vendas de certo produto de julho a novembro de 2011.



Sabe-se que o mês de julho foi o pior momento da empresa em 2011 e que o número de unidades vendidas desse produto em dezembro de 2011 foi igual à média aritmética do número de unidades vendidas nos meses de julho a novembro do mesmo ano. O gerente de vendas disse, em uma reunião da diretoria, que, se essa redução no número de unidades vendidas de novembro para dezembro de 2011 se mantivesse constante nos meses subsequentes, as vendas só voltariam a ficar piores que julho de 2011 apenas no final de 2012. O diretor financeiro rebateu imediatamente esse argumento mostrando que, mantida a tendência, isso aconteceria já em

- a) Janeiro
- b) Fevereiro
- c) Março
- d) Abril
- e) Maio



Função Afim

O QUÊ?

Funções linear e afim e suas representações algébrica e gráfica, taxa de variação, proporcionalidade direta, funções afins de domínio discreto (Progressões Aritméticas), Aplicações.

POR QUÊ?

O modelo de variação constante é um dos modelos mais presentes em observações científicas e até mesmo em nosso cotidiano. Ele pode ser identificado por exemplo, em relações que modelam a compra/consumo e venda, o esvaziamento de um recipiente por um ralo em função do tempo ou na relação entre distância e tempo do “movimento uniforme” estudado pela Cinemática, entre tantos outros. Um caso particularmente importante é aquele em que há proporcionalidade entre as grandezas envolvidas na modelagem. As ideias desenvolvidas neste capítulo servem como base para aplicações em diversas áreas.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

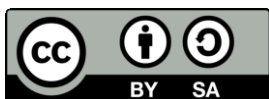
Versão digital do capítulo:

https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/AF107.html

Título:	Função Afim
Ano/ Versão:	2021 / versão 1.2 de 26 de julho de 2021
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autores:	Gladson Antunes (UNIRIO) Michel Cambrinha (UNIRIO) Bruno Vianna (Colégio Pedro II)
Revisão:	Cydara Ripoll Letícia Rangel
Design:	Andreza Moreira (Tangentes Design)
Diagramação:	Tarso Caldas
Ilustrações:	Miller Guglielmo
Gráficos:	Beatriz Cabral e Tarso Caldas
Capa:	Foto de Scott Webb no Unsplash https://unsplash.com/photos/fMUIVein7Ng

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



No capítulo de Funções, você foi apresentado ao conceito de função, uma relação entre duas grandezas que atende determinadas condições. Neste capítulo, pretendemos colocá-lo em contato com um dos modelos mais presentes em observações científicas e até mesmo em nosso cotidiano, o modelo de variação constante, aqui representado pelo conceito de função afim. Este modelo pode ser identificado por exemplo, em relações que modelam a compra/consumo e venda, o esvaziamento de um recipiente por um ralo em função do tempo ou na relação entre distância e tempo do "movimento uniforme" estudado pela Cinemática, entre tantos outros. Antes de estudarmos a função afim propriamente dita, vamos entender um de seus casos particulares, a função linear.

Começemos analisando os seguintes problemas:

	Um grupo de 5 músicos toca uma peça de música em 10 minutos. Outro grupo de 35 músicos toca a mesma peça. Em quanto tempo eles tocarão?
O melhor tempo de Antônio para correr os 100 metros rasos é 17 segundos. Em quanto tempo ele correrá 1 km?	
	Uma loja vende no mês de dezembro 320 cartões de Natal. Quantos cartões desses venderá nos meses de janeiro, fevereiro e abril, juntos?

Os três problemas acima fornecem três informações e propõem que, a partir delas, determinemos uma quarta informação. Esse é o enunciado típico de problemas cujo método de solução é conhecido como "regra de três". Entretanto, nenhum dos problemas apresentados, como você deve ter percebido, pode ser resolvido aplicando a tal regra. Você consegue imaginar por quê?

Isso se deve ao fato de que as grandezas relacionadas não são proporcionais entre si. Não é verdade que se 5 músicos tocam uma peça de música em 10 minutos, 35 músicos (que é 7×5) tocarão a peça em 7×10 minutos, afinal trata-se da mesma música, logo 35, 45 ou 179 músicos tocarão a tal peça nos mesmos 10 minutos. Isto é, o tempo de execução não é diretamente proporcional ao número de músicos que executam a música.

Teorema Diz-se que **duas grandezas são diretamente proporcionais** quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número real, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada pelo mesmo número, sem-

pre que os resultados dessas multiplicações fizerem sentido no contexto observado.

$$\begin{array}{ccc} X & \text{---} & Y \\ k \cdot X & \text{---} & k \cdot Y \end{array}$$

É muito comum encontrarmos situações no nosso dia a dia em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, e você certamente já resolveu muitos problemas, na escola e fora dela, usando a “regra de três”.

Na piscina

Atividade 1

Duas piscinas de 1000 litros cada estão sendo enchidas simultaneamente. A piscina 1 leva 5 horas para ficar completamente cheia e a piscina 2, 8 horas. A cada hora, o volume total de água em cada piscina foi sendo registrado em dois gráficos

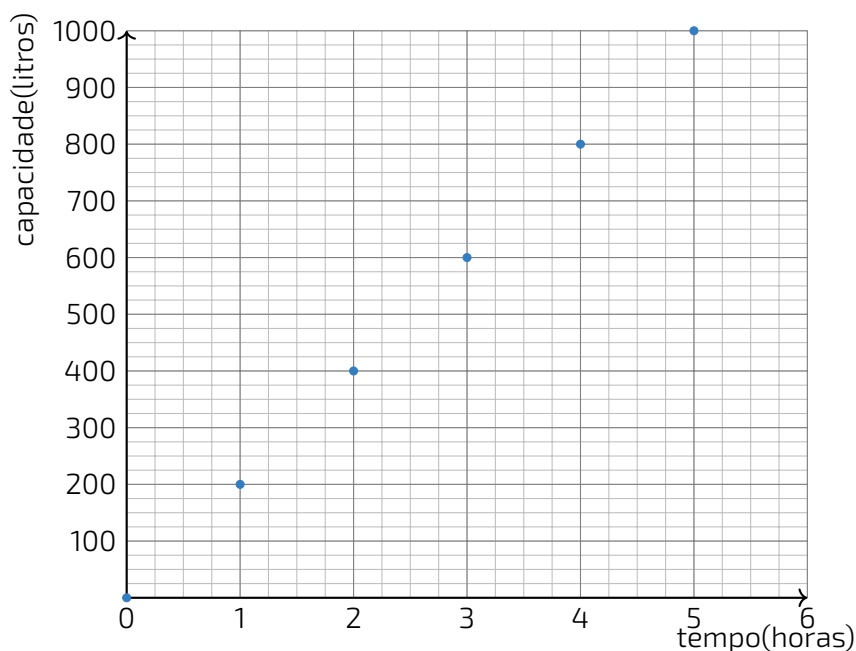


Figura 3.1: Piscina 1

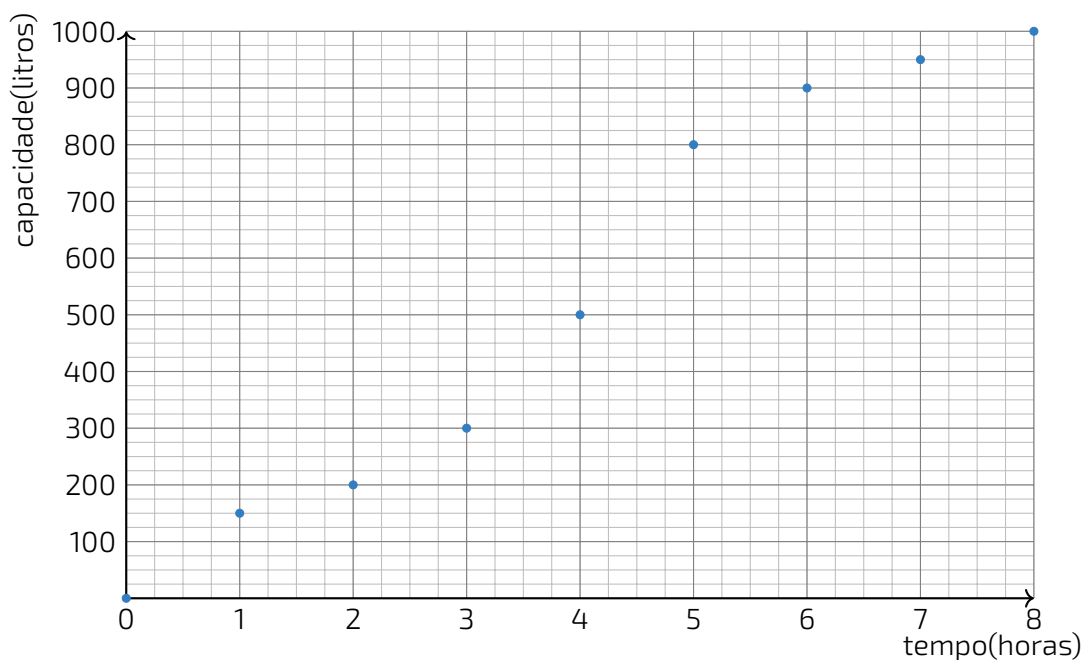


Figura 3.2: Piscina 2

- a) Construa uma tabela com os dados de cada gráfico.
- b) As grandezas volume total de água e tempo de enchimento da piscina 1 são diretamente proporcionais? Explique.
- c) As grandezas volume total de água e tempo de enchimento da piscina 2 são diretamente proporcionais? Explique.

PARA REFLETIR

Suponha que os dados numéricos fossem omitidos dos eixos nos dois gráficos. Ainda assim seria possível determinar a proporcionalidade ou não entre as grandezas? Como?

ORGANIZANDO FUNÇÃO LINEAR

Considere duas grandezas diretamente proporcionais que podem assumir quaisquer valores reais e vamos representá-las pelas letras x e y . Então, sempre que multiplicarmos x por qualquer número real k , o valor correspondente da grandeza y também fica multiplicado pelo mesmo valor. Isto é

$$\begin{array}{ccc} x & \text{——} & y \\ k \cdot x & \text{——} & k \cdot y \end{array}$$

Vamos agora, traduzir a propriedade acima para a linguagem de função. Consideremos que a grandeza y é expressa como função da grandeza x , isto é, $y = f(x)$. Vamos supor que quando a variável x vale 1, o valor correspondente de y é a , ou seja, $f(1) = a$. Assim, teremos

$$\begin{array}{ccc} x & \text{——} & f(x) \\ 1 & \text{——} & a \\ 2 & \text{——} & 2a \\ 3 & \text{——} & 3a \\ \vdots & \text{——} & \vdots \end{array}$$

Usando a "regra de três" nas duas primeiras linhas fica assim

$$\begin{array}{ccc} x & \text{——} & f(x) \\ 1 & \text{——} & a \end{array}$$

O que nos leva a

$$\frac{x}{1} = \frac{f(x)}{a} \Rightarrow f(x) = a \cdot x$$

Toda função real que pode ser expressa na forma $f(x) = ax$ para algum número real a , é chamada de **função linear**. Neste caso, as grandezas representadas pelas variáveis x e $y = f(x)$ são diretamente proporcionais. O número $a = f(1)$ é chamado de **constante de proporcionalidade** entre as grandezas.

Na Atividade Na piscina você deve ter percebido que as grandezas relacionadas eram diretamente proporcionais apenas no caso da piscina 1. Naquele caso, a função que fornece o volume de água na piscina em função do tempo é dada por $V : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, V(t) = V(1) \cdot t = 200 \cdot t$.

PARA REFLETIR

Suponha que duas grandezas x e y se relacionem de maneira que y seja uma função linear de x .

- Essas duas grandezas são proporcionais?
- Podemos afirmar também que x é uma função linear de y ?

PRATICANDO FUNÇÃO LINEAR

Taxa de câmbio

Atividade 2

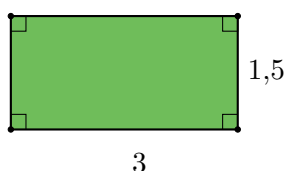
Segundo o [site do Banco Central do Brasil](#), a *taxa de câmbio* é o preço de uma moeda estrangeira medido em unidades ou frações (centavos) da moeda nacional. Em um determinado dia as taxas de câmbio do dólar americano e do euro eram respectivamente R\$ 3,20 e R\$ 4,00.

- a) Nesse mesmo dia você deseja comprar 100 dólares. Qual seria o valor em reais necessário para realizar essa compra?
- b) Para adquirir nesse mesmo dia 200 euros, qual o valor em reais deverá ser desembolsado?
- c) A partir da taxa praticada nesse dia, apresente uma função que converta dólar americano para reais. Qual o conjunto domínio mais adequado a ser considerado para essa função? Justifique.
- d) Com a taxa de câmbio que está sendo praticada nesse dia, quantos dólares americanos podem ser comprados com R\$ 2000,00. Com os mesmos R\$ 2000,00, quantos euros podem ser adquiridos?

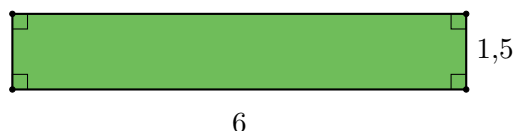
Proporcionalidade na construção de retângulos

Atividade 3

Considere o retângulo R abaixo, de lados 3 e 1,5, e responda as questões propostas.



- a) Observe o retângulo da figura a seguir e determine se ele é semelhante ou não ao retângulo R .



- b) Na figura a seguir temos a medida base de um retângulo em destaque, qual deve ser a medida de sua altura para que o retângulo gerado seja semelhante a R ? Qual a função linear que relaciona esses dois retângulos?



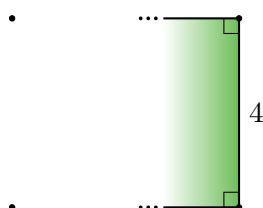
6

- c) Seguindo a mesma ideia do item anterior, qual deve ser a medida da altura desse novo retângulo de base 5, para que ele seja semelhante a R ? E neste caso, qual a função linear entre os retângulos?



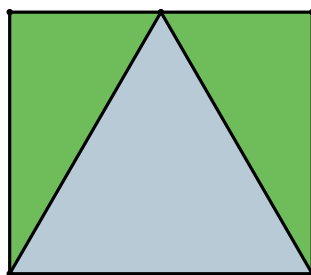
5

- d) Já na figura a seguir, apresentamos um retângulo de altura 4, qual deve ser a medida da base desse novo retângulo, para que ele seja semelhante a R ?



4

- e) Na figura a seguir, apresentamos um retângulo cuja base tem a mesma medida da base de R (igual a 3), e cuja altura coincide com a de um triângulo equilátero de lado medindo 3. Esse retângulo é semelhante a R ?



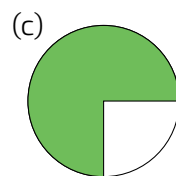
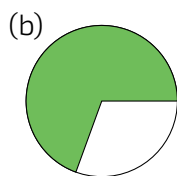
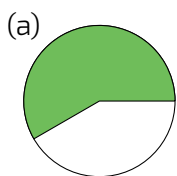
3

- f) Se utilizarmos a altura do retângulo da figura anterior na construção de um novo retângulo, qual deve ser a medida de sua base para que seja semelhante a R ?

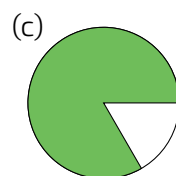
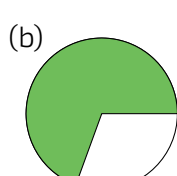
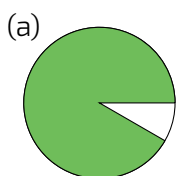
Caso tenha disponibilidade, sugerimos o uso da construção GeoGebra disponível [neste link](#), que é a versão eletrônica dessa atividade.



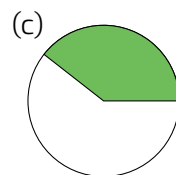
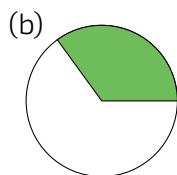
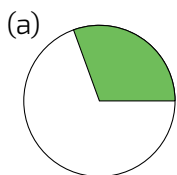
- a) Cada círculo representado a seguir tem área total 20. Um dos setores circulares destacados em verde nesses círculos tem área 14. Qual é esse setor?



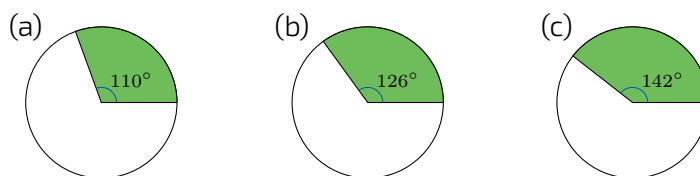
- b) Agora, um dos setores circulares em verde tem área 18. Qual é esse setor?



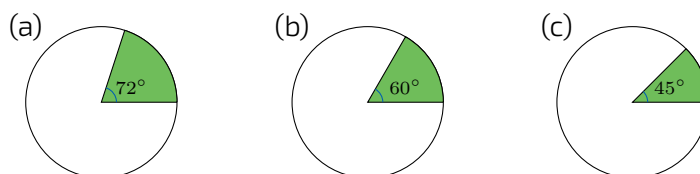
- c) Explique a estratégia matemática que você utilizou para resolver os itens anteriores? Dentre os setores circulares apresentados a seguir, um deles tem área 7. Aplique sua estratégia para determinar qual é esse setor.



- d) Possivelmente você encontrou alguma dificuldade para determinar a resposta correta no item anterior. Que tal acrescentarmos uma informação a mais para ajudar na decisão?



- e) E agora? Como você usou a medida do ângulo que determina o setor circular para ajudar no cálculo da área? Vamos fazer mais uma vez! Um dos setores apresentados a seguir tem área 4. Determine esse setor.

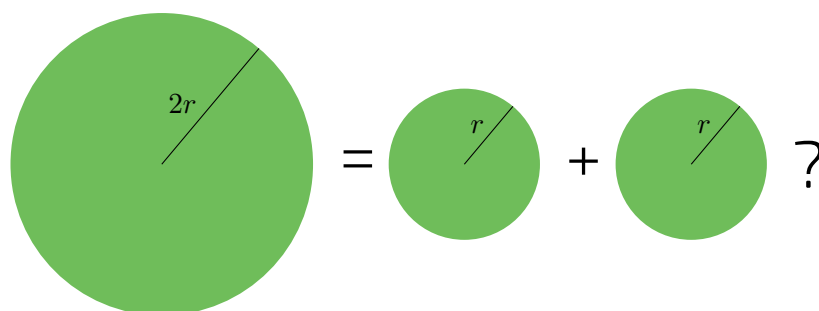


- f) Determine a função que relaciona a área do setor circular com o seu ângulo central, especificando seu domínio.

PARA REFLETIR

Em uma circunferência, podemos relacionar a área A e o raio r por meio da função $A(r) = \pi r^2$. Aumentando o raio da circunferência, sua área também aumenta. Isso nos indica que a função A é crescente. Reflita um pouco e responda: Essa função é linear? Ou seja, a área de um círculo é proporcional ao seu raio?

Pense no seguinte caso: A área de um círculo de raio $2r$ é igual ao dobro da área de um círculo de raio r ? Ou ainda, é possível encontrar um número real (fixo) tal que $A(r) = k \cdot r$?



EXPLORANDO TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Teor de álcool sanguíneo

Atividade 5

De acordo com o site [wikiHow](https://www.wikihow.com/Calcula-Teor-Alcoólico-Sanguíneo) o Teor Alcoólico Sanguíneo, ou TAS, é a medida da proporção de álcool no sangue de uma pessoa. Um TAS de 0,08 indica que há 80 mg de álcool por 100 ml de sangue. O álcool é absorvido de forma diferente pelos homens e pelas mulheres. O corpo masculino geralmente tem mais água (61% *versus* 52%) e, portanto, dilui melhor o álcool, gerando TAS mais baixos.

O TAS é proporcional ao número de doses de bebida consumidas, de maneira que para um homem de 75 kg, a função linear $h(x)$ que relaciona o TAS com o número de doses x de bebida é dada pela expressão

$$h(x) = 0,0205 \cdot x.$$

Para uma mulher que pesa 60 kg, a mesma relação é dada pela função linear

$$m(x) = 0,0307 \cdot x.$$

- a) Complete a tabela a seguir que relaciona os valores de $h(x)$ e de $m(x)$ correspondentes a valores inteiros de x , de 0 a 5.

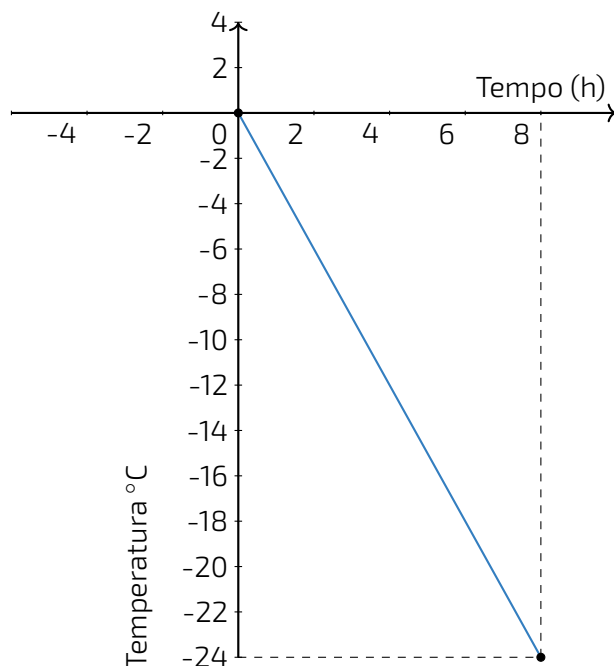
x	$h(x)$	$m(x)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		

- b) Calcule, para a função $h(x)$, as taxas de variação médias nos seguintes intervalos de valores de x :
- i) entre $x = 0$ e $x = 1$;
 - ii) entre $x = 1$ e $x = 3$;
 - iii) entre $x = 2$ e $x = 5$;
- c) Repita o item anterior para a função $m(x)$ nos intervalos:
- i) entre $x = 2$ e $x = 3$;
 - ii) entre $x = 1$ e $x = 4$;
 - iii) entre $x = 0$ e $x = 5$;
- d) A partir dos itens anteriores, faça uma conjectura sobre as taxas de variação médias de uma função linear qualquer.

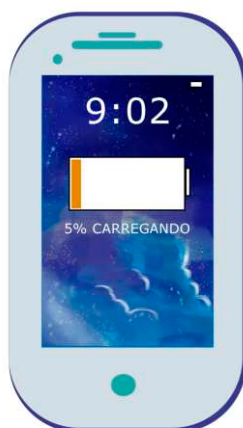
Câmara frigorífica

Atividade 6

Uma câmara frigorífica está programada para diminuir sua temperatura segundo uma taxa constante em $^{\circ}\text{C}$ por hora. Na primeira observação constata-se que ela está a 0°C . Após 8 horas, realiza-se uma nova observação e seu visor mostra a temperatura de -24° e também o seguinte gráfico para a evolução da temperatura em função do tempo.



- Qual a temperatura da câmara 1 hora após a primeira observação? E 5 horas após a primeira observação? E t horas após a primeira observação?
- Qual o valor da taxa (de variação média) constante segundo a qual a temperatura diminui?
- Determine a função que relaciona temperatura e tempo nesse contexto, considerando para seu domínio o intervalo de números reais $[0, 8]$. Ela é uma função crescente ou decrescente? Por que?
- Como seria o gráfico se a temperatura, no mesmo intervalo de tempo, ao invés de diminuir, estivesse aumentando $1,5^{\circ}\text{C/h}$? Qual seria a expressão da função, nesse caso? Teríamos uma função crescente ou decrescente? Por que?
- Complete as lacunas da sentença abaixo para formular uma conjectura que relacione a taxa de variação média da função linear com o crescimento ou decréscimo da função.
 "Quando a taxa de variação média de uma função linear é um número real _____, a função é _____ e quando a taxa é um número real _____, a função é _____."



O tempo total de recarga da bateria (de 0% a 100%) de um determinado modelo de telefone celular é de 2 horas e 5 minutos. Supondo que o carregamento ocorre segundo uma taxa constante:

- Faça uma tabela que forneça o percentual de carga na bateria a cada 25 minutos, a partir de zero.
- Represente em um plano cartesiano os pontos da tabela do item anterior.
- Descreva uma estratégia que permita, a partir da representação gráfica obtida no item anterior, determinar o percentual de carga na bateria após 40 minutos de carregamento.
- Determine a função que modela o carregamento desse modelo de telefone, especificando seus domínio e conjunto imagem.
- Qual é a taxa de carregamento desse modelo de telefone celular.

ORGANIZANDO TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

No capítulo de Taxa de variação, você aprendeu a calcular a taxa de variação média de uma função em um determinado intervalo. É um número expresso em forma de uma razão que fornece diversas informações sobre o comportamento da função no intervalo considerado.

Relembrando, se um intervalo $[x_1, x_2]$ está contido no domínio de uma função f , então a taxa de variação média dessa função nesse intervalo é a razão

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como você deve ter percebido na Atividade Teor de álcool sanguíneo, o valor obtido para as taxas de variação médias nos diversos intervalos foi sempre o mesmo para cada função considerada. Essa é uma propriedade importante das funções lineares, que provaremos agora.

Considere uma função linear $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\ell(x) = a \cdot x$, e também dois números reais distintos $x_1 < x_2$. A taxa de variação média de ℓ no intervalo $[x_1, x_2]$ pode ser calculada assim

$$\frac{\ell(x_2) - \ell(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Podemos destacar duas coisas sobre a conclusão deste último cálculo:

- o valor final para a taxa de variação média não depende dos valores de x_1 e x_2 . Isso significa que podemos escolher qualquer intervalo de números reais e chegaremos ao mesmo resultado.
- o resultado coincide com o coeficiente de x na expressão da função, e também pode ser obtido calculando-se a imagem de $x = 1$. Sendo assim, podemos afirmar que a função $y = 7x$ tem taxa de variação média constante igual a 7, enquanto que a função $y = -\frac{3x}{5}$ tem taxa de variação média constante igual a $-\frac{3}{5}$.

Teorema Toda função linear f tem taxa de variação média constante igual a $f(1)$, e pode ser representada pela expressão $f(x) = f(1) \cdot x$.

PARA REFLETIR

É verdade que se uma função tem taxa de variação média constante então ela é uma função linear? Pense em exemplos com taxas de variação médias constantes e verifique se há ou não proporcionalidade nesses casos.

Usando essas ideias no contexto da Atividade Câmara frigorífica, podemos afirmar que a expressão da temperatura em função do tempo, mostrada pelo gráfico pode ser dada por $f(t) = -3t$, uma vez que $f(1) = -3$. A cada hora a temperatura decresce 3°C , gerando portanto uma função decrescente.

De uma maneira geral, se a taxa de variação média a de uma função linear é um número real **negativo**, então essa função é decrescente, pois, para $a < 0$

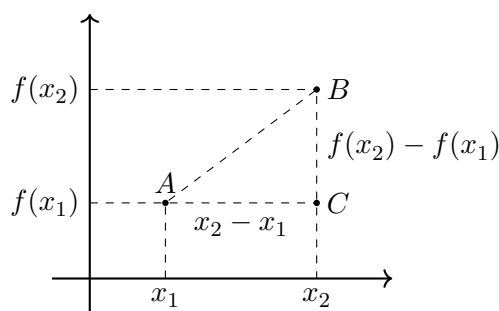
$$x_1 < x_2 \iff ax_1 > ax_2 \iff f(x_1) > f(x_2).$$

Por outro lado, se a taxa de variação média a de uma função linear é um número real **positivo**, então essa função é crescente, pois, nesse caso $a > 0$ e

$$x_1 < x_2 \iff ax_1 < ax_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

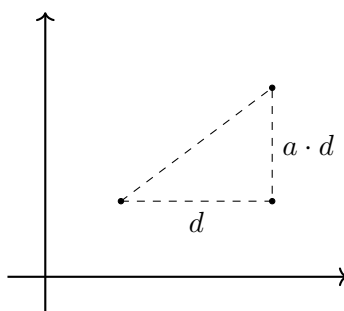
Vamos agora entender como é a representação gráfica de uma função com taxa de variação média constante. Para isso, consideremos uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha essa propriedade, isto é, para qualquer intervalo a taxa de variação média de f neste intervalo é igual a a .

Na figura a seguir, os pontos $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ pertencem ao gráfico da função f . O segmento BC mede $f(x_2) - f(x_1)$ e o segmento AC mede $x_2 - x_1$. Dessa forma o quociente $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ é igual à taxa de variação média da função nesse intervalo, e portanto podemos concluir que $\overline{BC} = a \cdot \overline{AC}$.

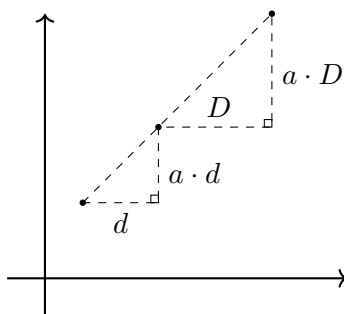


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \implies \overline{BC} = a \cdot \overline{AC}.$$

Por isso, quaisquer dois pontos do gráfico de f , sempre serão extremidades da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são paralelos aos eixos e suas medidas se relacionam conforme a seguinte figura.



Consideremos agora três pontos do gráfico de f com os respectivos triângulos retângulos da construção anterior.



Como os triângulos são semelhantes e têm um ponto em comum, podemos concluir que os três pontos pertencem a uma mesma reta. A conclusão é válida quaisquer que sejam os três pontos considerados, logo acabamos de justificar a seguinte propriedade.

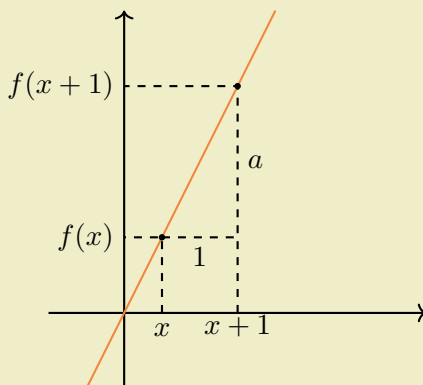
Teorema Se uma função tem taxa de variação média constante então seu gráfico está contido em uma reta.

Em particular, como a função linear tem taxa de variação média constante, seu gráfico está contido em uma reta.

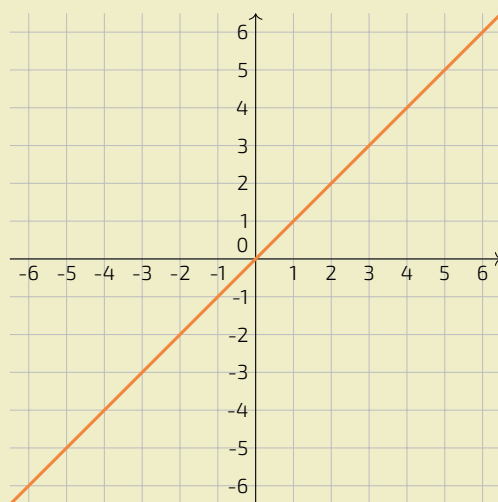
Algumas propriedades da função linear

- Sempre que fizer sentido calcular a imagem de $x = 0$, teremos $f(0) = a \cdot 0 = 0$, isto é, a origem $(0, 0)$ do plano cartesiano pertencerá ao gráfico de f . Em qualquer caso, o gráfico de uma função linear está contido em uma reta que passa pela origem (mesmo quando não fizer sentido calcular a imagem de $x = 0$).
- A taxa de variação da função linear $f(x) = ax$ também pode ser calculada fazendo-se a diferença entre as imagens de dois valores que distam 1 entre si da seguinte maneira:

$$f(x+1) - f(x) = a(x+1) - ax = ax + a - ax = a$$



- A função linear $f(x) = x$ é chamada **função identidade**.



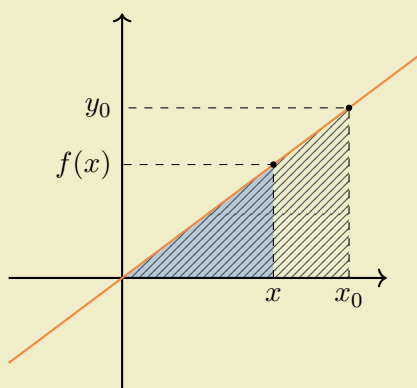
Para uma visualização do comportamento da representação gráfica com taxa de variação média também negativa, sugerimos o uso da construção GeoGebra disponível [neste link](#).



- Se uma reta contém a origem do plano cartesiano e o ponto (x_0, y_0) com $x_0 \neq 0$, então ela é o gráfico da função linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax$, em que $a = \frac{y_0}{x_0}$.

Para verificar isso, basta observarmos uma reta nas condições dadas e os dois triângulos retângulos destacados da figura a seguir a partir da origem e dos pontos (x_0, y_0) e (x, y) . Observe que, qualquer que seja o ponto (x, y) escolhido diferente da origem, esses triângulos são semelhantes, portanto,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{y_0}{x_0} \implies f(x) = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$$



Assim, por exemplo, a reta que contém a origem e o ponto $(3, 8)$ é o gráfico da função $f(x) = \frac{8}{3}x$. Se a reta contém a origem e o ponto $(-5, 2)$ ela será o gráfico da função $g(x) = \frac{2}{-5}x = -\frac{2}{5}x$.

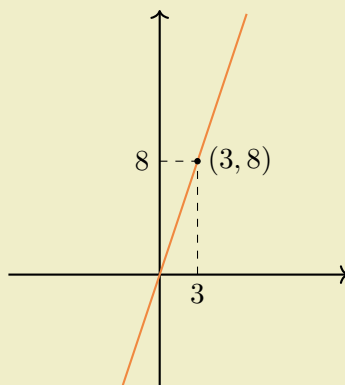


Gráfico da função $f(x) = \frac{8}{3}x$

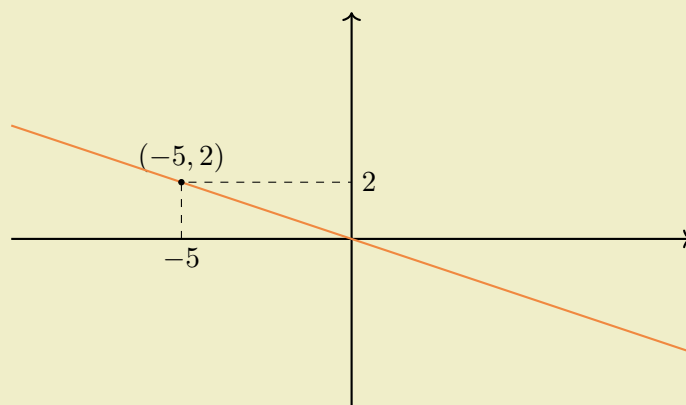


Gráfico da função $g(x) = -\frac{2}{5}x$.

Concluimos, assim, que toda reta não vertical que contém a origem é o gráfico de uma função linear.

PRATICANDO TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Quando trocar o filtro do purificador?

Atividade 8

Há 1 ano você adquiriu um purificador de água com capacidade de refrigeração, e deseja saber quanto tempo falta para realizar a troca do filtro interno. No manual do fabricante do seu purificador, você encontra o seguinte quadro:

	FIT	FLAT	PLUS	SLIM	STAR
Dimensões					
Altura	27cm	29cm	40cm	36cm	40cm
Largura	29cm	36cm	30cm	25cm	30cm
Profundidade	36cm	36cm	45cm	41cm	36cm
Peso bruto	13kg	12kg	14kg	13kg	13kg
Capacidade de refrigeração com ambiente a 32°C e água a 27°C	1,1 litros/hora (atende até 15 pessoas)	1,5 litros/hora (atende até 10 pessoas)	4,4 litros/hora (atende até 30 pessoas)	1,5 litros/hora (atende até 10 pessoas)	2,2 litros/hora (atende até 15 pessoas)
Capacidade de armazenamento de água gelada	1,2 litros	1.5 litros	2 litros	1.5 litros	2 litros
Gás refrigerante	R134a	R134a	R134a	R134a	R134a
Carga de gás	36g	32g	32g	32g	36g
Tensão	127V ou 220V-60Hz	127V ou 220V-60Hz	127V ou 220V-60Hz	127V ou 220V-60Hz	127V ou 220V-60Hz
Potência	100W	100W	100W	100W	100W
Pressão nominal	0,196MPa (30 metros de coluna de água)				
Temperatura min/max de rede hidráulica	0,29MPa a 0,392MPa (3 a 40 metros de coluna de água)				
Temperatura min/max de trabalho	5°C a 42°C				
Vazão elemento filtrante	4.000 litros				

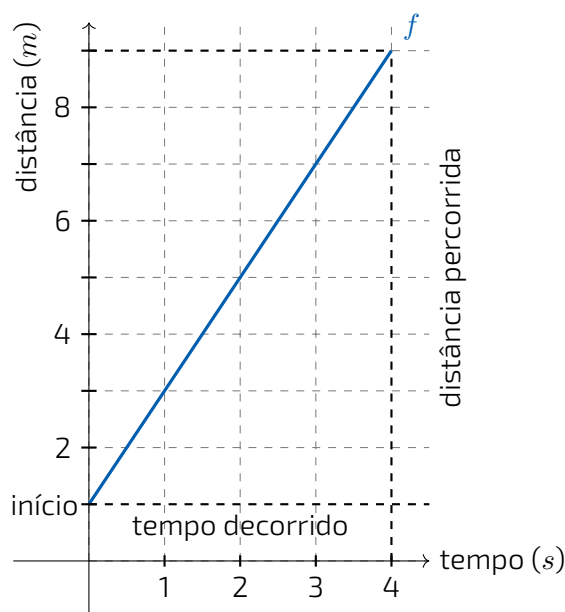
Vazão máxima recomendada	0,75 litros/minuto				
Volume interno do aparelho	1,6 litros	2 litros	2,5 litros	2 litros	2,5 litros
Volume de referência para ensio de particulado	4.000 litros				

- a) Quais informações do quadro são relevantes para responder à sua dúvida?
- b) Explique com suas palavras o significado da vazão 0,75 litros/minuto.
- c) Para calcular a vida útil do seu filtro interno, é necessário estimar a quantidade de água consumida diariamente na sua casa. Suponha, então, que você observou que o purificador é acionado ao longo de um dia o equivalente ao tempo total de 12 minutos. Quantos litros de água são consumidos em um dia, nessas condições? (assuma que o purificador foi regulado para funcionar com a vazão máxima recomendada pelo fabricante)
- d) Assumindo que o consumo estimado no item anterior seja o mesmo para todos os dias, qual foi o consumo de água do purificador ao final do primeiro dia de uso? E entre o 10º e o 11º dias de uso?
- e) Qual o aumento do consumo de água observado para cada dia de uso do purificador?
- f) Calcule a vida útil do filtro interno do seu aparelho e, supondo que você tenha utilizado o seu purificador todos os dias desde a instalação, determine em quanto tempo você deverá solicitar a troca do seu filtro interno.
- g) Com base nas informações que você possui, encontre uma expressão matemática que relacione o consumo de água do purificador em função do tempo de uso em dias e represente-a graficamente.

Distância x tempo

Atividade 9

O gráfico a seguir mostra a variação da distância a um ponto de referência de uma pessoa que caminha em linha reta durante 4 segundos. Algumas informações sobre o movimento podem ser extraídas diretamente dessa representação gráfica.



- a) A que distância do ponto de referência estava a pessoa no início da contagem do tempo? E ao final de 4 segundos?
- b) Qual a distância total percorrida?
- c) É possível saber se ele está se afastando ou se aproximando do ponto de referência? Como?
- d) Qual a velocidade média da pessoa no intervalo de tempo de 0 a 4 segundos?
- e) A que distância a pessoa estava do ponto de referência após 1 segundo do início da caminhada? Qual a distância percorrida por ela nesse intervalo de tempo?
- f) Qual a distância percorrida pela pessoa entre 1 e 2 segundos? E entre 3 e 4 segundos?
- g) O que se pode concluir, a partir das suas respostas nos itens (e) e (f), sobre a variação da distância percorrida a cada minuto de caminhada?
- h) As grandezas relacionadas pelo gráfico são proporcionais? Porque?

ORGANIZANDO FUNÇÃO AFIM

O gráfico da atividade [distância x tempo](#) apresenta a distância até o ponto de referência como uma função do tempo. Como a ação acontece no intervalo de tempo de 0 a 4 segundos, podemos modelar essa relação com uma função f cujo domínio é o intervalo $[0, 4]$, isto é, $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos juntos determinar uma expressão para f ?

Apesar do gráfico ser um segmento de reta, f não pode ser uma função linear, pois a reta não contém a origem do plano cartesiano. Como no início da contagem do tempo a pessoa estava na posição 1, devemos ter $f(0) = 1$. Em particular, as grandezas posição e tempo, nesse caso, não são proporcionais.

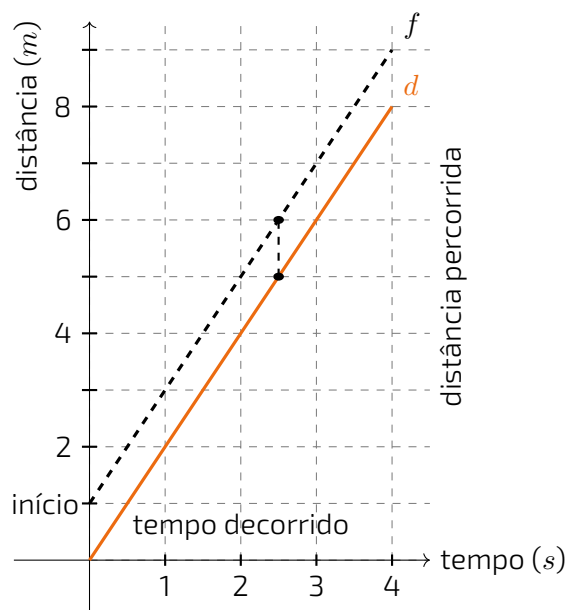
Vamos considerar, como na atividade, a relação de outra grandeza com o tempo: a distância percorrida do início até o instante t . Nesse caso temos proporcionalidade e vamos ver por quê.

Para facilitar a discussão, chamemos essa função de $d(t)$. Seu domínio coincide com o domínio de f e podemos dizer que $d(t)$ é a distância percorrida no intervalo de tempo $[0, t]$. Por exemplo, como fazemos para calcular $d(2)$? Basta saber em que posições a pessoa estava nos tempos $t = 0$ e $t = 2$ e fazer a diferença. Neste caso $d(2) = f(2) - f(0) = 5 - 1 = 4$. Isso nos dá a dica de como calcular $d(t)$ para qualquer $t \in [0, 4]$.

t	$d(t)$
0	$1 - 1 = 0$
1	$3 - 1 = 2$
2	$5 - 1 = 4$
3	$7 - 1 = 6$
4	$9 - 1 = 8$

$$d(t) = f(t) - f(0) \implies d(t) = f(t) - 1.$$

Por causa dessa última relação, o gráfico de d será exatamente igual ao gráfico de f , deslocado uma unidade para baixo. Ou seja, uma reta paralela a que é o gráfico de f e que passa pela origem. Conclusão, $d(t)$ é uma função linear, e, como $d(1) = 2$, podemos afirmar que $d(t) = 2t$.



Pelo que tínhamos visto, $d(t) = f(t) - 1$, o que nos leva à expressão

$$f(t) = 2t + 1$$

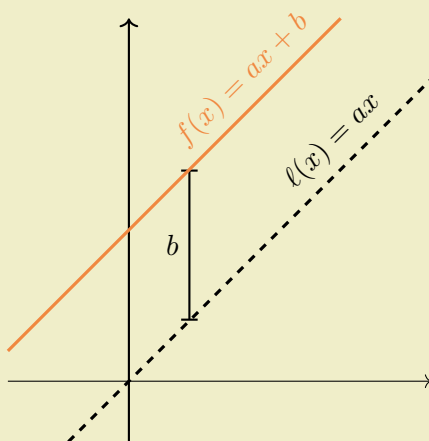
Chamamos qualquer função que pode ser escrita dessa forma de uma **função afim**, isto é, toda função real que pode ser escrita da forma

$$f(x) = ax + b$$

para quaisquer números reais $a \neq 0$ e b . O gráfico de uma função afim é sempre uma reta, paralela à reta gráfico da função linear $\ell(x) = ax$ deslocada b unidades na vertical.

O número a é a **taxa de variação média** da função afim f (e da função linear também) em qualquer intervalo.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$



EXEMPLO 1

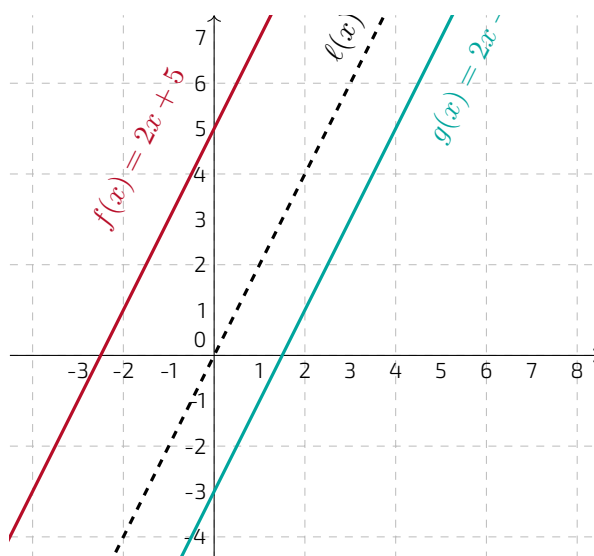


Figura 3.3: Exemplos: $\ell(x) = 2x$, $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = 2x - 3$

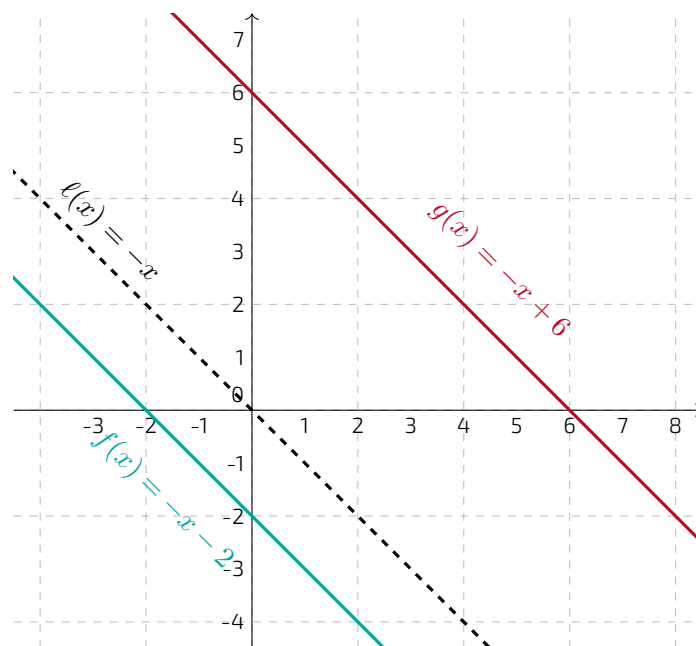


Figura 3.4: Exemplos: $\ell(x) = -x$, $f(x) = -x - 2$ e $g(x) = -x + 6$

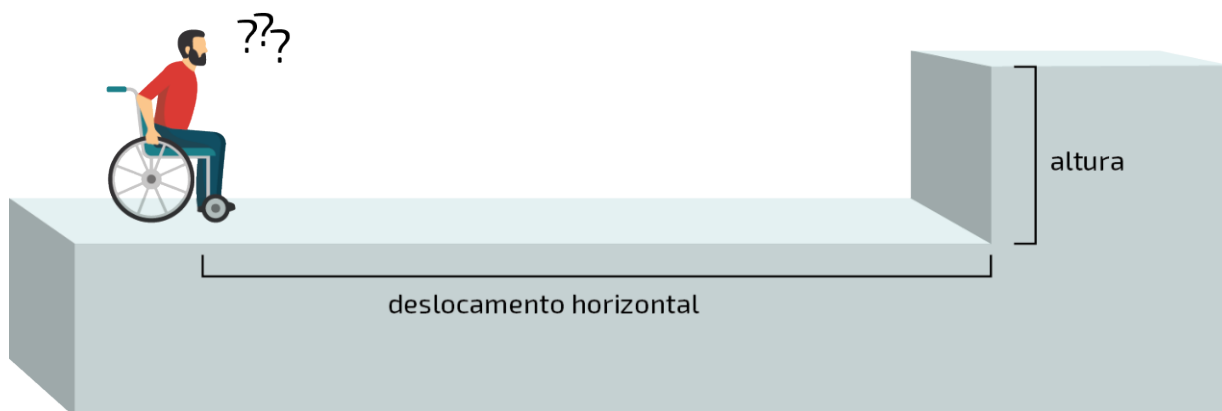
A inclinação de uma reta e a taxa de variação média



Figura 3.5: Flickr: [Palácio do Planalto, Brasília, Brasil](#)

Em muitas construções, quando se deseja fazer o acesso entre dois espaços que estão em níveis diferentes, usa-se a rampa como recurso. A rampa é uma superfície, em geral plana, que liga dois níveis diferentes. Uma característica importante de uma rampa é a sua inclinação (ou declive). Rampas muito íngremes podem se tornar obstáculos intransponíveis para cadeirantes, por exemplo. Como medir, então, a inclinação de uma rampa? A inclinação de uma rampa é o número obtido quando dividimos a altura (diferença entre os níveis) pelo deslocamento horizontal

$$\text{inclinação} = \frac{\text{altura}}{\text{deslocamento horizontal}}$$



Uma rampa que tem o deslocamento horizontal muito menor que a altura, terá pela fórmula uma inclinação grande, enquanto uma rampa em que o deslocamento horizontal é bem maior que a altura, terá uma inclinação pequena. Rampas de inclinação pequena são as mais desejáveis.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) tem normas para a construção de rampas (a NBR 9050:2015 que pode ser acessada [neste link](#)) que contém o seguinte artigo:

6.6.2.1 As rampas devem ter inclinação de acordo com os limites estabelecidos na Tabela. Para inclinação entre 6,25% e 8,33% é recomendado criar áreas de descanso (6.5.) nos patamares, a cada 50m de percurso. Excetuam-se deste requisito as rampas citadas em 10.4 (plateia e palcos), 10.12 (piscinas) e 10.14 (praias).

Desníveis máximos de cada segmento de rampa h	Inclinação admissível em cada segmento de rampa i	Número máximo de segmentos de rampa
1,50	5,00(1 : 20)	Sem limite
1,00	$5,00(1 : 20) < i \leq 6,25(1 : 16)$	Sem limite
0,80	$6,25(1 : 16) < i \leq 8,33(1 : 12)$	15

Por exemplo, para uma rampa ter inclinação 5%(1 : 20) ela precisa de 20 metros de deslocamento horizontal para cada metro de subida, ou dito de outra forma, para cada metro de deslocamento horizontal, a rampa "sobe" 0,05 metros. Veja se as rampas ilustradas abaixo estão dentro das especificações da ABNT.

Da mesma forma, a inclinação de uma reta é a medida do quão íngreme ela é em relação ao sistema de coordenadas onde ela está inserida. Dada uma reta em um plano cartesiano, para determinarmos sua inclinação basta fazer a divisão entre a variação das ordenadas e a variação das abscissas para quaisquer dois pontos da reta

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

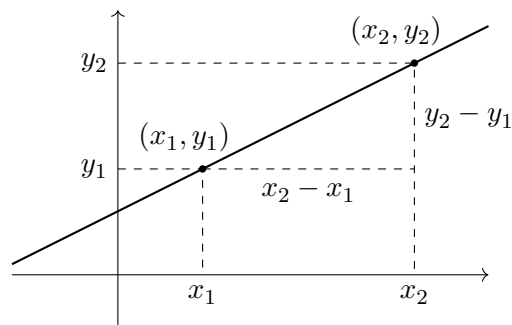


Figura 3.6: Inclinação de uma reta

Por exemplo, a reta que contém os pontos $(1, 2)$ e $(5, 7)$ tem inclinação $\frac{7-2}{5-1} = \frac{5}{4}$, enquanto a reta que contém os pontos $(-1, 3)$ e $(2, -6)$ tem inclinação $\frac{-6-3}{2-(-1)} = \frac{-9}{3} = -3$.

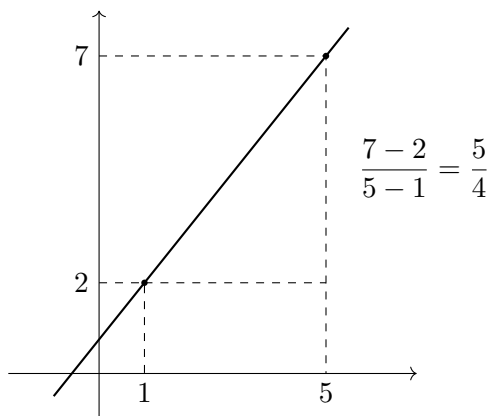


Figura 3.7: Inclinação da reta que contém os pontos $(1, 2)$ e $(5, 7)$

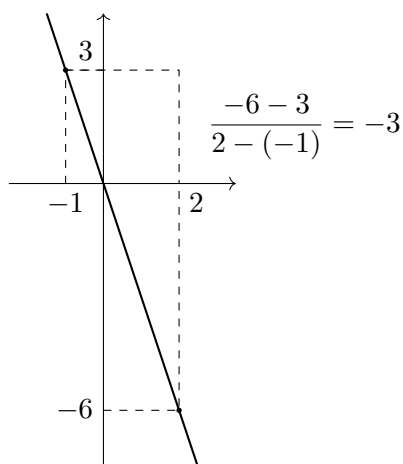


Figura 3.8: Inclinação da reta que contém os pontos $(-1, 3)$ e $(2, -6)$

Se considerarmos uma reta no plano e a função afim f que a tem como gráfico, a inclinação da reta coincide com a taxa de variação da função f .

Por exemplo, a reta da [Figura 3.7](#) acima é o gráfico da função afim $f(x) = \frac{5}{4}x + b$. Para determinarmos o valor de b , basta substituírmos um dos pontos que estão sobre a reta. Como $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f , podemos afirmar que $f(1) = 2$, logo

$$2 = \frac{5}{4} \cdot 1 + b \implies b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Isto é, a função f é dada pela expressão $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$.

Já a reta da [Figura 3.8](#) tem expressão $f(x) = -3x$.

Retas horizontais não possuem inclinação, de fato não há deslocamento vertical quando nos deslocamos horizontalmente sobre a reta, ou seja, sua inclinação será igual a zero.

PRATICANDO FUNÇÃO AFIM

Antecipando o pagamento de uma dívida

Atividade 10

O cliente de um banco foi à sua agência de relacionamento para negociar a antecipação de uma dívida no valor de R\$ 5.000,00, que venceria no prazo de 8 meses. Lá, foi informado pelo gerente que a modalidade praticada era a de desconto comercial, no qual o valor a ser descontado é calculado a partir do valor da dívida e é proporcional ao tempo de antecipação. Para o caso em questão, o gerente gerou a seguinte quadro:

Antecipação (meses)	0	1	2	3	4
Valor a pagar (R\$)	5.000	4.750	4.500	4.250	4.000

- Observando o padrão de desconto, complete a tabela até o 8º mês de antecipação.
- Descreva a variação sofrida pelo valor a pagar à medida que aumenta o tempo de antecipação. O que se pode afirmar sobre a variação observada no valor a pagar entre dois meses consecutivos?
- Descreva a variação sofrida pelo valor do desconto à medida que aumenta o tempo de antecipação. O que se pode afirmar sobre a variação observada no valor de desconto entre dois meses consecutivos?
- Qual é, então, a taxa mensal de desconto comercial praticada pelo banco?
- No plano cartesiano a seguir estão representados os pares ordenados $(n, D(n))$ em que n é o tempo de antecipação e $D(n)$ o valor do desconto correspondente. Represente nele os pontos que correspondem aos pares ordenados $(n, V(n))$ em que $V(n)$ é o valor a pagar no tempo n .

Abastecendo a caixa

Atividade 11

Uma caixa de água é abastecida por uma torneira cujo fluxo de água é constante e igual a 10 litros por minuto e, simultaneamente, seu conteúdo escoar, por um ralo, cujo fluxo de água é controlado à razão constante de 15 litros por minuto. Em certo instante, o volume de água dentro da caixa é de 100 litros, estando a torneira e o ralo ambos abertos.

- Sendo $V(t)$ o volume de água na caixa após t minutos do instante citado. Exiba uma sentença matemática para $V(t)$.
- Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes ao volume de água na caixa.

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	10	20
Volume (litros)		4						

- c) À medida que os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da caixa?
- d) Quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ a $t = 2$, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa? E quando estes valores aumentam de $t = 12$ a $t = 13$?
- e) Quando os valores do tempo aumentam em uma unidade, a partir de um instante qualquer, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

Temperatura Controlada

Atividade 12

Num laboratório, um químico conseguiu controlar a variação de temperatura de dois compostos. A variação de ambos está associada às funções afins f e g , de maneira que a taxa de variação das temperaturas de cada um dos compostos seja constante. Observe o gráfico, onde o eixo das ordenadas indica a temperatura (em graus Celsius) de cada composto em função do tempo t , em minutos. O gráfico da figura a seguir modela a situação:

O gráfico da função f passa pelos pontos $A = (0, -4)$ e $B = (4, 0)$, indicando que o composto associado à f está com uma temperatura de -4°C no início da medição e após 4 minutos a temperatura atinge 0°C .

O gráfico da função g passa pelos pontos $C = (0, 2)$ e $D = (2, 0)$, indicando que o composto associado à g está com uma temperatura de 2°C no início da medição e após 2 minutos a temperatura atinge 0°C .

Com base nas informações do texto responda as perguntas a seguir:

- a) Determine as expressões das funções afins f e g .
- b) A temperatura do composto associado à função f estão aumentando ou diminuindo? E do composto associado à função g ?
- c) Em quanto tempo cada composto atinge a temperatura de
 - i) 1°C ?
 - ii) -3°C ?
 - iii) -8°C ?
 - iv) 10°C ?
- d) Após quantos minutos os dois compostos terão a mesma temperatura? E que temperatura é essa?

Frio nas alturas

Atividade 13

Mesmo em pleno verão um avião, precisa lidar com temperaturas muito baixas. Quando uma aeronave opera em baixas temperaturas, com umidade presente, há a possibilidade de formação de gelo que virá a se acumular na sua estrutura ou em seu grupo moto-propulsor. O gelo se forma quando um avião voa através de uma nuvem ou de um ambiente contendo gotículas de água super-resfriadas. O principal problema causado pela formação de gelo é a modificação do fluxo de ar sobre as superfícies das asas, prejudicando assim o desempenho da nave e acarretando, eventualmente, em mais gastos de combustível. Para evitar problemas como esses as aeronaves contam com um sistema anti-gelo que diminui a formação de camadas de gelo em sua fuselagem, produzindo os chamados "rastros de condensação" como na imagem.



A temperatura na troposfera (primeira camada da atmosfera que tem aproximadamente 40.000 pés de altitude) diminui 2°C a cada aumento de 1.000 pés na altitude. Suponha que, em um determinado dia, a temperatura em um aeroporto seja de 30°C , e que a água congela a 0°C .

- Qual a taxa de variação, em $^{\circ}\text{C}/\text{pé}$, da temperatura da atmosfera, T , em função da altitude, h .
- A função $T(h)$ é crescente ou decrescente? Como isso se reflete na taxa de variação?
- Determine uma expressão para $T(h)$ e represente seu gráfico.
- Qual a temperatura a 37.200 pés de altitude?
- A partir de que altitude o piloto deverá acionar o sistema anti-gelo da aeronave?
- Em outro dia, a temperatura no mesmo aeroporto era de 25°C . Qual a altitude de acionamento do sistema anti-gelo, nesse caso?
- Estabeleça uma maneira de calcular a altitude de acionamento do sistema anti-gelo quando a temperatura do aeroporto é igual a T_0 .

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, $f(x) = ax + b$, cuja taxa de variação não é nula (isto é, o gráfico de f não é uma reta horizontal).

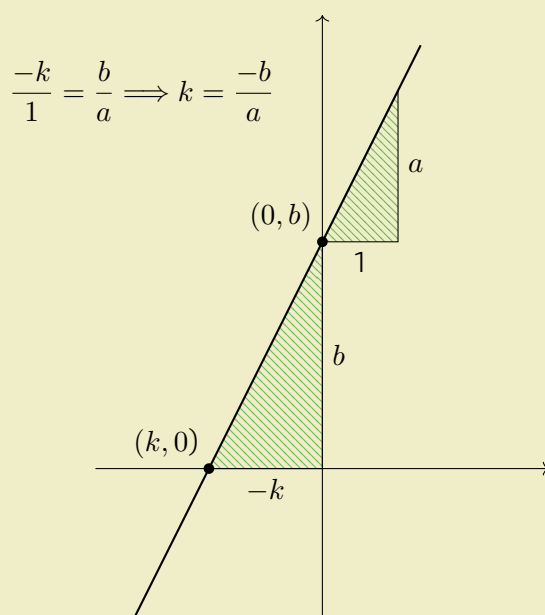
A reta que é o gráfico de f , certamente terá interseção com o eixo das abscissas. O valor de x onde ocorre essa interseção é o zero da função afim.

Seu valor pode ser calculado de duas formas:

■ Diretamente pela expressão de f :

$$f(k) = 0 \iff ak + b = 0 \iff ak = -b \iff k = -\frac{b}{a}$$

■ Pelo gráfico, usando semelhança de triângulos:



Por exemplo, o zero da função $f(x) = 5x - 21$ é o valor $k = \frac{-(-21)}{5}$.

Já o zero da função $g(x) = 7 - \frac{x}{2}$ é $k = \frac{-7}{-\frac{1}{2}} = 14$.

Qual a frequência?

Atividade 14

A Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9MHz, e que haja uma diferença de 0,2MHz entre emissoras com frequências vizinhas.

- a) Em uma determinada região as frequências entre a 70ª e 86ª são reservadas rádios comunitárias. Determine a frequência mínima e máxima para uma rádio comunitária.
- b) Determine quantas emissoras FM podem funcionar em uma mesma região.
- c) Lembre-se da frequência da rádio que você costuma ouvir e determine a posição dela na sequência das frequências do problema.

Quadros na parede

Atividade 15

Caso tenha disponibilidade, sugerimos o uso da versão digital desta atividade disponível neste [link](#)



Você deseja pedurar três quadros que têm as mesmas dimensões na parede acima do seu sofá. A linha tracejada da figura indica a altura que você deve pedurar os ganchos. Sem auxílio de instrumentos de medição marque as posições aproximadas dos ganchos sobre a linha tracejada de maneira que os quadros fiquem igualmente espaçados entre si.

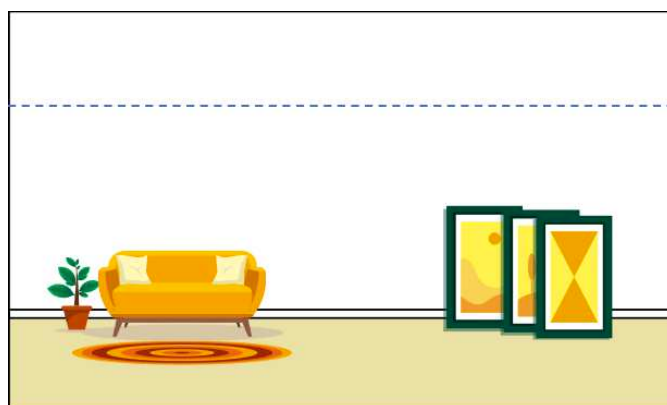
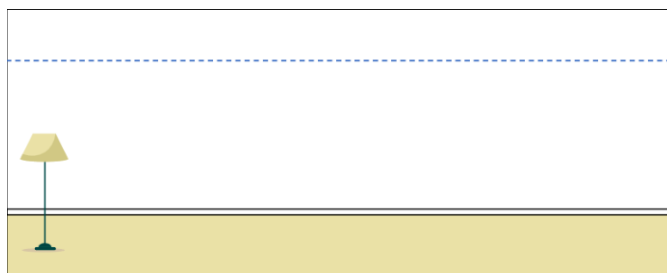


Figura 3.9: Fonte: [Freepik](#)

- a) Marcar as posições "de olho" pode gerar imprecisões. Para que fique perfeito é necessário medir e distribuir uniformemente os ganchos. Com o auxílio de uma régua meça a parede acima ($1\text{cm}=1\text{m}$) e marque as posições para os três ganchos de pendurar quadros, precisamente. Use uma caneta de outra cor para comparar com as posições anteriores. Explique sua estratégia.
- b) Agora, suponha que você tem uma outra parede representada abaixo em que deseja pendurar cinco quadros equidistantes. Onde você deve posicionar os ganchos? Use o desenho abaixo para indicar e explique a sua estratégia.



- c) A tabela a seguir indica duas das distâncias (até o lado esquerdo da parede) de ganchos equidistantes em uma parede. Complete os espaços em branco e explique sua estratégia.

Gancho	Distância (m)
1	
2	11
3	
4	
5	23

- d) Suponha agora que você queira posicionar mais 15 quadros na parede do item anterior, respeitando as distâncias estabelecidas. Como saber a distância, até o lado esquerdo da parede, que se encontra o gancho de número 10? Descreva pelo menos duas estratégias diferentes.
- e) Para a parede do item anterior, escreva uma expressão que forneça a distância d dos ganchos até o lado esquerdo da parede em função do número n do gancho.
- f) Em uma outra parede a distância dos ganchos *em metros* em função da sua posição é dada por $d(n) = 3 + 2n$. A que distância está o primeiro gancho? E o sexto gancho? O que representa o número $d(13)$?
- g) Júlia e Camila usaram as seguintes expressões para representar a tabela a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{Júlia} & d(n) = 7 + 3n \\ \text{Camila} & d(n) = 10 + 3(n - 1) \end{array}$$

Gancho	Distância (m)
1	10
2	13
3	16
4	19
5	22
6	25

Quem das duas se expressou corretamente? Por quê? Como cada uma delas pode ter pensado para chegar nas expressões?

ORGANIZANDO DOMÍNIOS DISCRETOS

Neste capítulo estamos trabalhando com funções afins e, como você deve ter percebido, na atividade anterior a relação entre as variáveis distância e posição do gancho na fila também estavam relacionadas por uma função afim. O que queremos destacar nesta seção é uma outra maneira de representar a **função afim** quando seu domínio é um **conjunto discreto** - em que é possível contar ou enumerar seus elementos, dizer quem é o primeiro, o segundo, o terceiro e assim por diante. Em muitos casos e atividades anteriores, de fato, nos ativemos apenas a um conjunto finito de elementos do domínio, e para esses casos é possível traduzi-los para essa nova notação.

No caso de funções definidas em conjuntos discretos, é possível adotar como domínio padrão o conjunto (ou um subconjunto) dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Dessa forma, podemos apenas representar o conjunto imagem como uma sucessão ou sequência de valores ordenados:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

em que, necessariamente, o termo de índice n está na n -ésima posição da lista.

Quando a função em questão é *afim*, chamamos a sequência de valores da imagem de **progressão aritmética** ou simplesmente uma **P.A.**. Assim, em uma progressão aritmética, o número que está na n -ésima posição da lista pode ser expresso como uma função afim da variável n .

$$a_n = f(n) = \alpha \cdot n + \beta$$

em que α e β representam números reais e $\alpha \neq 0$

Na atividade anterior, conforme o número de quadros foi amentando, vimos que foi necessário desenvolver uma estratégia para que eles pudessem ser distribuídos de modo que ficassem igualmente espaçados na parede. Se retornarmos ao item [c](#)) e escrevermos lado a lado os valores presentes na segunda coluna da tabela obtemos a sequência (7,11,15,19,23).

Na sequência (7, 11, 15, 19, 23) percebemos que a expressão

$$a_n = 4n + 3,$$

para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ fornece cada um dos termos da sequência.

A exemplo que foi observado na atividade dos quadros, a diferença entre dois termos consecutivos em uma progressão aritmética é sempre a mesma. Na sequência de vinte termos (7, 11, 15, ..., 83) a diferença entre termos consecutivos é igual a 4. Dito de outra forma, cada número é obtido somando 4 ao anterior.

$$7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15 \xrightarrow{+4} 19 \xrightarrow{+4} 23 \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{+4} 83$$

Esse valor constante que somamos para obter o próximo termo da progressão é chamado de **razão** da P.A. e coincide com a taxa de variação da função afim que a define.

$$a_{k+1} = a_k = \alpha(k+1) + \beta - (\alpha + \beta) = \alpha$$

$$a_1 \xrightarrow{+\alpha} a_2 \xrightarrow{+\alpha} a_3 \xrightarrow{+\alpha} a_4 \xrightarrow{+\alpha} \dots$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 + \alpha \\
 a_3 &= a_2 + \alpha = a_1 + 2\alpha \\
 a_4 &= a_3 + \alpha = a_2 + 2\alpha = a_1 + 3\alpha \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_{n-1} + \alpha = \dots = a_1 + (n-1)\alpha
 \end{aligned}$$

Observe então que, para determinar todos os termos de uma progressão aritmética, basta conhecer

- a) dois termos e suas posições, ou
- b) um termo em posição e a razão.

Veja os exemplos:

EXEMPLO 2

Determinar os elementos de uma P.A. de 10 termos sabendo que $a_2 = 0,9$ e que $a_7 = 1,9$.

Solução: Neste caso, para ir do segundo para o sétimo termo, temos que somar 5 vezes a razão. Assim,

$$1,9 = 0,9 + 5\alpha \Rightarrow \alpha = 0,2$$

A progressão é $(0,7; 0,9; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3; 2,5)$

EXEMPLO 3

Qual é o trigésimo quarto termo de uma progressão aritmética de razão $\frac{-\pi}{2}$ e cujo termo de posição 12 é igual a 0?

Solução: Do a_{12} até o a_{34} somamos 22 vezes a razão. Logo,

$$a_{34} = a_{12} + 22 \cdot \left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 + 22 \cdot \left(\frac{-\pi}{2}\right) = -11\pi.$$

De maneira análoga à função afim, se uma progressão aritmética tem razão positiva ela será **crescente**, e se a razão for um número negativo, ela será **decrescente**.

PRATICANDO DOMÍNIOS DISCRETOS

Termo geral de uma P.A.

Atividade 16

A função afim que relaciona um termo genérico de uma progressão aritmética com o primeiro termo e a razão é comumente chamada de **fórmula do termo geral** da progressão. Ou seja, para a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão r a fórmula do termo geral é

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Complete a tabela abaixo com as progressões ou as fórmulas dos termos gerais.

P.A.	Primeiro termo	Razão	Termo geral
(a_1, a_2, a_3)	a_1	r	$a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$
$(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$	1	2	$a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$
$(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$			
	3	-1	
			$a_n = 10 - \frac{n}{5}$
$(\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots)$			
	4		$a_n = 2 + 2n$

Quantos múltiplos?

Atividade 17

Os múltiplos de um número inteiro positivo m , quando representados na reta numérica ficam igualmente espaçados entre si.

- Quantos múltiplos de 13 há entre 100 e 200? Explique sua estratégia.
- Quantos múltiplos de 7 há entre 1.000 e 2.000?

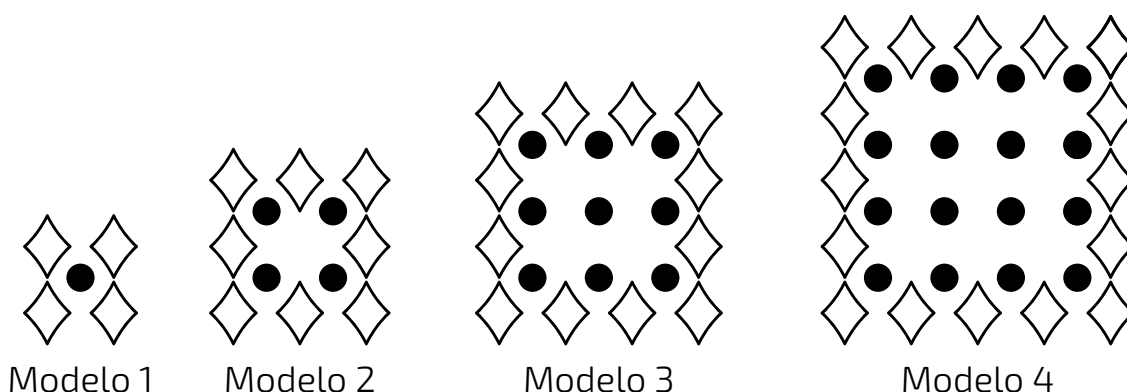
Plantas companheiras

Atividade 18

No cultivo de produtos orgânicos, é comum o plantio de Plantas Companheiras. "Plantas Companheiras são plantas pertencentes a espécies ou famílias que se ajudam e complementam mutuamente, não apenas na ocupação do espaço e utilização de água, luz e nutrientes, mas também por meio de interações bioquímicas chamadas de Efeitos Alelopáticos. Estes podem ser tanto de natureza estimuladora quanto inibidora, não somente entre plantas, mas também em relação a insetos e outros animais." Disponível [neste link](#) - Acesso em 25/11/2017.

Uma empresa especializada em consultoria e plantio de produtos orgânicos apresenta alguns modelos de plantio de um determinado vegetal, representado na figura a seguir por (●) e sua respectiva planta companheira (◇), cada modelo é adequado para o tamanho do plantio e tem

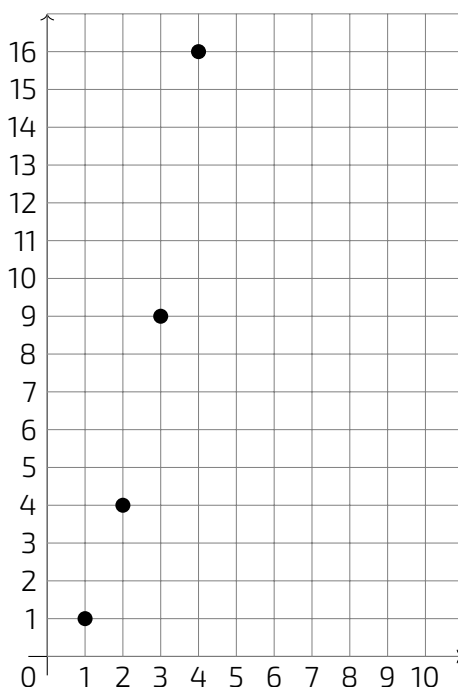
como objetivo criar uma barreira natural contra pragas, observe a figura a seguir que apresenta os modelos de plantio, identificados sequencialmente por Modelo 1, Modelo 2, Modelo 3, ..., Modelo n .



- a) Preencha o quadro a seguir, que nos informa a quantidade de cada tipo de planta em cada um dos modelos.

	(●)	(◇)
Modelo 1		
Modelo 2		
Modelo 3		
Modelo 4		

- b) Descreva textualmente qual a relação entre a quantidade de vegetais (●) e o número n que identifica o modelo na sequência.
- c) Descreva textualmente qual a relação entre a quantidade de plantas companheiras (◇) e o número n que identifica o modelo na sequência.
- d) Exiba uma expressão algébrica que relacione a quantidade V de vegetais (●) em função do número n que identifica o n -ésimo modelo na sequência.
- e) Exiba uma expressão algébrica que relacione a quantidade V de vegetais (◇) em função do número n que identifica o n -ésimo modelo na sequência.
- f) No plano cartesiano a seguir estão representados os pares ordenados $(n, V(n))$ em que n é o "número" que representa o n -ésimo modelo e $V(n)$ a quantidade V de vegetais (●). Represente nele os pontos que correspondem aos pares ordenados $(n, C(n))$ em que $C(n)$ é a quantidade C de plantas companheiras (◇) em função de n .



- g) Qual a quantidade C de plantas companheiras ($\diamond$) utilizadas no décimo modelo?
- h) Qual o valor de n para um modelo que utilize 144 plantas companheiras ($\diamond$)?

Imagem da P.A.

Atividade 19

Considere as funções afins f, g definidas por $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = -5x + 2$.

- a) Complete a tabela abaixo com as imagens pedidas

x									
$f(x)$									
$g(x)$									

- b) Qual a razão da P.A. da primeira linha da tabela?
- c) As imagens pela função f formam também uma P.A.? Caso positivo, qual a razão?
- d) E as imagens pela função g ? Caso positivo, qual a razão?
- e) Faça uma conjectura sobre o que acontece com as imagens de uma P.A. por uma função afim.

PARA SABER + FUNÇÃO AFIM POR PARTES**Afim de um passeio**

Atividade 20

Você caminha por 12 minutos a uma taxa de 1 km por hora, ao encontrar um amigo permanece parado conversando por 3 minutos, voltando logo em seguida a caminhar por mais 6 minutos a uma taxa de 2 km por hora.

- a) Como você representaria no plano cartesiano, o período em que você permaneceu parado conversando com seu amigo? Considere no eixo das abscissas o tempo em minutos e no eixo das ordenadas a distância percorrida em metros.
- b) Represente no plano cartesiano um gráfico que ilustra toda a situação descrita.
- c) Obtenha expressões para as funções afins cujos gráficos são os segmentos de reta que você representou no item anterior.

Comprando vinho

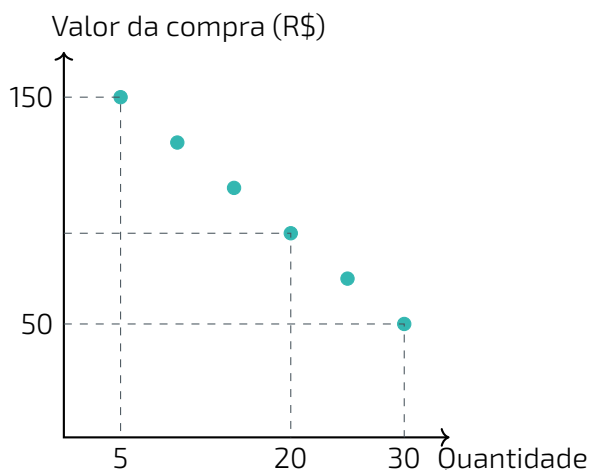
Atividade 21

Em uma vinícola podemos comprar vinho por litro. Neste caso, o vinho é colocado em garrações com capacidade de 5 litros. O vinho é vendido a R\$ 10,00 por litro e cada garrafão é vendido a R\$ 5,00.

- a) Calcule o preço que um cliente deverá pagar por 2 litros, por 5 litros e por 7 litros. Explique seus cálculos.
- b) Determine uma expressão para o preço p (em reais) em função do volume x (expresso em litros) de vinho adquirido. Considere x compreendido entre 0 e 15.
- c) Trace a curva que representa a função p no plano cartesiano. Utilize a escala de 1 cm para 1 litro no eixo das abscissas e 1cm para 10 reais nas ordenadas.

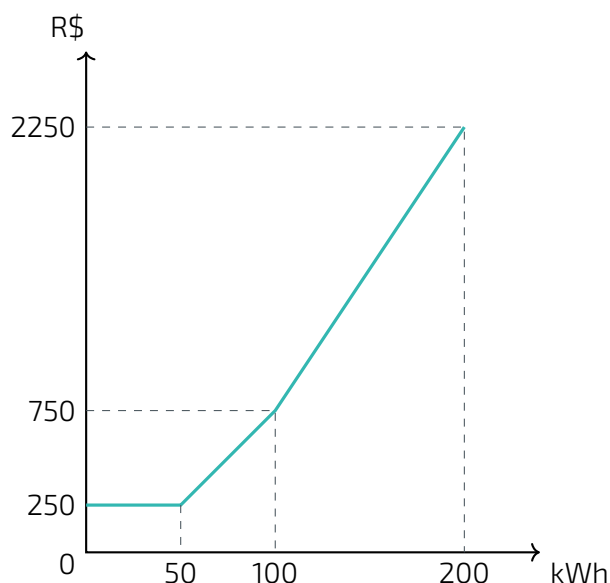
EXERCÍCIOS

- 1 (Uerj-1998) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



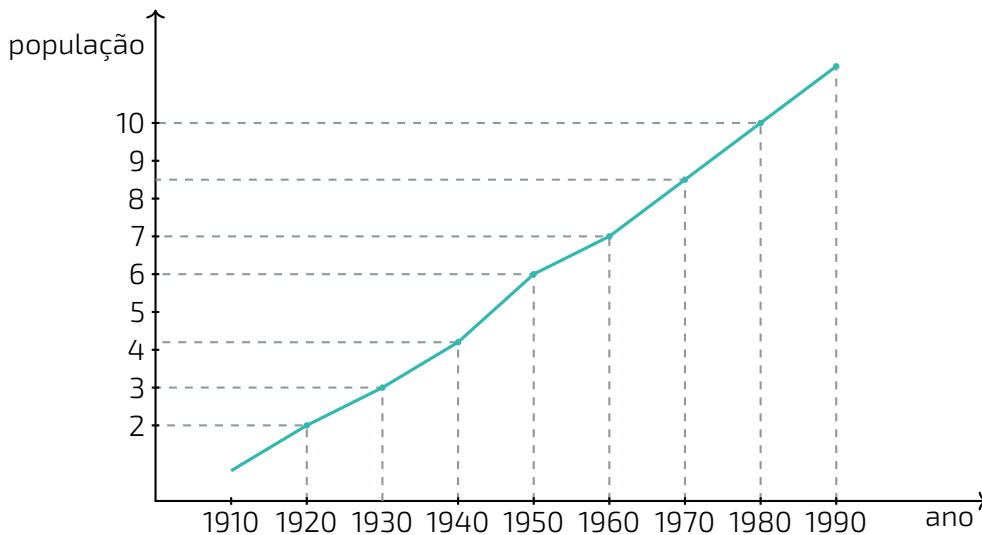
Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, qual valor?

- 2 De cada usuário de energia elétrica é cobrada uma taxa mensal de acordo com o seu consumo no período, desde que esse consumo ultrapasse determinado nível. Caso contrário, o consumidor deve pagar uma taxa mínima referente ao custo de manutenção. Em certo mês, o gráfico consumo (em kWh) x preço em (R\$) foi o apresentado abaixo:



- a) Determine entre que valores de consumo em kWh é cobrada taxa mínima.
b) Determine o consumo correspondente à taxa de R\$ 1.950,00.

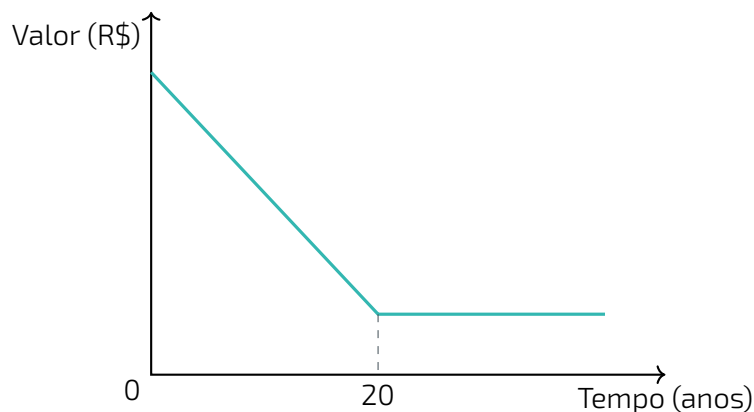
- 3 (UFRJ-98-PNE) - O gráfico a seguir descreve o crescimento populacional de certo vilarejo desde 1910 até 1990. No eixo das ordenadas, a população é dada em milhares de habitantes.



- a) Determine em que década a população atingiu a marca de 5.000 habitantes.
- b) Observe que a partir de 1960 o crescimento da população em cada década tem se mantido constante. Suponha que esta taxa se mantenha inalterada no futuro. Determine em que década o vilarejo terá 20.000 habitantes.

4

Suponha que um determinado veículo de transporte de passageiro tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura seguinte.



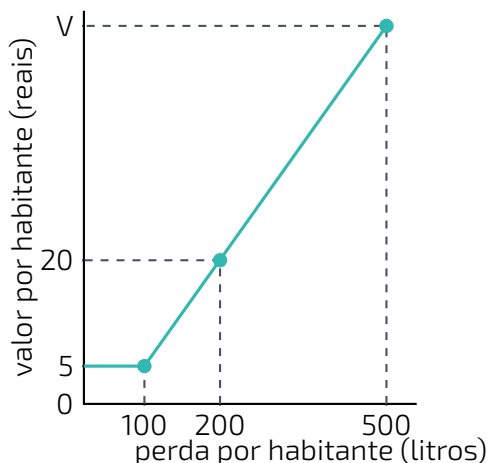
Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por R\$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso, e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo. Responda:

- a) Qual o valor de fábrica do veículo (valor quando era novo)?
- b) Qual o função $f(x) = ax + b$ que está definida no gráfico acima no intervalo $[0, 20]$?
- c) Qual o valor comercial do carro quando atinge 2 anos de uso?

5

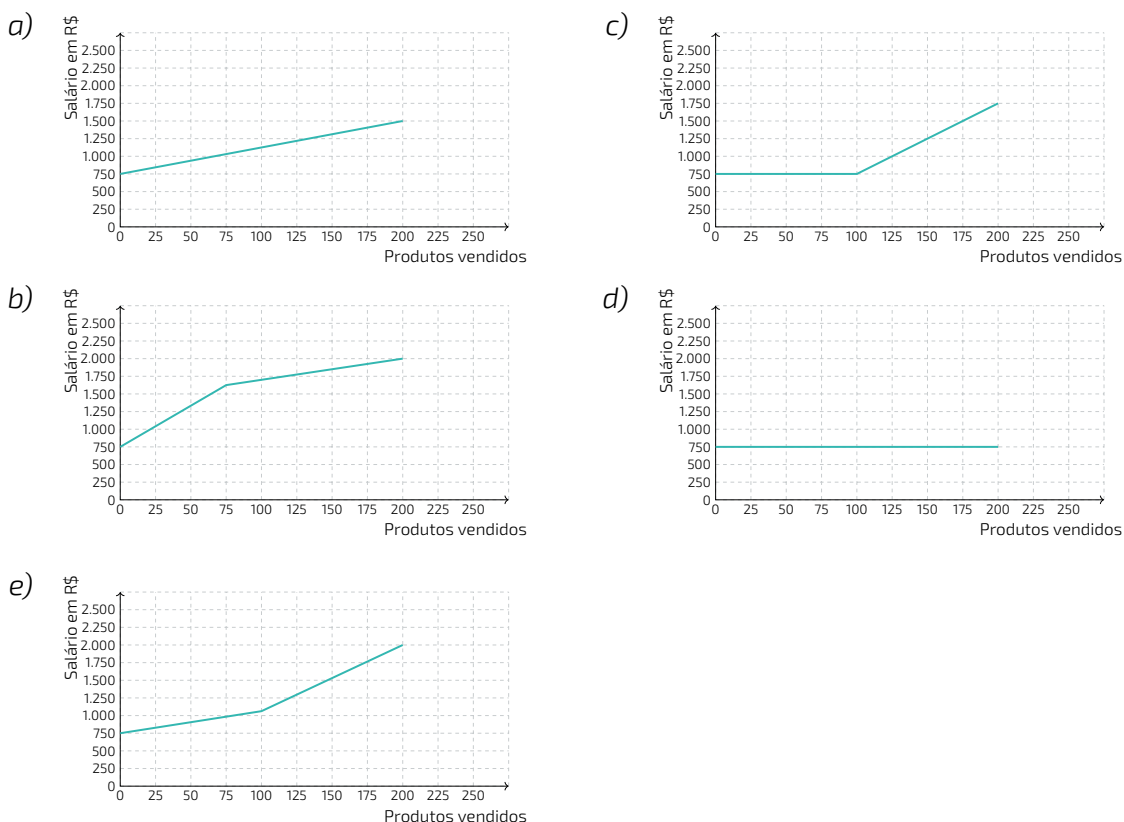
(UERJ 2016) O resultado de um estudo para combater o desperdício de água, em certo município, propôs que as companhias de abastecimento pagassem uma taxa à agência

reguladora sobre as perdas por vazamento nos seus sistemas de distribuição. No gráfico, mostra-se o valor a ser pago por uma companhia em função da perda por habitante.



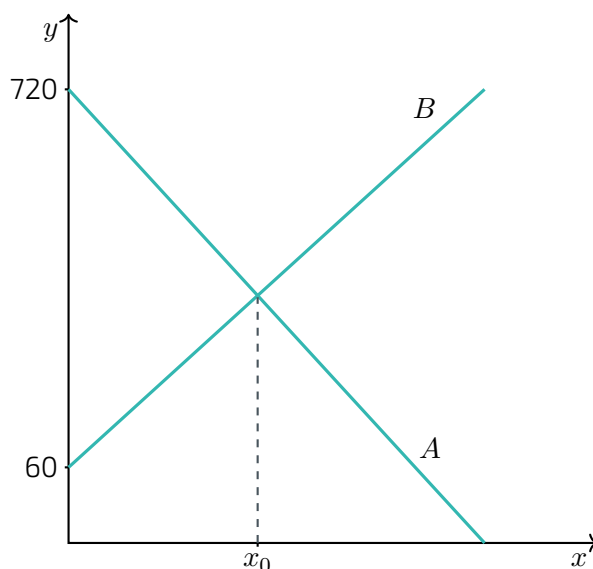
Calcule o valor V , em reais, representado no gráfico, quando a perda for igual a 500 litros por habitante.

- 6 (ENEM-2012)** Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R\$ 750,00, mais uma comissão de R\$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R\$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101 produto vendido. Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é:



- 7 (UERJ-2014 - 2ª F)** O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No

gráfico, estão representados, no eixo y , os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x .



Determine o tempo x_0 , em horas, indicado no gráfico.

- 8 Numa estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no quilometro 3 e outro no quilometro 88. Entre eles serão colocados mais 16 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Determine em quais marcos quilométricos deverão ficar esses novos telefones.
- 9 (UNIRIO) O fichário da clínica médica de um hospital possui 10.000 clientes cadastrados, em fichas numeradas de 1 a 10.000. Um médico pesquisador, desejoso de saber a incidência de hipertensão arterial entre pessoas que procuravam o setor, fez um levantamento, analisando as fichas que tinham números múltiplos de 15. Quantas fichas NÃO foram analisadas ?
- a) 666
b) 1500
c) 1666
d) 8334
e) 9334
- 10 (UERJ-2003-1ª fase) Uma seqüência de cinco átomos está organizada por ordem crescente de seus números atômicos, cujos valores são regidos por uma progressão aritmética de razão 4. Já o número de nêutrons desses mesmos átomos é regido por uma progressão aritmética de razão 5. Se o átomo mais pesado pertence ao elemento ferro e o mais leve possui o número de prótons igual ao número de nêutrons, o número de massa do terceiro átomo da série é:

- a) 18
- b) 20
- c) 26
- d) 38

11 (UERJ 2015-1º ex qualif)



Na situação apresentada nos quadrinhos, as distâncias, em quilômetros, $d(A, B)$, $d(B, C)$ e $d(C, D)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O vigésimo termo dessa progressão corresponde a:

- a) -50
- b) -40
- c) -30
- d) -20

12 (ENEM-2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- a) 38.000
- b) 40.500
- c) 41.000
- d) 42.000
- e) 48.000

13 (UNICAMP) A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

- a) Quantas emissoras FM podem funcionar [na mesma região], respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela ANATEL? Qual o número do canal com maior frequência?
- b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas?

14 (UFRJ-2000) Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma platéia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da décima sexta e da trigésima primeira ficha, obtendo como resposta 103 e 58 respectivamente. Para delírio da platéia, Mister MM adivinhou então o valor da última ficha.

Determine você também este valor.

Referências Bibliográficas

- Dooren, W., Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. e Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23:57 –86.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 de 10. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 9ª edição.
- Silva, A. d. F. G., Pietropaolo, R. C. e Campos, T. M. M. (2013). Atual currículo de matemática do estado de são paulo: Indicações para a introdução do ensino da ideia de irracionalidade. *Boletim GEPEM*, 62:31–44.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2):124–144.

4

Função Quadrática

O QUÊ?

Função quadrática com enfoque na representação algébrica ou gráfica, entendendo suas aplicações tanto em problemas de otimização quanto na utilização das propriedades da curva (parábola) nas diversas áreas do conhecimento.

POR QUÊ?

As funções quadráticas apresentam-se especialmente em problemas que chamamos de otimização, onde o objetivo é determinar em que condições uma grandeza assume valores máximo ou mínimo, como por exemplo, o lucro máximo de uma empresa, área máxima de uma região plana, o preço mínimo de um determinado produto sujeito a condições específicas e assim por diante. Além disso, servem de modelo para os estudos físicos do movimento onde há aceleração constante, e possui aplicação em diversas áreas como: engenharia, economia, administração, ciência da computação etc.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Versão digital do capítulo:

https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/AF107.html

Título: Função Quadrática

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.1 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Luiz Amorim (Colégio Pedro II)
Bruno Vianna (Colégio Pedro II)

Revisão: Cydara Ripoll
Letícia Rangel

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

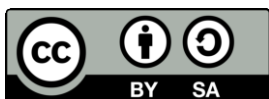
Ilustrações: Miller Guglielmo

Gráficos: Beatriz Cabral e Tarso Caldas

Capa: Foto de Ashkan Forouzani no Unsplash
<https://unsplash.com/photos/J4idEoFc8k8>

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



EXPLORANDO MOVIMENTOS COM VELOCIDADE VARIÁVEL

Vamos agora conhecer um novo tipo de função real: as **funções quadráticas**. Também conhecidas como funções polinomiais do segundo grau, ela aparece em diversas situações do cotidiano, especialmente em problemas que chamamos de otimização, onde o objetivo é determinar em que condições uma grandeza assume valores máximos ou mínimos, como por exemplo, o lucro máximo de uma empresa, área máxima de uma região plana, o preço mínimo de um determinado produto e assim por diante. Assim como nos outros capítulos do Livro Aberto, vamos apresentar conceitos, definições e propriedades por meio de atividades e aprofundar esses conhecimentos na seção “Organizando Ideias”. Esperamos que você desfrute, se aproprie e aplique esses conceitos que serão úteis em diversas áreas do conhecimento, não só nos estudos físicos do movimento, mas em áreas como da engenharia, economia, administração, ciência da computação etc.

Lançando objetos das nuvens em Dubai

Atividade 1

No topo do hotel Burj Al Arab, em Dubai, encontra-se a quadra de tênis mais alta do mundo, com aproximadamente 200 metros de altura. Em 2005, os campeões Roger Federer e Andre Agassi disputaram uma partida de exibição. Considere que por um descuido, uma das bolinhas usadas nesse jogo caiu 200m, verticalmente e em queda livre. Vamos aproveitar essa situação para investigar a matemática por trás desse fenômeno físico. A imagem a seguir traduz a situação no início da queda da bola.

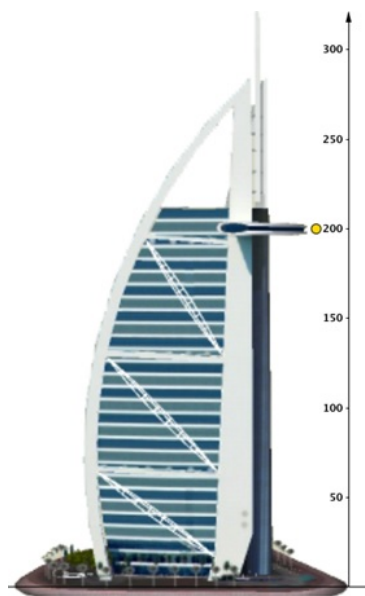


Figura 4.1: Hotel e a bolinha de tênis (credito da imagem aqui).

Um observador registra com seu equipamento fotográfico a queda da bolinha, disparando fotos a cada intervalo de 1 segundo, até a mesma atingir o solo. Os registros fotográficos encontram-se agrupados e animados na simulação da queda, que pode ser visualizada no Geogebra: Bola de Tênis (<https://ggbm.at/hvnNHMY2>)

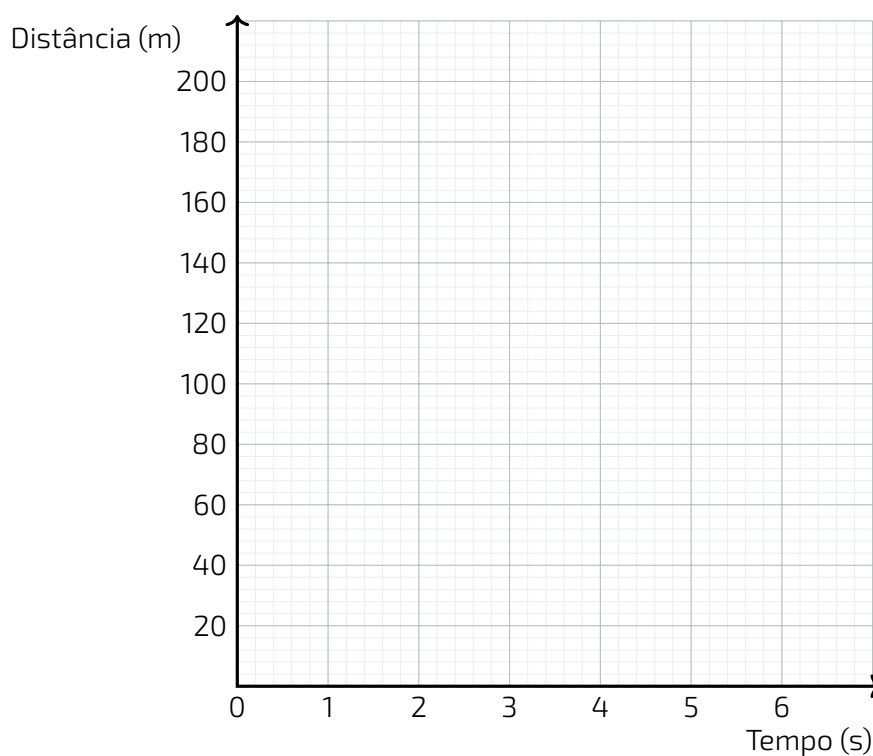
A tabela a seguir descreve a altura da bolinha ao longo do tempo.

t	Tempo (s)	
t_0	0	200
t_1	1	195
t_2	2	180
t_3	3	155
t_4	4	120
t_5	5	75
t_6	6	20

- a) Numa folha de papel ou similar, reproduza a tabela a seguir e preencha o que falta, informando a distância total percorrida pela bolinha na queda, a partir de t_0 .

Tempo de Queda	Distância percorrida pela bolinha
De t_0 a $t_0 = 0s$	$d_0 = 200 - 200 = 0m$
De t_0 a $t_1 = 1s$	$d_1 = 200 - 195 = 5m$
De t_0 a $t_2 = 2s$	$d_2 =$
De t_0 a $t_3 = 3s$	$d_3 =$
De t_0 a $t_4 = 4s$	$d_4 =$
De t_0 a $t_5 = 5s$	$d_5 =$
De t_0 a $t_6 = 6s$	$d_6 =$

- b) As distâncias percorridas pela bolinha ao longo do tempo de queda aumentam com a mesma taxa de variação?
- c) É possível obter uma função afim que relaciona a distância percorrida d_n (em metros) com o tempo de queda t (em segundos)? Justifique.
- d) Em uma folha de papel ou similar, copie o plano cartesiano abaixo e, em seguida, represente os pares ordenados $(t; d_n)$ em que t representa o tempo de queda em segundos e d_n a distância, em metros, percorrida pela bolinha na queda:



- e) O domínio da função que descreve a queda da bolinha ao longo do tempo é $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. A mesma situação poderia ser descrita por uma função de domínio contínuo?
- f) Neste caso, ao ligarmos todos os pontos do gráfico do item *d* teríamos um segmento de reta ou uma curva?
- g) Dentre as alternativas a seguir, qual relação atende aos valores descritos no gráfico sendo $d(t)$ a distância percorrida pela bolinha na queda (em metros) com o tempo de queda t (em segundos).
- ☐ $d(t) = -t^2$
- ☐ $d(t) = 10t + 10$
- ☐ $d(t) = 20t$
- ☐ $d(t) = 5t^2$
- ☐ $d(t) = 10t^2$

Distância segura entre os carros

Atividade 2

Uma noção importante sobre a direção defensiva trata do fato de que “Ao pisar no freio do veículo, ele não para instantaneamente. Entre o momento que o motorista observa um obstáculo à sua frente e decide acionar os freios até o instante que o carro realmente para, ele se desloca vários metros” [JCNET-2013]. Esse fato gera a chamada **distância de frenagem**, que precisa ser conhecida, para a segurança de todo motorista.

Como essa distância depende de muitos fatores, logo que um veículo é lançado, revistas especializadas tratam de divulgar tabelas com as relações entre as velocidades e as distâncias de frenagem para estes veículos. A análise experimental e cuidadosa de qualquer uma dessas tabelas revela que a distância percorrida por um veículo após o acionamento dos freios é proporcional ao quadrado da sua velocidade [Avila].

No artigo [JCNET-2013] encontramos que um veículo a 80 Km/h, ao considerarmos os tempos de percepção, de reação e de parada, vai percorrer em média 57 metros em pista seca até parar totalmente, assim que o motorista observar o obstáculo e decidir frear.

- a) Considere que o tempo de reação entre a percepção do obstáculo e a pisada no freio para um motorista seja de um segundo. Nesse tempo, quantos metros o seu carro se desloca, se inicialmente está a 80Km/h? [Se necessário, utilize que $v\text{Km/h} = (v \div 3,6)\text{m/s}$].
- b) A distância de 57m descrita no texto considera duas distâncias juntas: a que o móvel percorre no segundo anterior ao acionamento do freio, e a distância de frenagem. Sendo assim, quanto é somente a distância de frenagem desse móvel a 80Km/h e que percorreu um total de 57m antes de parar?
- c) Sendo k uma constante de proporcionalidade, exiba uma relação algébrica entre a distância de frenagem e a velocidade do móvel antes do acionamento do freio, descrita no segundo parágrafo do texto.
- d) Para os valores considerados no item b), qual o valor da constante de proporcionalidade k ?
- e) A relação algébrica obtida no item c) é uma função afim?

Observe a figura a seguir. Ela exibe, na placa o número 80, referente a velocidade do carro antes de perceber o obstáculo e decidir freiar. Logo abaixo da placa há um Sol e uma nuvem de chuva. Isso é para indicar que a faixa vermelha reverte-se a situação de frenagem com a pista seca, e a faixa azul a frenagem com pista molhada.



Figura 4.2: Exemplo preenchido

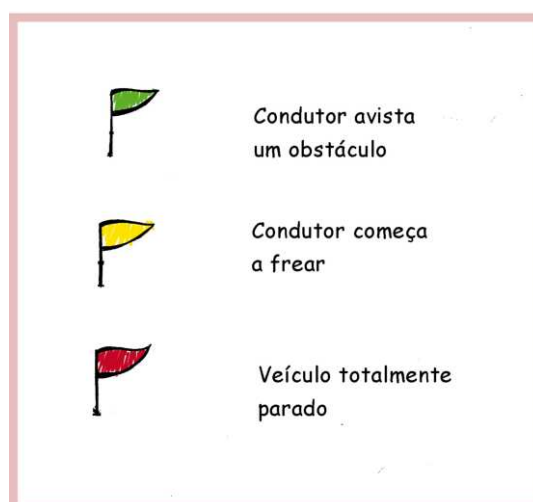


Figura 4.3: Significado das bandeiras nas figuras

- f) Conforme o exemplo acima, determine todos os valores que estão faltando e que estão representados pelas letras de 'a' até 'j', observando a mudança nas placas de velocidade do carro antes de perceber o obstáculo e decidir freiar.



Na prática, para manter uma distância segura entre os carros e evitar o "engavetamento", aconselha-se seguir a regra dos dois segundos:

- *Observe a estrada à sua frente e escolha um ponto fixo de referência (à margem) como uma árvore, placa, poste, casa, etc.*
- *Quando o veículo que está à sua frente passar por este ponto, comece a contar pausadamente: cinquenta e um, cinquenta e dois. (mais ou menos dois segundos).*
- *Se o seu veículo passar pelo ponto de referência antes de contar (cinquenta e um e cinquenta e dois), deve aumentar a distância, diminuindo a velocidade, para ficar em segurança.*

ORGANIZANDO QUEDA VERTICAL

Aristóteles (★ Estagira, 384 a.C. — † Atenas, 322 a.C.) e **Galileu Galilei** (★1564, †1642) no estudo da Queda Livre

Aristóteles, discípulo de Platão e professor de Alexandre o Grande, foi um grande filósofo grego e seus estudos, nas mais diversas áreas, impactaram significativamente a história da humanidade.

Em sua época, a escola Platônica dominava a produção científica ocidental, e boa parte dela era influenciada pelo conceito de "natureza" de um objeto, onde se afirmava que todo objeto era composto da combinação dos quatro elementos: "terra, ar, água e fogo". O estudo dos Movimentos de Aristóteles apresenta alguns equívocos que perpassaram por alguns séculos, devido a essas definições.

Aristóteles afirmava que havia dois tipos de movimentos: os naturais e os violentos. Os naturais, para ele, decorre diretamente da natureza do objeto e os violentos decorrem de forças aplicadas a esses objetos, ou seja um movimento imposto.

No caso dos movimentos naturais, Aristóteles afirmava que cada objeto tem um lugar próprio na natureza e que esses se "esforçam" para retornar ao seu lugar de origem. Por exemplo um vaso de cerâmica, ao ser abandonado cai procurando seu lugar ao solo, já que em sua composição o elemento terra é o mais presente, e pelo mesmo motivo um sopro, ou "baforada" acaba se misturando com o ar.

Além disso, Aristóteles, afirmava que um objeto mais pesado (com maior massa) cai em direção ao solo, mais rapidamente que um objeto mais leve, ou seja, para ele, objetos ao serem lançados, caíam com rapidez proporcional ao seu peso. Suas afirmações sobre o movimento, pautaram o pensamento científico por mais de dois mil anos, sendo a base da ciência na era Medieval e Renascentista. Sendo corrigidas por seus sucessores, como Galileu Galilei.

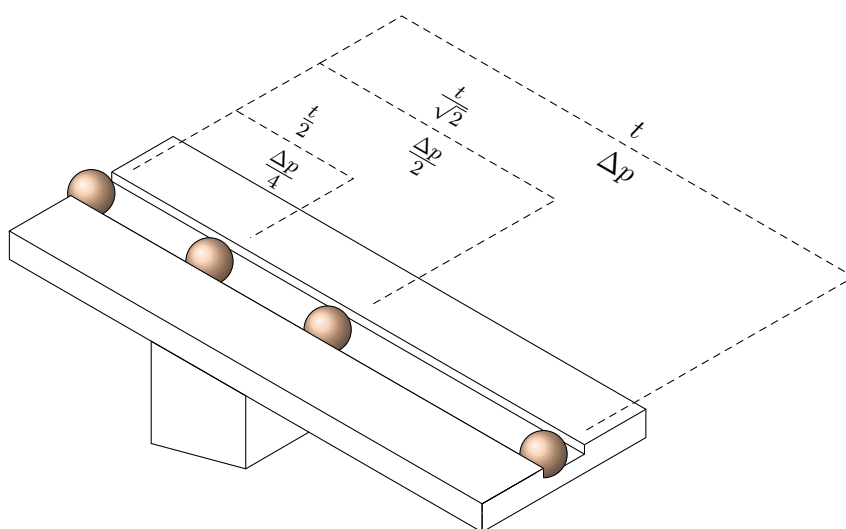
Galileu Galilei filósofo italiano e também considerado físico, matemático e astrônomo, teve também um papel importante na revolução científica, e no contexto histórico mundial, sendo considerado um dos maiores cientistas de sua época.

Galileu abandonou a faculdade de Medicina dedicando-se aos estudos de física e matemática na Universidade de Pisa, uma das mais conceituadas da época. Foi na Universidade de Pisa, já como professor de matemática que Galileu, realizou experiências públicas sobre a queda dos corpos.

Certos historiadores, relatam que perante uma multidão de professores, estudantes e religiosos, Galileu, ao alto da torre de Pisa deixou cair dois pedaços de metal, um deles com o peso dez vezes maior que o outro e os dois chegaram ao solo praticamente no mesmo instante, contrariando assim Aristóteles. Ele prosseguiu realizando outras experiências laboratoriais que acabaram criando o conceito de resistência do ar, o que explicaria por que uma pena e uma bola de metal abandonadas de uma mesma altura, não chegam ao chão ao mesmo tempo. Mesmo assim Galileu não conseguiu convencer as autoridades universitárias de Pisa, que o acusaram de sacrilégio e acabaram tornando sua continuidade em Pisa um tanto desagradável. Por isso, no ano seguinte Galileu aceita uma cadeira na Universidade de Pádua, onde foi muito bem recebido e, por quase dezoito anos continuou realizando diversas experiências e ganhando prestígio com suas publicações e suas famosas aulas magnas.

Em 2014, a BBC publicou na internet a experiência da bola e da pena feita no vácuo: [Human Universe: Episode 4 Preview - BBC Two](#), verificando na prática a veracidade das conclusões de Galileu.

Uma das conclusões mais importantes de Galileu, foram com bases em experiências laboratoriais com planos inclinados. Como retratam as figuras a seguir:



Medição	Espaço percorrido	Tempo Gasto
1ª	$\frac{\Delta p}{4}$	$\frac{t}{2}$
2ª	$\frac{\Delta p}{2}$	$\frac{t}{\sqrt{2}}$
3ª	Δp	t

Galileu notou que:

Na primeira medição obtemos a razão: $\frac{\frac{\Delta p}{4}}{(\frac{t}{2})^2} = \frac{\Delta p}{4} \cdot \frac{4}{t^2} = \frac{\Delta p}{t^2}$

Na segunda medição obtemos a razão: $\frac{\frac{\Delta p}{2}}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2} = \frac{\Delta p}{2} \cdot \frac{2}{t^2} = \frac{\Delta p}{t^2}$

Na terceira medição obtemos a razão: $\frac{\Delta p}{t^2}$

Após obter esses dados ele concluiu que se dividirmos, em cada caso, o espaço percorrido pelo quadrado do tempo gasto, obteremos uma razão constante. Em outras palavras, Galileu constatou que **a distância percorrida é proporcional ao quadrado do tempo gasto nesse percurso**. A partir dessas conclusões chegamos as fórmulas: $\frac{d}{t^2} = \frac{g}{2}$ e portanto $d(t) = \frac{gt^2}{2}$, onde g é a aceleração da gravidade; $d(t)$ é a distância percorrida pelo objeto durante as t unidades de tempo.

O movimento uniformemente variado

Nos casos em que a velocidade de um móvel varia de modo constante por todo o intervalo de tempo deste movimento, o movimento é chamado de **uniformemente variado** e temos que a função que dá a velocidade em cada instante de tempo do movimento é uma função afim, logo

$$v(t) = v_0 + a \cdot t,$$

onde v_0 é a velocidade no início da observação do movimento e a é o fator que vai alterando a velocidade, chamado de aceleração.

São as leis de Newton (★1643, †1727) que estabelecem como a aceleração se relaciona com os objetos de um modo geral, permitindo o uso das relações obtidas por Galileu para situações além da queda livre dos corpos, que vão desde jogadas feitas por atletas com bolas, discos, flechas ou dardos, passando pela aceleração e frenagem de automóveis, e chegando até ao lançamento de foguetes e satélites.

Nas palavras de Pietrocola et al (2016), “*Para um corpo permanecer em movimento uniformemente variado (MUV) - com aceleração constante -, é preciso que uma força atue nele. No caso dos corpos em queda, a força gravitacional Terra-corpo se encarrega dessa tarefa. Para o lançamento vertical, é necessária a ação de uma força gravitacional. Já no caso do movimento variado no plano horizontal, uma força deve ser constantemente aplicada no corpo*”.

Essas constatações conduzem ao fato de que a relação existente entre a posição de um corpo em cada instante de tempo, no caso de um MUV, conforme já constatamos, não é uma função afim. Prova-se que as grandezas posição e tempo podem ser descrita por uma equação do tipo $p(t) = p_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$; onde $p(t)$ é a posição no tempo t , p_0 é a posição inicial em relação ao referencial estabelecido na análise, v_0 é a velocidade no início da observação e a é a aceleração.

EXPLORANDO A FUNÇÃO REAL f DEFINIDA POR $f(x) = x^2$ Em busca de padrões em $f(x) = x^2$

Atividade 3

No capítulo anterior foi estudado o modelo matemático para funções afins. Lá, constatou-se que as funções afins são do tipo $f(x) = ax + b$. Contudo, no [Explorando: movimentos com velocidade variável](#) aparece o termo $\alpha \cdot x^2$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$. Isso revela uma situação nova em relação à função afim. A atividade que segue tem a finalidade de destacar algumas das características de funções como estas que apareceram na seção anterior. Para isso, passaremos a investigar a função real definida por $f(x) = x^2$.

Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, faça o que se pede:

- a) Complete a tabela a seguir com os valores que faltam.

x	-5	-3		-1		1	2	3		$\frac{10}{3}$	$\sqrt{123}$
$f(x)$			4		0				25		

- b) Em uma folha de papel ou similar, faça a figura do plano cartesiano conforme a indicada a seguir.

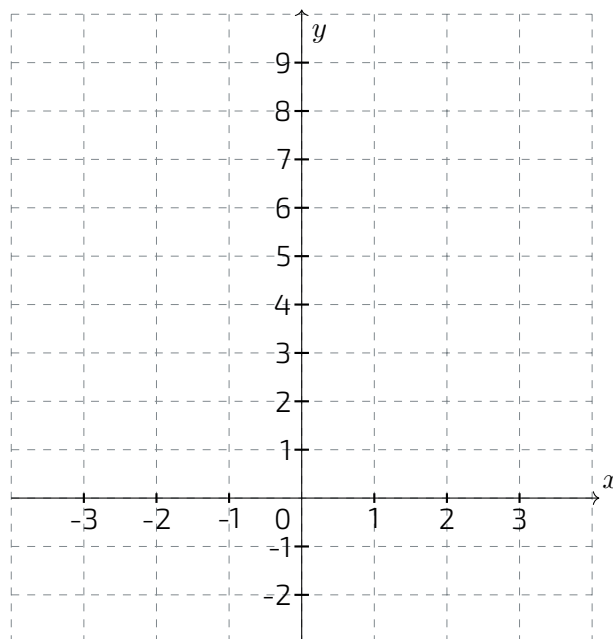


Figura 4.4: Gráfico 1

Represente os pontos da tabela do item 'a' nesse plano cartesiano, desprezando as coordenadas cujo valor de x não aparece destacado no que você fez no papel.

- c) Destaque os pares de pontos que estão a mesma distância do eixo y .

- d) Caso seja possível, forneça o ponto da função f que está a mesma distância do eixo y que cada um dos pontos de f já listados a seguir. [Mesma distância = equidistante]

$(x, y) \in f$	$(7, 49)$	$(-5, 25)$	$(\frac{2}{5}, \frac{4}{25})$	$(-\frac{6}{7}, \frac{36}{49})$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$	$(-\pi, \pi^2)$
Ponto equidistante do eixo y							

- e) De todos os pontos que podemos obter com a função f , existe um que não tem correspondente equidistante do eixo y . Que ponto é esse? Tente descrever as características que esse ponto tem em relação aos outros da função f ou em relação aos eixos coordenados.
- f) Existe algum ponto da imagem de f que seja menor do que zero?
- g) Considerando os pontos do domínio de f entre -4 e 0 , a melhor classificação para esta função é crescente ou decrescente? E entre 0 e 4 ?
- h) Considerando os elementos $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ do domínio de f , pode-se afirmar que a razão em que as imagens variam é a mesma para cada unidade de variação do domínio?
- i) Agora serão apresentados alguns gráficos e, para cada um deles, você deve afirmar com alguma justificativa, se é ou não o gráfico de f . Para isso, use o que você experimentou nos itens da atividade até aqui.

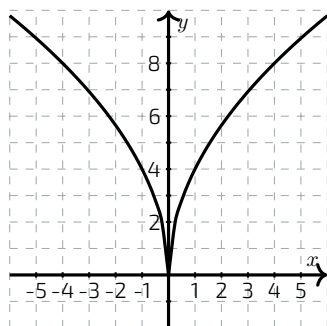


Figura 4.5: Gráfico 1

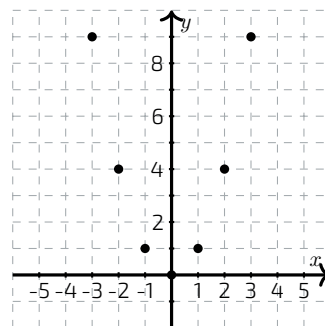


Figura 4.6: Gráfico 2

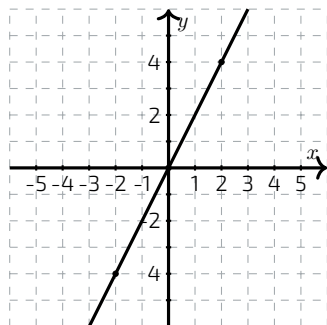


Figura 4.7: Gráfico 3

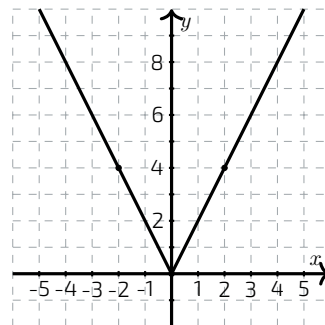


Figura 4.8: Gráfico 4

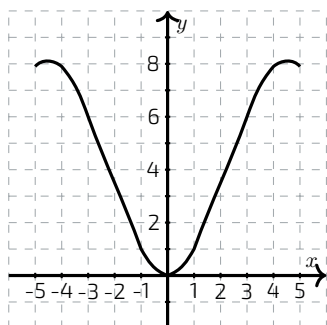


Figura 4.9: Gráfico 5

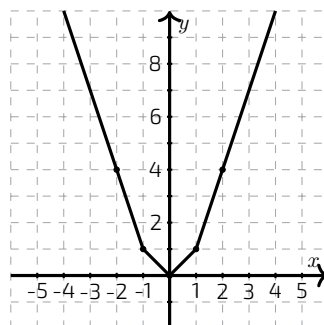


Figura 4.10: Gráfico 6

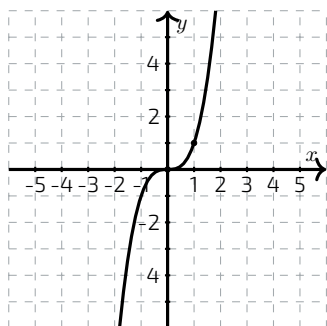


Figura 4.11: Gráfico 7

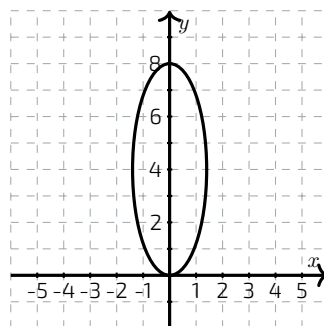


Figura 4.12: Gráfico 8

- j) No mesmo papel em que você marcou alguns dos pontos da função f , lá no item **b)**, construa o gráfico que você acha que representa a função f e compare com o de seus colegas. Se houver discordâncias, tentem argumentar e aprimorar os gráficos uns dos outros com base nas argumentações.

ORGANIZANDO CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO REAL $f(x) = x^2$

Na atividade isolamos o termo x^2 que apareceu no início deste capítulo e motivamos algumas experimentações que devem ter provocado algumas conjecturas e também conduziu a algumas certezas. Será que sua atenção recaiu nesses fatos que listamos a seguir?

Simetria axial de f

Os itens de **b)** a **d)** esclarecem que, na função f , valores simétricos do domínio geram imagens iguais, ou seja, $f(-x) = f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Basta perceber que $f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x)$. Isso faz com que o eixo y seja mediatriz do segmento que une esses pares de pontos do tipo (x, x^2) e $(-x, x^2)$ que destacamos, ou para qualquer outro elemento do domínio de f . A única exceção é $x = 0$ pois 0 é simétrico de si mesmo. Assim, podemos afirmar que, para o gráfico da função f , o eixo y é eixo de simetria.

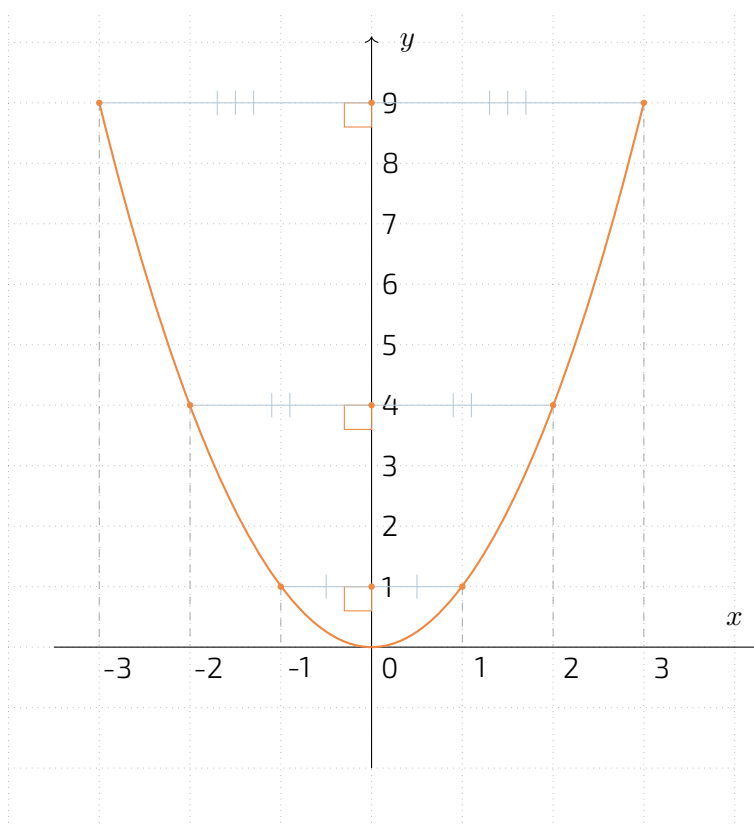


Figura 4.13: Eixo de simetria do gráfico de f

Teorema 1 A função real f definida por $f(x) = x^2$ é simétrica em relação ao eixo y .

A imagem de f

O item 'e' nos leva a refletir sobre um fato muito importante no estudo que estamos desenvolvendo aqui. Não importa qual o valor real do domínio que seja utilizado, a menor imagem é zero, pois sendo x um número real, só existem três possibilidades para x :

$$x < 0 \Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0;$$

$$x = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(x) = 0;$$

$$x > 0 \Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

Teorema 2 A função real f definida por $f(x) = x^2$ é tal que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \geq 0$, ou seja, o menor valor de f é zero e $Im(f) = [0, +\infty[$.

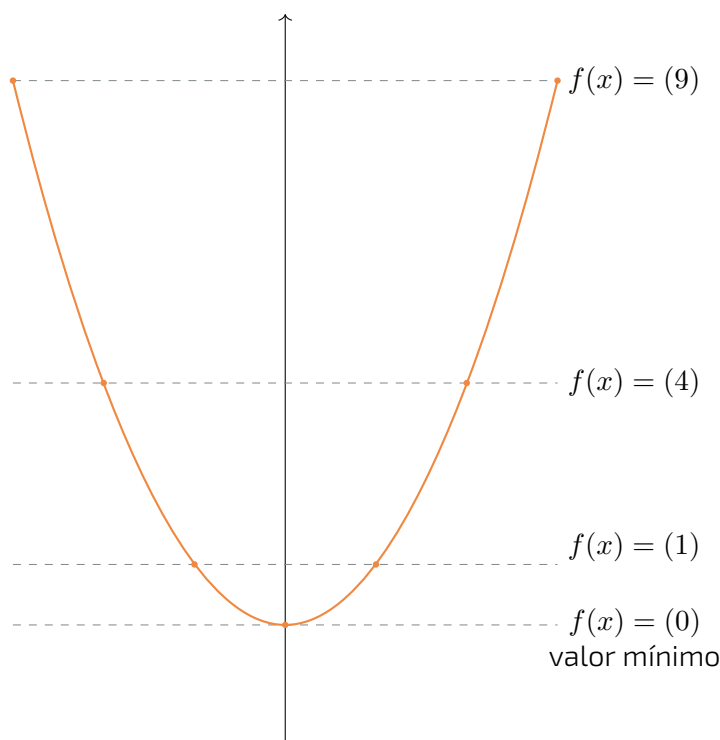


Figura 4.14: A não proporcionalidade no crescimento de f

Como o gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo y , a análise gráfica que se faz em uma das metades da figura fica espelhada para compor a outra metade. Assim, vamos analisar o que ocorre na parte crescente de f quando aumentamos em uma unidade um elemento x do seu domínio: Se $x \in]0, +\infty[$, temos que $f(x) = x^2$ e $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Assim, $f(x+1) - f(x) = 2x + 1$, ou seja, as variações das imagens dependem do x escolhido. Mais especificamente, neste caso elas formam uma progressão aritmética de razão 2 e, com isso, as variações analisadas são crescentes. Graficamente,

A função real f definida por $f(x) = x^2$ não é função afim.

f e as progressões aritméticas

Muito provavelmente, as características anteriores de f , ou mesmo os itens da atividade, tenham transmitido alguma ideia da existência de uma progressão aritmética nessa função real. A tabela a seguir exhibe elementos do domínio em progressão aritmética, suas imagens e as diferenças consecutivas dessas imagens:

$x \in f$	$f(x)$	$f(x+1) - f(x)$
0	0	$1 - 0 = 1$
1	1	$4 - 1 = 3$
2	4	$9 - 4 = 5$
3	9	$16 - 9 = 7$
4	16	$25 - 16 = 9$
5	25	$36 - 25 = 11$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Escolhendo x do domínio de f e um $r \in \mathbb{R}$ constante, podemos analisar a situação da tabela acima de uma forma mais geral:

$x \in f$	$f(x)$	$f(x+r) - f(x)$
x	x^2	$(x+r)^2 - x^2 = 2xr + 1 \cdot r^2$
$x+r$	$(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2$	$(x+2r)^2 - (x+r)^2 = 2xr + 3r^2 = (2xr + r^2) + 2r^2$
$x+2r$	$(x+2r)^2 = x^2 + 4xr + 4r^2$	$(x+3r)^2 - (x+2r)^2 = 2xr + 5r^2 = (2xr + r^2) + 2 \cdot 2r^2$
$x+3r$	$(x+3r)^2 = x^2 + 6xr + 9r^2$	$(x+4r)^2 - (x+3r)^2 = 2xr + 7r^2 = (2xr + r^2) + 3 \cdot 2r^2$
$x+4r$	$(x+4r)^2 = x^2 + 8xr + 16r^2$	$(x+5r)^2 - (x+4r)^2 = 2xr + 9r^2 = (2xr + r^2) + 4 \cdot 2r^2$
$x+5r$	$(x+5r)^2 = x^2 + 10xr + 25r^2$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

E esse padrão continua, nos permitindo perceber que

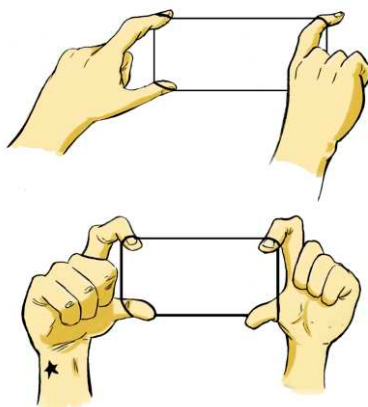
Na função real f definida por $f(x) = x^2$ as diferenças entre imagens consecutivas, geradas por uma parte do domínio cujos elementos estejam em progressão aritmética, formam também uma progressão aritmética com primeiro termo igual a $2xr + r^2$ e razão $2r^2$.

EXPLORANDO UM CASO DE OTIMIZAÇÃO

Perímetro fixo

Atividade 4

Imagine que você tenha um pedaço de barbante de 12 cm de comprimento e queira moldar um retângulo com ele e calcular sua área. A figura abaixo ajuda a ilustrar a situação.



- A situação em questão envolve quatro grandezas, aponte quais são.
- Quais grandezas descritas acima variam e quais não variam?
- Numa folha de papel ou similar, copie a tabela a seguir e complete-a.

Base	Altura	Área
0		
2		
4		
6		

- O que ocorreu com a área para os valores da base iguais a 0 e 6? Esses valores devem ser considerados em nossa análise da situação?
- Quais as medidas da base do retângulo que apresentaram área máxima no quadro acima?
- Assumindo a base do retângulo como x , e sua altura como $h(x)$, exiba uma expressão algébrica que representa a medida da altura desse retângulo em função de x . A expressão $h(x)$, encontrada pode ser considerada uma função afim? Com que domínios e imagens?
- Assumindo a base do retângulo como x , a altura $h(x)$ encontrada no item anterior e sua área como $A(x)$, exiba uma expressão que apresente a área deste retângulo em função de x .
- Verifique se a relação encontrada pode ser dada por $A(x) = -(x^2 - 6x)$, caso contrário refaça os itens anteriores.

- i) A expressão $A(x)$, encontrada pode ser considerada uma função afim? Por quê?
- j) Observe que a relação apresentada no item h), possui dentro do parênteses um binômio que pode ser parte de um trinômio quadrado perfeito, qual seria o terceiro termo que faria o binômio se transformar num trinômio quadrado perfeito?
- k) Agora repita a relação: $A(x) = -(x^2 - 6x + \square - \square)$ acrescentando e retirando o número encontrado no item anterior.
- l) Ao fatorar a relação do item anterior podemos recair na forma: $A(x) = a(x - p)^2 + q$, quais os valores de a , p e q , que foram encontrados neste processo de fatoração?
- m) Levando em consideração a forma apresentada no item anterior, e ao analisarmos apenas o termo $(x - p)^2$, Existe algum valor de x que torne a expressão negativa? e qual valor de x torna a expressão nula?
- n) Ao analisarmos $A(x) = -(x - 3)^2 + 9$, existe algum valor de x que faça $A(x)$ ser maior que 9? Por quê?
- o) Qual a área máxima do Retângulo?
- p) Qual o valor de x , que gera a área máxima?

ORGANIZANDO MÁXIMOS OU MÍNIMOS

Na atividade *Perímetro fixo* você foi auxiliado na transformação da lei de formação da função A descrita por $A(x) = 6x - x^2$ para $A(x) = -(x - 3)^2 + 9$. Qual o objetivo dessa transformação? Que vantagem há nisso?

Sabe-se que uma função real do tipo $f(x) = x^2$ tem a propriedade $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, qualquer variável real que esteja elevada ao quadrado tem resultado mínimo igual a zero e pode crescer tanto quanto se queira. Imagine agora que esse quadrado seja multiplicada por um número negativo, os resultados que podiam crescer o quanto se quisesse, agora ficam negativos e, na verdade, passam a diminuir tanto quanto se queira e o zero passa a ser o seu maior valor. As tabelas abaixo evidenciam isso:

x	x^2
0	0
$\pm\sqrt{3}$	3
$\pm\frac{13}{3}$	$\frac{169}{9}$
± 8	64
± 10	100
± 100	10000
± 1000	1000000

x	$-x^2$
0	-0
$\pm\sqrt{3}$	-3
$\pm\frac{13}{3}$	$-\frac{169}{9}$
± 8	-64
± 10	-100
± 100	-10000
± 1000	-1000000

A análise feita gera a regra que segue.

Para $f(x) = ax^2$ temos:

$a > 0$, f tem resultado **mínimo** em $x^2 = 0$;

$a = 0$, f é constante e nula, ou seja $f(x) = 0$;

$a < 0$, f tem resultado **máximo** em $x^2 = 0$.

A forma $A(x) = 6xx^2$ tem duas variações simultâneas: $6x$ e $-x^2$, o que torna mais difícil a determinação de um possível resultado máximo de A . Já a forma $A(x) = -(x - 3)^2 + 9$ só tem uma variação: $-(x - 3)^2$, que pela regra descrita acima tem um resultado máximo que ocorre em $(x - 3)^2 = 0$, logo o resultado máximo de A é $0 + 9 = 9$. Destacamos com isso o quanto fica simples a determinação de um resultado máximo ou mínimo em situações em que podemos reduzir as variações a um único termo ao quadrado.

Diante do que conhecemos até aqui, podemos finalmente estabelecer que toda função real f do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$, pode ser transformada em sua forma equivalente $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Em ambos os formatos, chamaremos f de **função quadrática**. Denominando $f(x) = ax^2 + bx + c$ de **forma polinomial** e $f(x) = a(x - p)^2 + q$ de **forma canônica** da função quadrática.

A forma $f(x) = a(x - p)^2 + q$ permite identificar rapidamente qual é o resultado máximo ou mínimo da função conforme a seja positivo ou negativo. Considere, como exemplo do que foi concluído, que o tamanho do barbante seja de 14 cm. Sua área $A(x)$ em função da base x será $A(x) = 7x - x^2$. Fatorando $A(x)$, teremos:

$$\begin{aligned} A(x) &= 7x - x^2 \\ A(x) &= -x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x \\ A(x) &= -x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x - \frac{49}{4} + \frac{49}{4} \\ A(x) &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4}\right) + \frac{49}{4} \\ A(x) &= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} \end{aligned}$$

A função tem um resultado máximo, pois $a = -1 < 0$ e este valor aparece quando $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0$, ou seja, $x = \frac{7}{2}$. Assim, o valor máximo da função é $A(x) = 0 + \frac{49}{4} = \frac{49}{4}$.

De modo geral, $f(x) = ax^2 + bx + c$ equivale a $f(x) = a(x - p)^2 + q$ e, avaliado se existe o resultado máximo ou o mínimo para a função real, esse resultado é o ponto (p, q) que passaremos a chamar de ponto de máximo ou ponto de mínimo, dependendo do valor a .

Obtendo o ponto de máximo ou de mínimo através da forma geral

Você já deve ter percebido que a forma geral modificada para a forma canônica, exibe imediatamente o ponto (p, q) . No entanto, podemos usar essa técnica no sentido inverso para que a mudança para a forma canônica não seja o único modo de obter (p, q) . Assim, vamos desenvolver a *forma canônica* de f :

$$\begin{aligned} a(x - p)^2 + q &= \\ a(x^2 - 2px + p^2) + q &= \\ ax^2 - 2apx + ap^2 + q &= \\ ax^2 - 2apx + (ap^2 + q) &= \end{aligned}$$

Comparando esse resultado com sua forma equivalente *forma geral* $ax^2 + bx + c$, que é a *forma geral* temos:

$$ax^2 = ax^2 \Rightarrow a = a \quad (1)$$

$$-2apx = bx \Rightarrow p = -\frac{b}{2a} \quad (2)$$

$$ap^2 + q = c \Rightarrow q = c - ap^2 \quad (3)$$

A conclusão (1) não traz novidade, a (2) nos mostra como determinar p a partir da *forma geral* e (3) revelará quem é q , mas precisaremos simplificar um pouco mais a expressão. Para isso, usaremos (2) em (3):

$$\begin{aligned} q &= c - a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c \cdot 1 - a \cdot \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= c \cdot \frac{4a}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Lembrando, que em equações do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, a expressão " $b^2 - 4ac$ " é representada pela letra grega Δ , ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

Teorema 3 Seja a função quadrática f , de domínio real, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou pela sua forma equivalente $f(x) = a(x - p)^2 + q$, temos

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

e uma das situações a seguir é verdadeira:

- (i) (p, q) é o **ponto de mínimo**, se $a > 0$;
- (ii) (p, q) é o **ponto de máximo**, se $a < 0$.

PARA SABER + SOMA DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Menino Gauss

Atividade 5

No livro *Antologia Matemática* de Malba Tahan, conta um episódio cuja personagem principal seria o “príncipe da matemática” Carl Frederick **Gauss** (*1777 – †1855). Não se sabe se o episódio é real, mas conta-se que aos sete anos de idade, chegando para mais um dia de aula, *Gauss* e seus colegas teriam encontrado o professor com pouca paciência. Assim, o professor, com o intuito de entreter seus alunos por longo tempo e não precisar dar-lhes qualquer atenção, pediu para que todos somassem os números naturais desde 1 até 100. Contudo, o jovem *Gauss* em pouco tempo levou o resultado do exercício para o professor e este, incrédulo do feito, teria mandado *Gauss* para a direção. Mais tarde, tudo se esclareceu e o professor reconheceu o acerto no método e no resultado dado pelo jovem e desculpou-se.

Como o jovem *Gauss* teria obtido este resultado por um método aparentemente desconhecido do enfurecido professor e com tanta rapidez?

Com a finalidade de responder a essa pergunta sugerimos uma atividade. Ela necessitará de uma fita métrica.



Figura 4.15: Imagem de [Pastorius](#) CC-BY

Como as fitas métricas comercializadas tem um tamanho padrão, em nossa atividade vamos entender como o jovem *Gauss* fez a soma começando por somar os números da fita métrica, ou seja, vamos começar resolvendo a expressão

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 147 + 148 + 149 + 150$$

- a) De posse da fita métrica, perceba que ela tem os dois lados numerados. Cada um desses lados tem todos os números que queremos somar?
- b) Qual o número que corresponde ao verso (outro lado da fita) do número 1? E quais são os números dos versos correspondentes de 18 e 75?

- c) Agora, vamos fazer algumas somas de um número com o seu correspondente no verso da fita. Faça:
- 1+ seu correspondente;
 - 15+ seu correspondente;
 - 31+ seu correspondente;
 - 49+ seu correspondente;
 - 75+ seu correspondente.
- d) Qual o resultado obtido sempre que se soma um número com o seu correspondente no verso desta fita?
- e) Com base na resposta do item anterior, qual o resultado da soma de todos os números dos dois lados dessa fita?
- f) A soma de todos os números em ambos os lados da fita é o resultado que queríamos obter?
- g) Que operação devemos fazer com a soma de todos os números da fita para que ele seja o resultado da expressão

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 147 + 148 + 149 + 150 ?$$

Qual é o valor dessa expressão?

- h) Imagine agora uma outra fita que tenha em cada lado, todos os números de 1 até 100.

Um dos lados

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

O outro lado

100	99	98	97	96	95	94	93
-----	----	----	----	----	----	----	----

Utilizando o mesmo raciocínio, tente responder a mesma pergunta feita para a turma do jovem *Gauss*, ou seja, quanto dá $1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$?

- i) E se a fita fosse até o número natural n ?

Um dos lados

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

O outro lado

n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$n-6$	$n-7$
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Com o que foi aprendido, obtenha uma expressão para o resultado da soma dos n primeiros números naturais. Ou seja, tente expressar em função de n , o resultado de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$.

Números triangulares

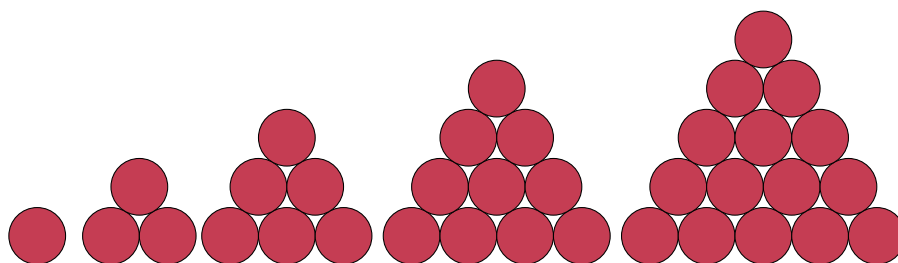
Atividade 6

No capítulo **Introdução às Funções**, uma das **atividades** sugere que você determine a relação entre uma sequência de figuras e a quantidade de pontos usados para compor cada figura.

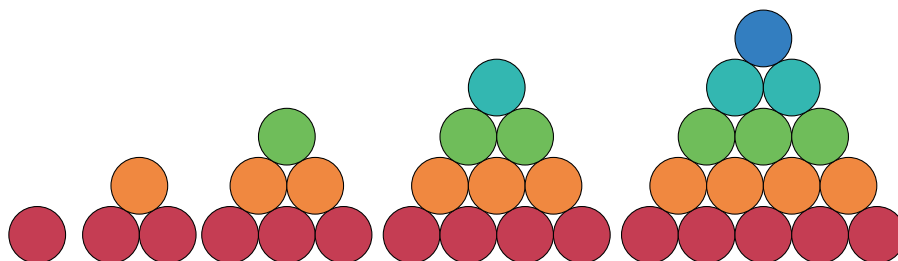


As quantidades de pontos em cada figura são comumente chamadas de números poligonais. Assim, $(1, 4, 9, 16, \dots)$ são números quadrados; $(1, 5, 12, 22, \dots)$ são números pentagonais; etc.

Nesta atividade, vamos pensar sobre os números triangulares. A imagem a seguir exibe os cinco primeiros:



- Escreva a sequência de números triangulares até o sexto termo.
- Os números triangulares formam uma progressão aritmética?
- A figura a seguir, destaca as linhas de cada triângulo, uma de cada cor. Escreva o total de bolinhas de **cada um desses triângulos** como soma das quantidades das suas linhas.
Exemplo: $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$



- d) Após o item anterior, que relação você percebe entre os números triangulares e o episódio do menino *Gauss*?
- e) Com base nessa relação, você seria capaz de determinar o centésimo número triangular? Determine-o.
- f) Chamando de T_n o número triangular da posição n , escreva a relação entre n e T_n .

De modo mais geral, a soma dos primeiros termos de qualquer progressão aritmética é expressa por uma função quadrática.

Isso acontece porque o método que usamos para somar números naturais, que formam uma progressão aritmética, continua válido para uma progressão aritmética diferente dessa. Observe.

$$\begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array}$$

Somando um elemento de cada linha e na ordem escrita teremos:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Fazendo uma analogia com a atividade, é fato (verificável de maneira simples) que todas as parcelas dessa soma são iguais, além disso, a quantidade de parcelas é dada pela mesma da quantidade de elementos da progressão. E também, temos que cada par dentro dos parênteses exibe um elemento que, em relação às sequências de onde foram extraídos, varia em $+r$, enquanto o outro varia $-r$, onde r é a razão da progressão aritmética. Assim, dispomos de n parcelas iguais a, por exemplo, $a_1 + a_n$. Já podemos concluir o teorema a seguir:

Teorema 4 Dada a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots)$, a soma dos seus n primeiros termos será indicada por S_n e

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Contudo, sabe-se que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e a relação da soma dos primeiros termos da progressão aritmética pode ainda ser apresentada conforme segue:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{[a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r] \cdot n}{2} = \frac{[a_1 \cdot n + a_1 \cdot n + (n \cdot r - r) \cdot n]}{2} = \frac{2a_1n + n^2r - rn}{2} \\ S_n &= \frac{r}{2} \cdot n^2 + \frac{(2a_1 - r)}{2} \cdot n \end{aligned}$$

que é uma função quadrática dada em sua forma polinomial (com $c = 0$) e domínio discreto $\mathbb{N}^*$.

A expressão que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, em função de n , é uma **função quadrática**.

EXPLORANDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico e a forma canônica

Atividade 7

Para melhor explorarmos essa atividade sugerimos a versão online, disponível nos links a seguir:

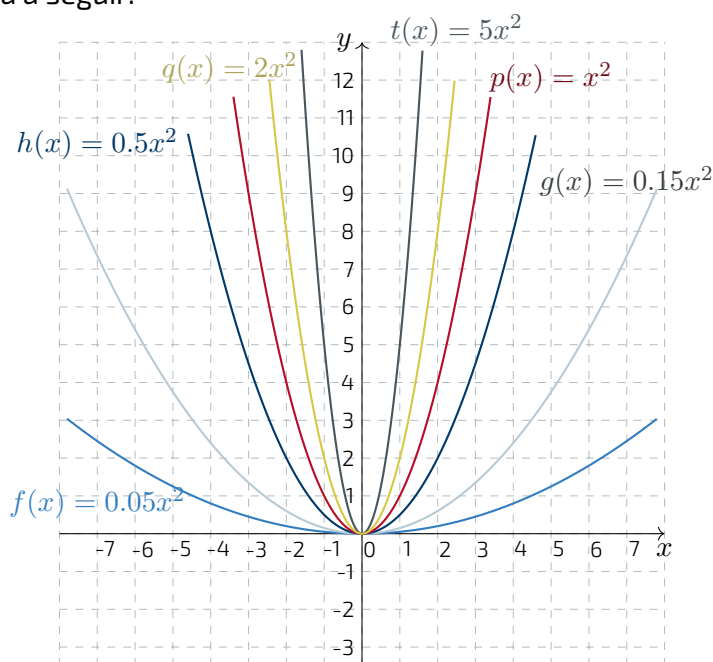
- Parte 1: [Forma Canônica e o parâmetro 'a'](#)
- Parte 2: [Forma Canônica e o parâmetro 'p'](#)
- Parte 3: [Forma Canônica e o parâmetro 'q'](#)
- Parte 4: [Forma Canônica](#)

Caso não seja possível, segue a atividade que corresponde à apresentada nos "links":

Na atividade [Em busca de padrões em \$f\(x\) = x^2\$](#) , você teve a oportunidade de explorar as propriedades do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, já na atividade 3, você foi apresentado a um processo que o levou a transformar a relação quadrática dada na forma polinomial: $f(x) = ax^2 + bx + c$ para forma canônica $f(x) = a(x - p)^2 + q$. O objetivo desta atividade é que você consiga perceber as mudanças ocorridas no gráfico da função f (dada em sua forma canônica) acarretadas pelas variações dos coeficientes a , p e q . Esperamos que além de você ter contato com novos conceitos, comprove e consolide os conceitos abordados nas atividades anteriores deste capítulo.

Parte 1

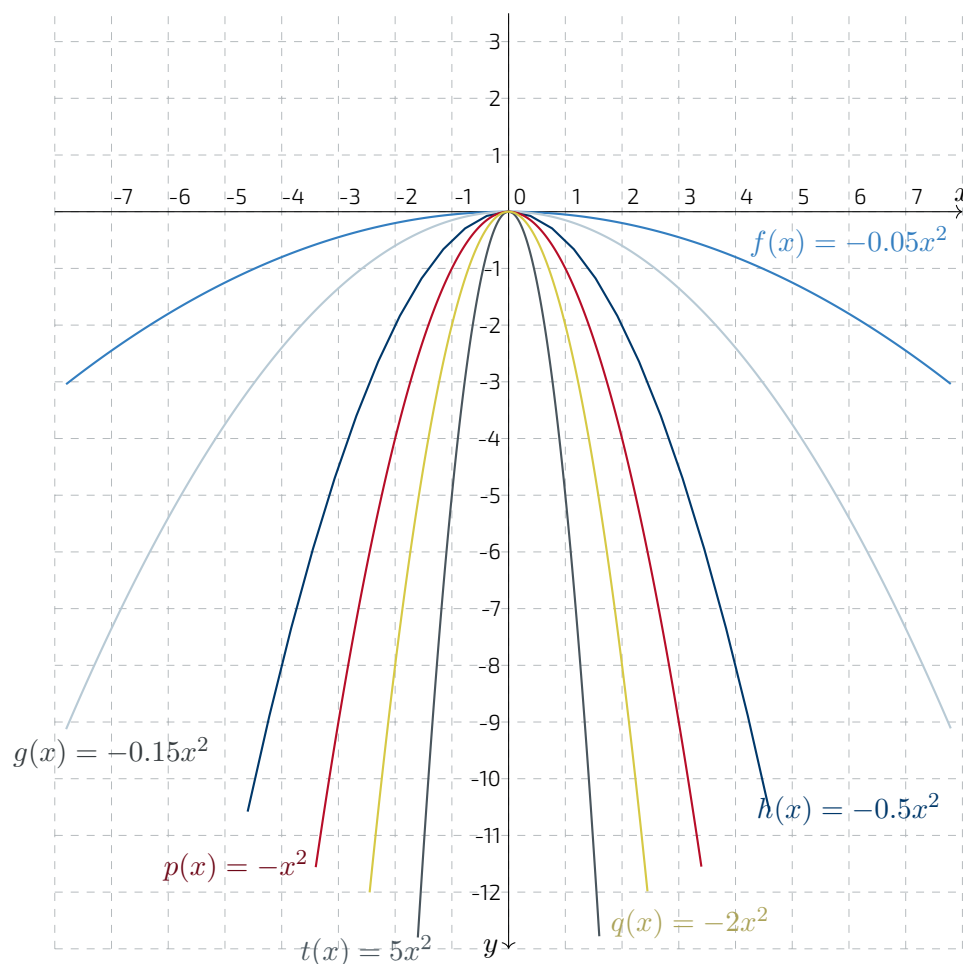
Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, ao assumirmos $p = q = 0$ temos que $f(x) = ax^2$, onde analisaremos as variações dos valores de $a > 0$, observando a figura a seguir:



Note que os gráficos apresentados na figura acima apresentam apenas valores de a maiores que zero, e que a curva em questão é côncava, com base nessa afirmação responda:

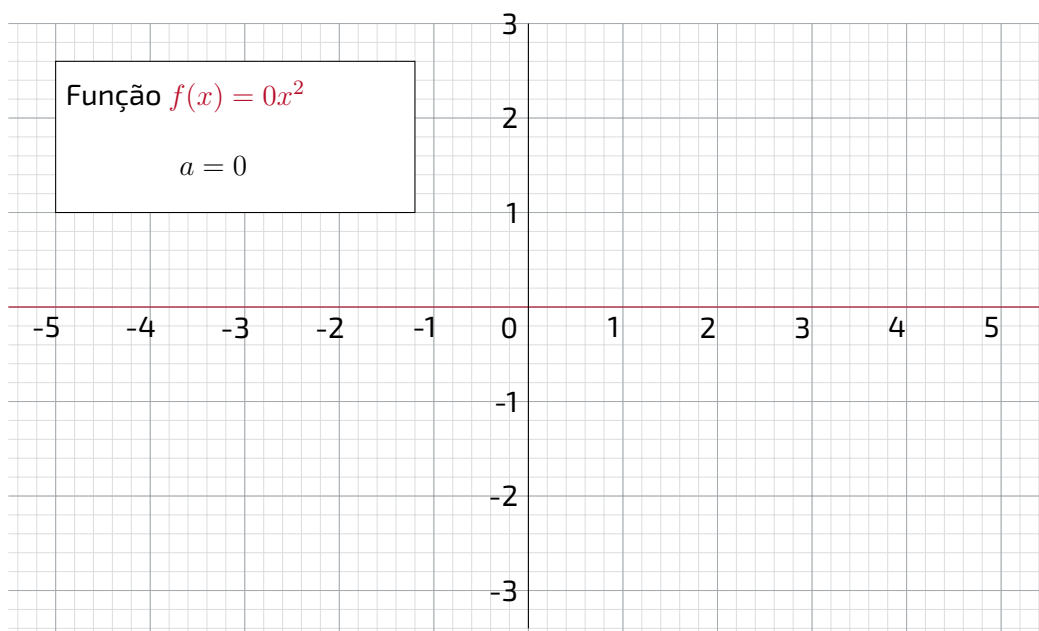
- Quando o valor de a aumenta, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- Quando o valor de a se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- Tente explicar com suas palavras uma justificativa para as respostas dadas no item anterior.

Observe as novas figuras a seguir que apresentam novos valores de $a < 0$.



- Quando o valor de a diminui (fica "mais negativo"), a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- Quando o valor de a se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?

A figura a seguir apresenta o gráfico da função f definida anteriormente para $a = 0$.



f) Com base no gráfico acima, comente cada uma das alternativas a seguir, que indicam o comportamento do gráfico quando $a = 0$.

- i) A curva some, pois não é mais função.
- ii) Não existe mais curva, o gráfico apresentado é uma reta representada pela função constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 0$
- iii) A curva ainda existe mais fica invisível, pois a abertura de sua concavidade tende ao infinito.

A curva se transforma numa reta que está sobreposta ao eixo das abscissas.

g) Você deve ter notado que quando o valor de $a > 0$ a concavidade da curva aponta para cima, e quando $a < 0$ a concavidade aponta para baixo. Com base neste fato, reescreva as falsas afirmações a seguir, tornando-as verdadeiras:

- i) Quando $a > 0$ a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.
- ii) Quando $a > 0$ a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.
- iii) Quando $a < 0$ a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.
- iv) Quando $a < 0$ a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.

Parte 2

Dada a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $g(x) = a(x - p)^2 + q$, tomemos $a = 1$ e $q = 0$ e analisaremos os valores de p na função $f(x) = (x - p)^2$ observando a figura a seguir:

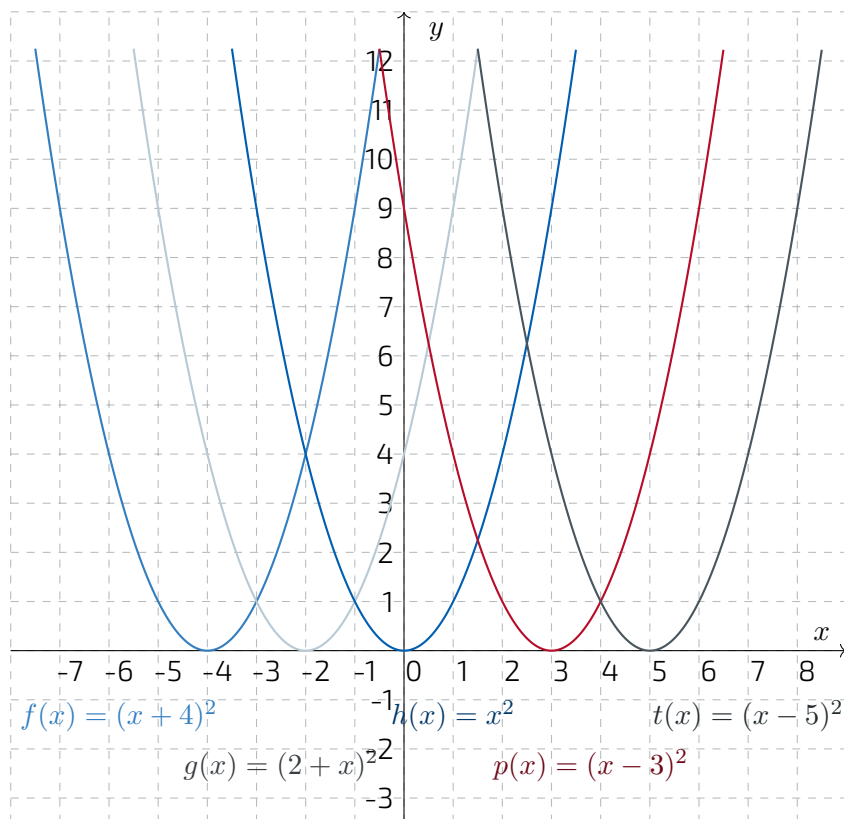


Figura 4.16: Variações de p .

Variações de p .

Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

- a)** Quando os valores de p aumentam a curva se desloca para
- ☐) direita.
 - ☐) cima.
 - ☐) esquerda.
 - ☐) baixo.
- b)** Quando os valores de p diminuem a curva se desloca para
- ☐) direita.
 - ☐) cima.
 - ☐) esquerda.
 - ☐) baixo.

- c) Você deve ter notado que a curva tangencia o eixo das abscissas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Qual é a relação dos valores de p com este ponto?
- ☐ O ponto de tangência em questão é $(-p, 0)$.
 - ☐ O ponto de tangência em questão é $(0, -p)$.
 - ☐ O ponto de tangência em questão é $(0, p)$.
 - ☐ O ponto de tangência em questão é $(p, 0)$.
- d) O movimento que a curva faz quando p varia, é uma
- ☐ translação vertical.
 - ☐ translação horizontal.
 - ☐ rotação em 360° .
 - ☐ rotação em 180° .

Parte 3

Dada a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $g(x) = a(x - p)^2 + q$, tomemos $a = 1$ e $p = 0$ e analisaremos os valores de q na função $f(x) = x^2 + q$ observando a figura a seguir:

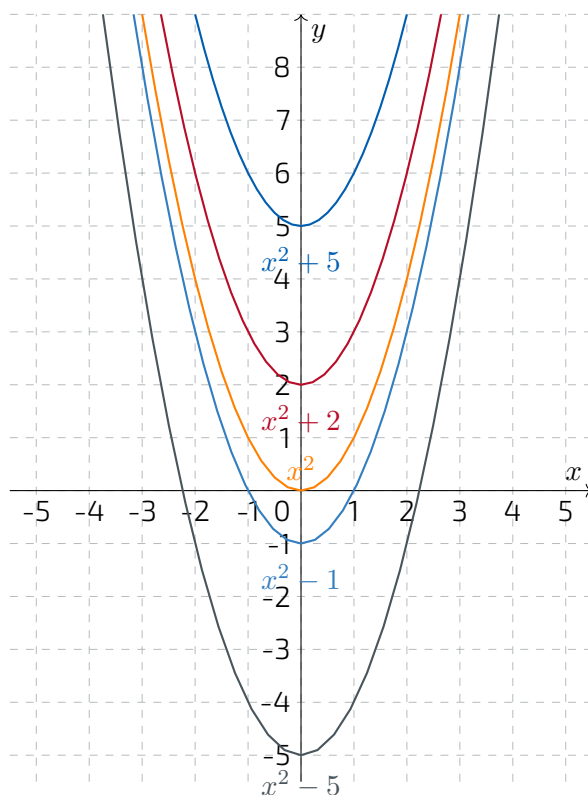


Figura 4.17: Variação de q

Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

- a) Quando os valores de q aumentam a curva se desloca para
- ☐) direita.
 - ☐) cima.
 - ☐) esquerda.
 - ☐) baixo.
- b) Quando os valores de q diminuem a curva se desloca para
- ☐) direita.
 - ☐) cima.
 - ☐) esquerda.
 - ☐) baixo.
- c) Você deve ter notado que a curva intersecta o eixo das ordenadas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Quais são relações dos valores de q com esse ponto?
- ☐) O ponto de intersecção é $(-q, 0)$.
 - ☐) O ponto de intersecção é $(q, 0)$.
 - ☐) O ponto de intersecção é $(0, -q)$.
 - ☐) O ponto de intersecção é $(0, q)$.
 - ☐) Na figura, q representa o maior valor que essa função atinge.
 - ☐) Na figura, q representa o menor valor que essa função atinge.
- d) O movimento que a curva faz quando q varia, é uma
- ☐) translação vertical.
 - ☐) translação horizontal.
 - ☐) rotação em 360° .
 - ☐) rotação em 180° .

Parte 4

Em cada uma das partes anteriores, estudamos as variações gráficas que cada um dos valores de a , p e q fazem na curva. Para elucidarmos essas ideias, convidamos a variar esses valores juntos na função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

- a) Observe as figuras a seguir, e note que em todas os valores de a são sempre iguais a 1, já os valores de p e q variam.

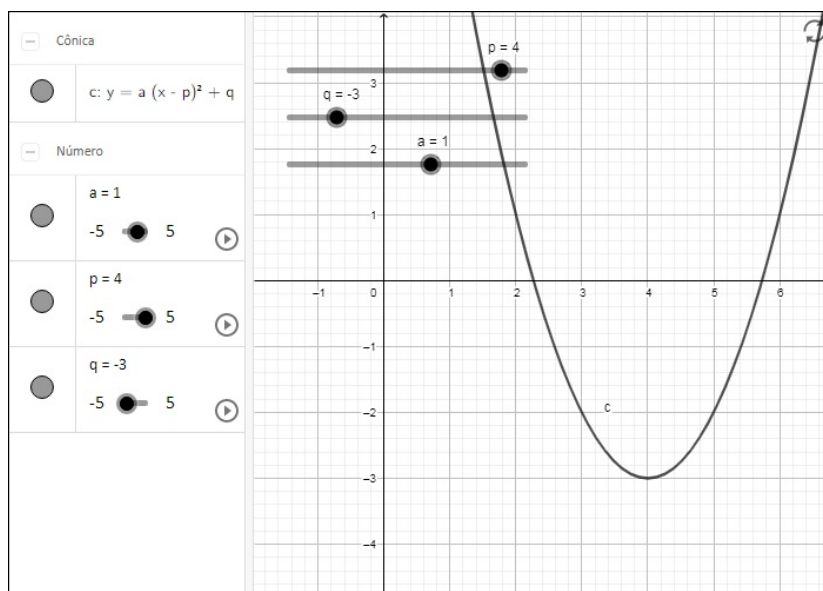


Figura 4.18: ($p = 4$ e $q = -3$)

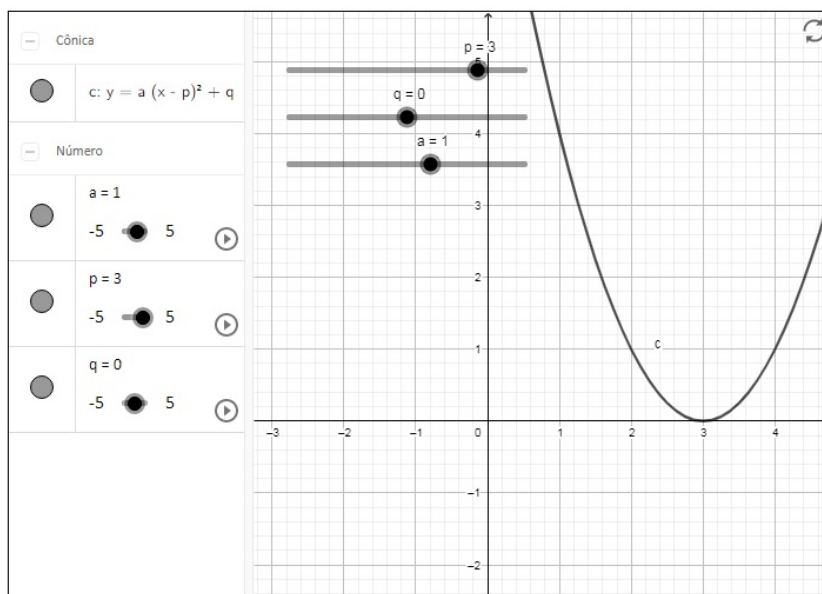


Figura 4.19: ($p = 3$ e $q = 0$)

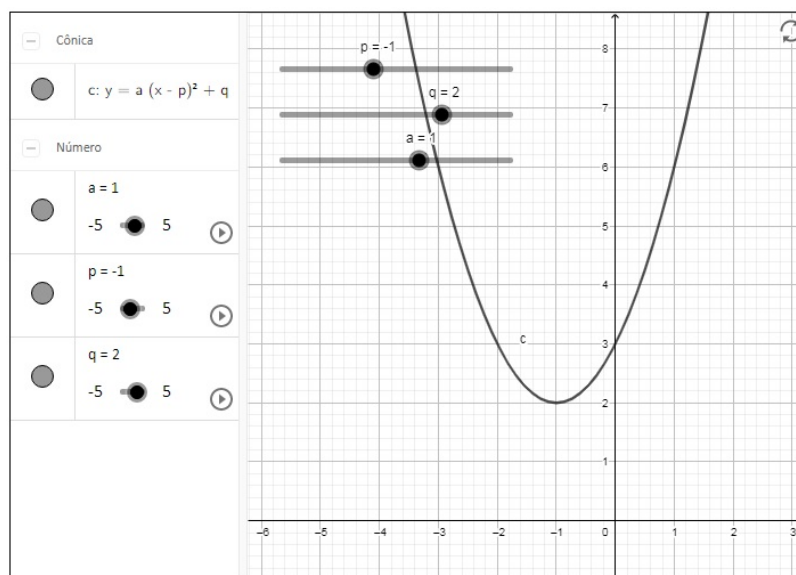


Figura 4.20: ($p = -1$ e $q = 2$)

- i) A variação de p faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal)?
 - ii) A variação de q faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal)?
- b) As figuras a seguir mostram as variações obtidas no gráfico para os valores de $a = 1$, ($p = 5$ e $q = 5$); ($p = -5$ e $q = 5$); em seguida ($p = 5$ e $q = -5$) e por último ($p = -5$ e $q = -5$). Já vimos anteriormente que existe um ponto no gráfico em que a função deixa de ser decrescente e passa a ser crescente, este ponto chamamos de **vértice** da curva.

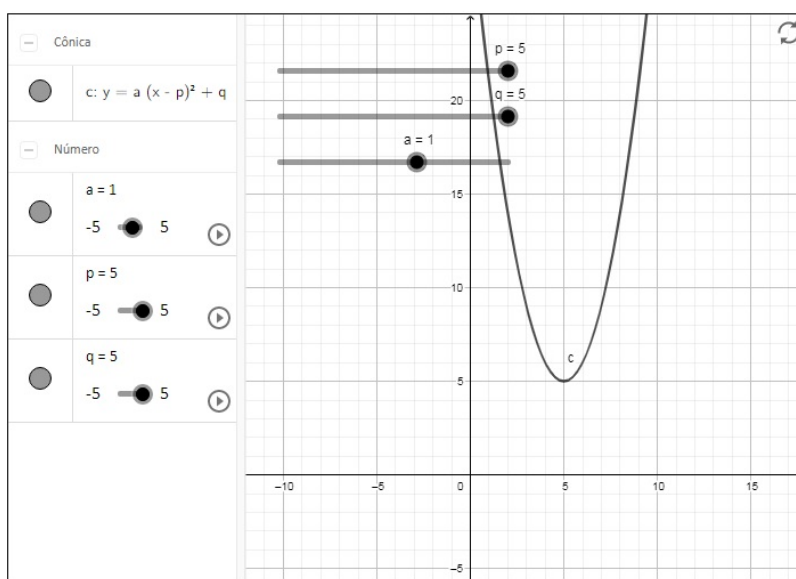


Figura 4.21: ($p = 5$ e $q = 5$)

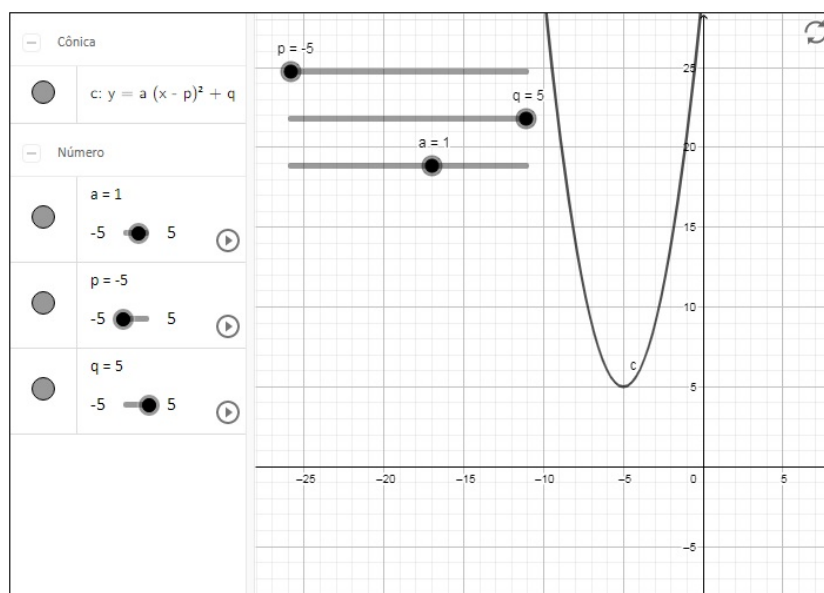


Figura 4.22: ($p = -5$ e $q = 5$)

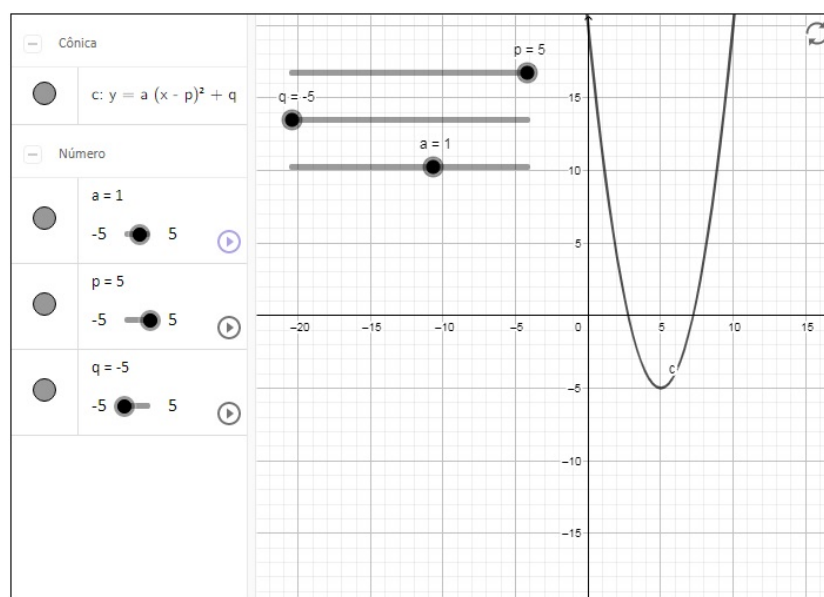


Figura 4.23: ($p = 5$ e $q = -5$)

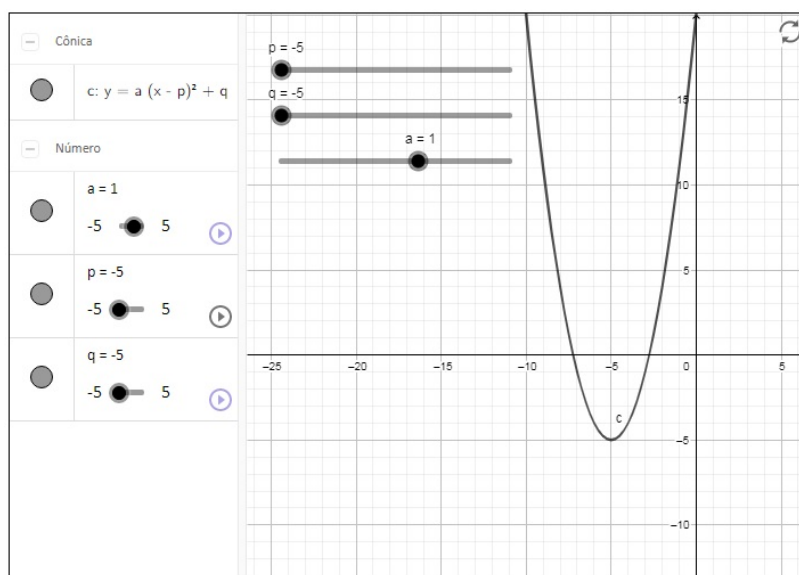


Figura 4.24: ($p = -5$ e $q = -5$)

Exiba as coordenadas do vértice em função de p e q .

- c) Observe que ao mantermos os valores de $a = 1$, $p = 0$ e $q = 0$, temos a curva $y = x^2$. Considerando uma função f de Domínio D e imagem I dada por $f(x) = y$, utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos D e I estão definidos na atividade.

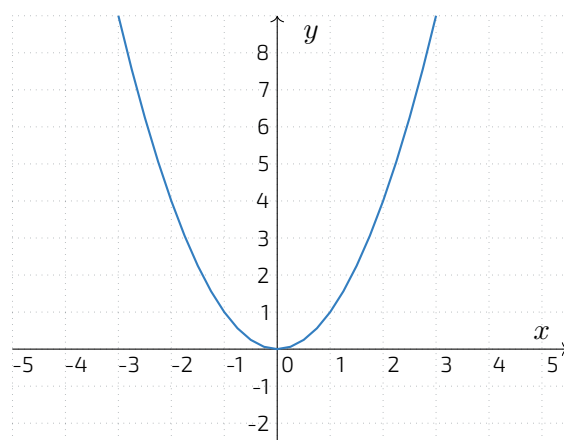


Figura 4.25: ($a = 1$; $p = q = 0$)

- () $D = [-5, 5]$ e $I = [0, 5]$
 () $D = [0, +\infty[$ e $I = [0, +\infty[$
 () $D = [0, 5]$ e $I = [-5, 5]$
 () $D = \mathbb{R}$ e $I = [0, +\infty[$
 () $D = \mathbb{R}$ e $I = \mathbb{R}$

- d) Observe que ao mantermos os valores de $a = -2$, $p = 3$ e $q = -4$, temos que $y = -2(x - 3)^2 - 4$. Considerando uma função f de Domínio D e imagem I dada por $f(x) = y$, utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos D e I estão definidos na atividade.

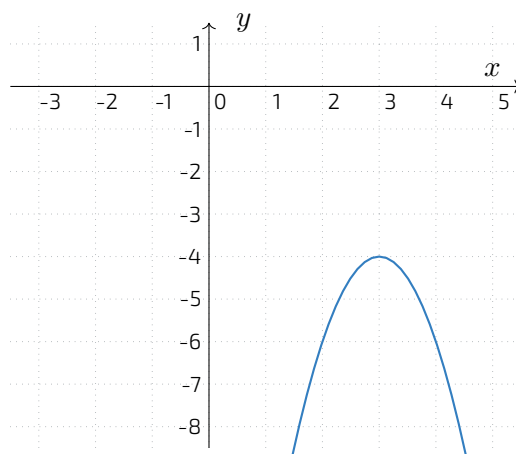


Figura 4.26: ($a = -2$, $p = 3$, $q = -4$)

- () $D = [-4, 3]$ e $I = [-4, 3]$
 () $D = \mathbb{R}$ e $I =] - \infty, -4]$
 () $D = [-5, 5]$ e $I = [-5, 5]$
 () $D = [-4, 3]$ e $I = [-4, +\infty[$
 () $D = \mathbb{R}$ e $I = \mathbb{R}$
- e) Em relação à função real f definida por $f(x) = a(x - p)^2 + q$, caso a assumia apenas valores **positivos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:
- () O valor de p representa o maior valor que f pode assumir.
 () O valor de p representa o menor valor que f pode assumir.
 () O valor de q representa o maior valor que f pode assumir.
 () O valor de q representa o menor valor que f pode assumir.
 () A função f , não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.
 () A função f , não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.
 () A função f , tem valores de máximo e mínimo.
- f) Em relação à função real f definida por $f(x) = a(x - p)^2 + q$, caso a assumia apenas valores **negativos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:
- () O valor de p representa o maior valor que f pode assumir.
 () O valor de p representa o menor valor que f pode assumir.
 () O valor de q representa o maior valor que f pode assumir.

- () O valor de q representa o menor valor que f pode assumir.
 - () A função f , não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.
 - () A função f , não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.
 - () A função f , tem valores de máximo e mínimo.
- g)** Ainda na função f ao assumirmos os valores de $a = 3$; $p = 1$ e $q = -2$, Assinale quais afirmações a seguir são verdadeiras.
- () O vértice da curva é $V = (3, 1)$.
 - () O vértice da curva é $V = (3, -2)$.
 - () O vértice da curva é $V = (1, -2)$.
 - () O vértice da curva é $V = (-2, 1)$.
 - () -2 , é o maior valor que a função f pode assumir.
 - () 3 , é o maior valor que a função f pode assumir.
 - () 1 , é o maior valor que a função f pode assumir.
 - () -2 , é o menor valor que a função f pode assumir.
 - () 3 , é o menor valor que a função f pode assumir.
 - () 1 , é o menor valor que a função f pode assumir.
 - () A concavidade da curva está voltada para cima, pois $a > 0$.
 - () A concavidade da curva está voltada para cima, pois $p > 0$.
 - () A concavidade da curva está voltada para cima, pois $q < 0$.
-

EXERCÍCIOS

- 1 Dadas as funções quadráticas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir na forma canônica, passe todas para forma polinomial representando-as graficamente.

a) $f(x) = 2(x - 5)^2 + 8$

b) $g(x) = -3(x + 2)^2 - 7$

- 2 Dadas as funções quadráticas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir na forma polinomial, passe todas para forma canônica representando-as graficamente.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

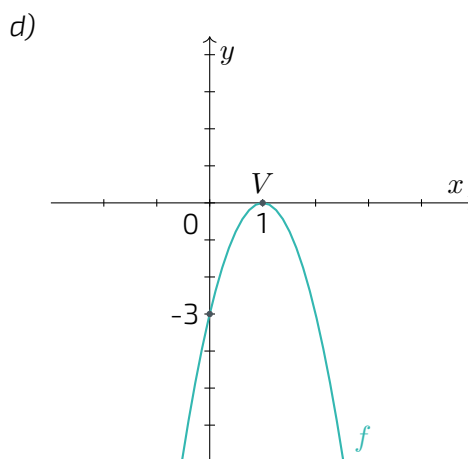
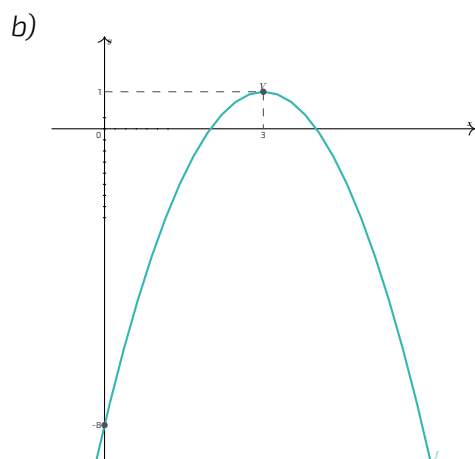
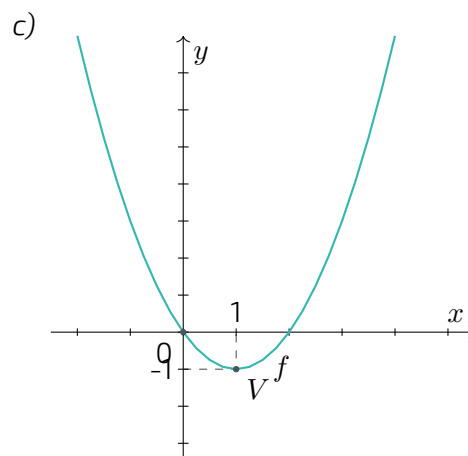
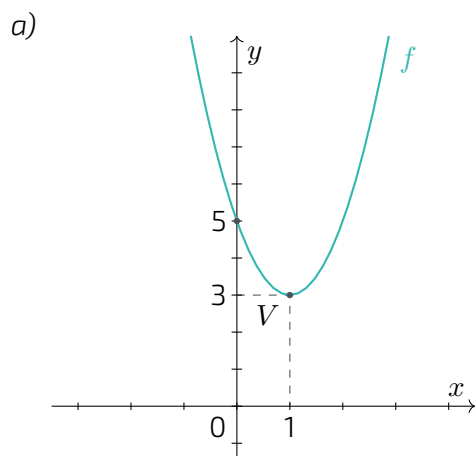
b) $f(x) = -x^2 + 8x$

c) $f(x) = 2x^2 + 8$

d) $f(x) = 2x^2 + 8x$

e) $f(x) = x^2 + x + 1$

- 3 Cada um dos gráficos a seguir representa uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exiba a forma canônica em cada caso.



ORGANIZANDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

A curva apresentada nas atividades anteriores foi descoberta e utilizada muito antes do surgimento do conceito de função. Os relatos históricos apontam que os gregos já utilizavam curvas obtidas por meio de cortes específicos em cones retos (denominadas *cônicas*), porém foram os textos de Apolônio (262 a.C. — 194 a.C.) que definiram e explicitaram as propriedades destas curvas. Das *cônicas* definidas por Apolônio, a que estamos estudando, é denominada de **parábola**.

A abordagem dada à **parábola** durante muitos séculos foi apenas geométrica, a seguir apresentamos sua definição geométrica:

Foco Dado um ponto F e uma reta d que não contém F , chamamos de **parábola** o conjunto dos pontos P , no plano definido por F e d , tais que P equidista de F e d . Onde denominamos F como *foco* e d como *reta diretriz*.

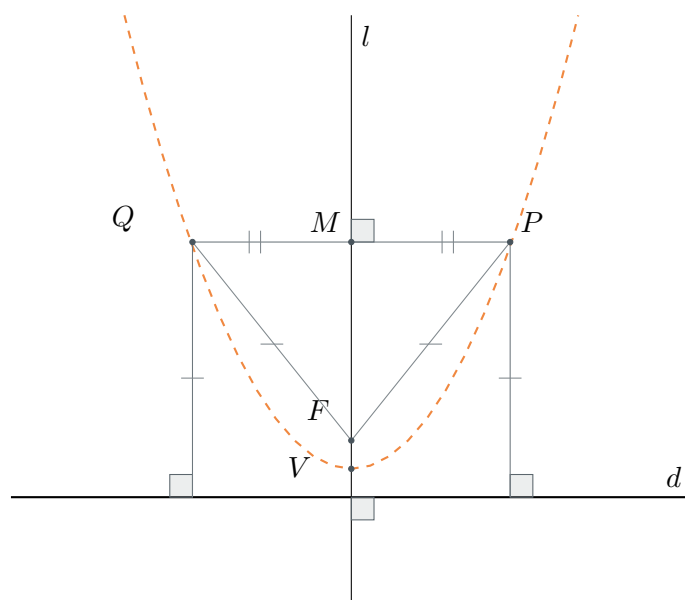


Figura 4.27: Parábola como Lugar Geométrico

Ou seja, $P \in \text{parábola} \equiv d(P, F) = d(P, d)$

Agora vamos mostrar que essa definição atende à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Na figura a seguir destacamos, além do gráfico da função f , os pontos $F = (0, \frac{1}{4})$ e a reta $d: y = -\frac{1}{4}$

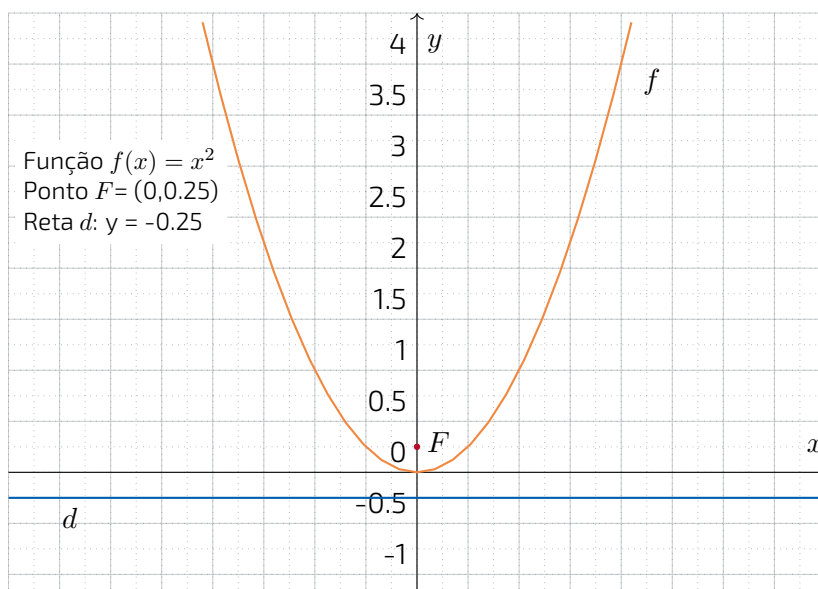


Figura 4.28: Parábola, Foco e diretriz

Sabemos que todos os pontos pertencentes à f são do tipo $P = (x, x^2)$ para que f satisfaça a definição anterior, temos que para todo P pertencente à f , a distância de P ao foco $F = (0, \frac{1}{4})$ seja a mesma distância de P à reta diretriz $d: y = -\frac{1}{4}$, e isto é fato, veja:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2}$$

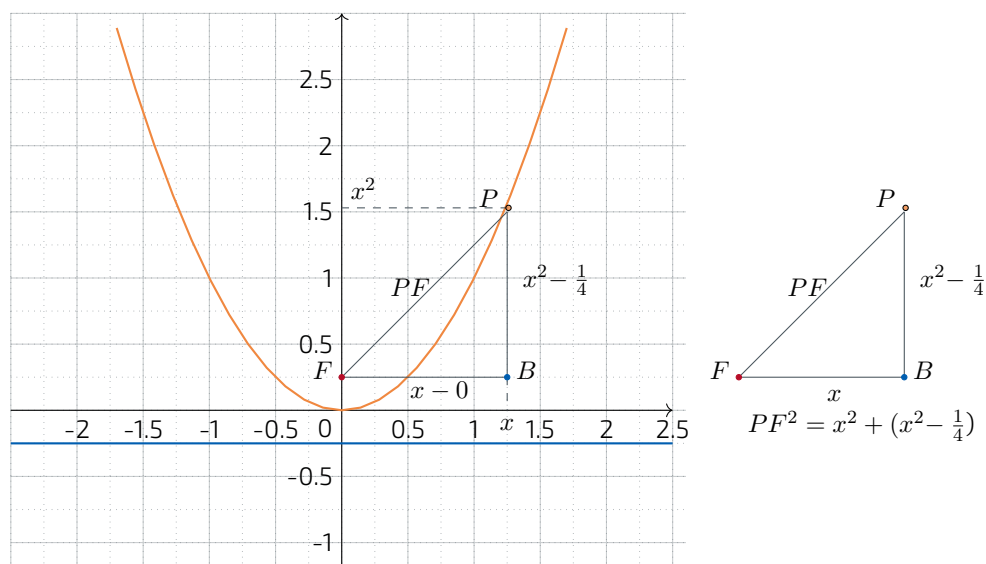
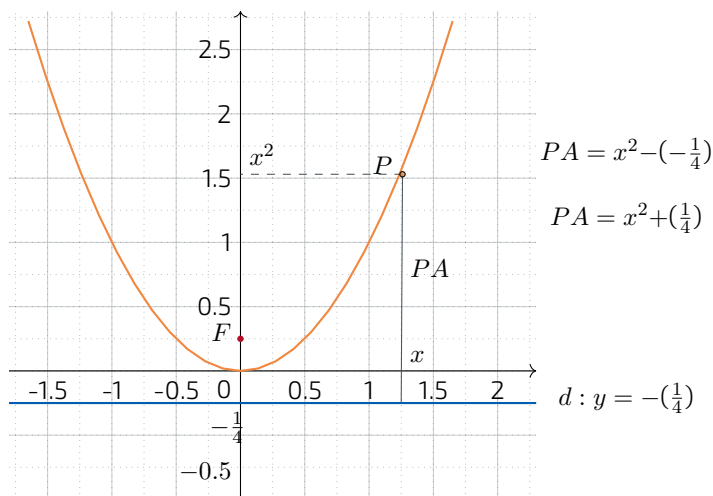


Figura 4.29: Distância de P a F

Por outro lado:

$$d(P, d) = x^2 + \frac{1}{4}$$

Figura 4.30: Distância de P à d

Como queremos $d(P, F) = d(P, d)$, temos:

$$\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2} = x^2 + \frac{1}{4}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2})^2 &= (x^2 + \frac{1}{4})^2 \\ x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2 &= (x^2 + \frac{1}{4})^2 \end{aligned}$$

Desenvolvendo teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + (x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}) &= x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} \\ x^4 + (x^2 - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{16} &= x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

E finalmente:

$$x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

Isso nos mostra que a curva descrita no gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é realmente uma **parábola**.

Agora utilizaremos os conceitos abordados na atividade *O gráfico e a forma canônica*.

- a) Observamos que a variação de a na curva $y = ax^2$ faz com que a concavidade da curva fique mais aberta quando a se aproxima de zero ou mais fechada quando a se afasta de zero, e também que o sinal de a indica se a concavidade aponta para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). É fácil demonstrar que o gráfico de toda função real f dada na forma $f(x) = ax^2$ é uma *parábola*. Note que o texto anterior, provamos para $a = 1$. Para generalizarmos, basta assumirmos o foco como $F = (0, \frac{1}{4a})$ e reta diretriz como a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

- b) Além disso vimos que as variações dos termos p e q da forma canônica $f(x) = a(x-p)^2 + q$ provocam as *translações* horizontais e verticais respectivamente. Como as translações não deformam as figuras transladadas, podemos inferir que os gráficos das funções reais dadas por $f(x) = a(x-p)^2 + q$ são parábolas. Cujo vértice é dado por $V = (p, q)$.
- c) Portanto toda função quadrática apresentada na sua forma canônica $f(x) = a(x-p)^2 + q$ e também em sua forma polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ têm gráficos parabólicos.

Toda parábola com reta diretriz paralela ao eixo das abscissas será uma função quadrática.

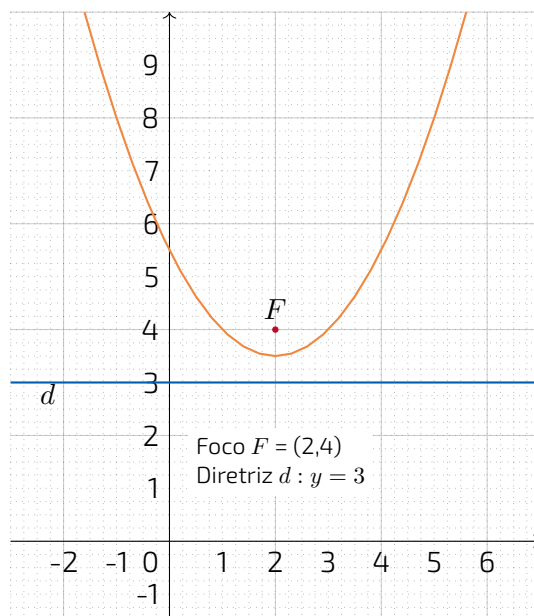
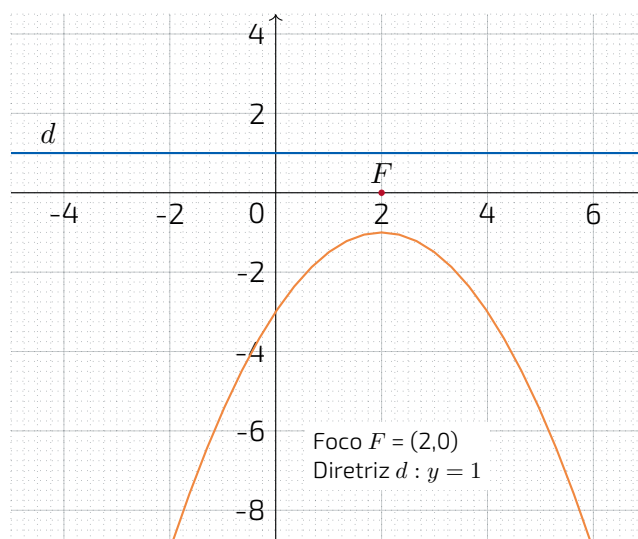


Figura 4.31: São funções de x em y



Note que se esta condição não for aceita, o gráfico apresentado, não será sequer uma função real de x em y , observe nas figuras a seguir:

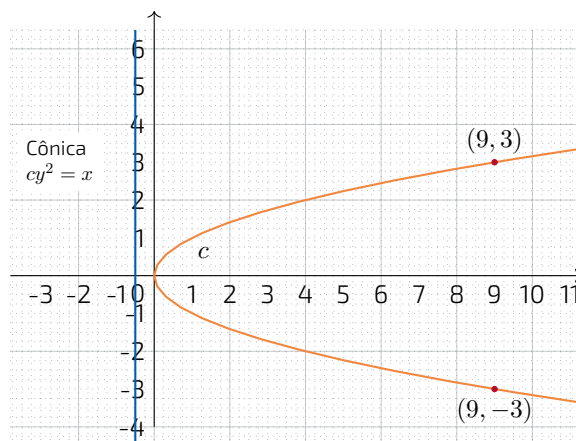


Figura 4.32: Não é função de x em y

Se a figura anterior, representar o gráfico da relação $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $x = y^2$, temos que ϕ não é função, já que a maioria dos pontos do domínio apresentam duas imagens, na figura destacamos apenas as duas imagens de $x = 9$.

Porém, **mesmo não sendo comum**, se assumirmos a relação $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $x = y^2$, temos que ϕ é função, só que de y em x .

Já no caso da figura a seguir, o gráfico, não representa uma função de x em y nem de y em x .

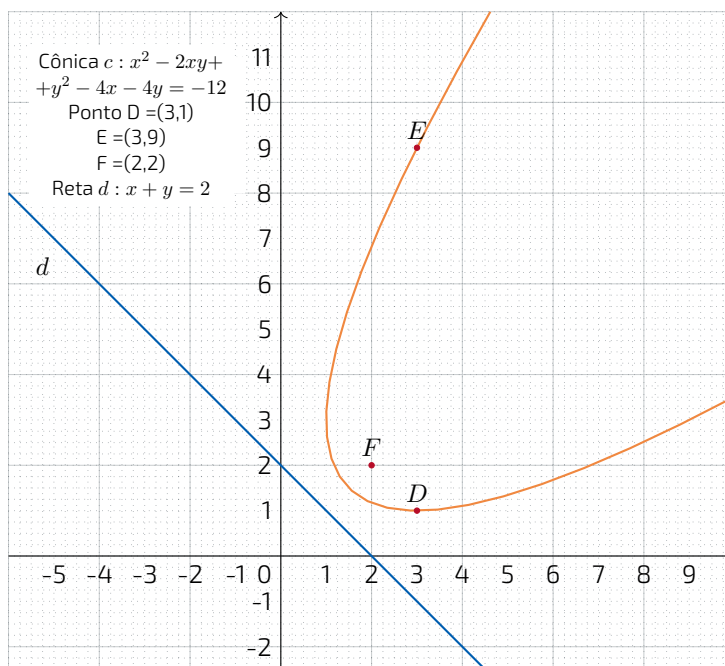


Figura 4.33: Não é função de x em y

Ou seja, para que uma parábola seja o gráfico de uma função quadrática de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ a condição necessária é que sua reta diretriz seja paralela ao eixo das abscissas.

PRATICANDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fugindo pela parábola

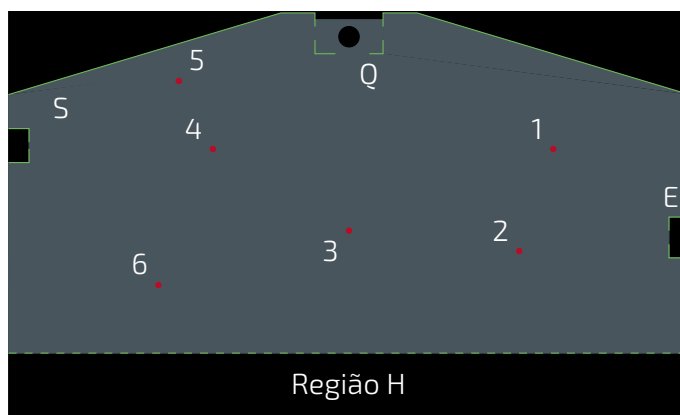
Atividade 8

Num jogo eletrônico em que você controla um oficial militar infiltrado. Dentre as fases de treinamento tático há uma que exhibe um salão vigiado por câmeras.



Figura 4.34: Imagem de divulgação.

Como as câmeras fazem movimento de vai e vem, é possível atravessar o salão sem ser detectado, e esse é o objetivo desta fase. A imagem a seguir mostra a vista de cima desta fase.



A região em cinza é uma região que, em algum momento, pode ser enxergada por câmera durante o movimento de vai e vem. A linha verde contínua representa alguma barreira intransponível; já as linhas tracejadas podem ser ultrapassadas pelo personagem para se abrigar das câmeras e terminar a fase. Em 'E' o personagem entra no cenário, essa passagem se fecha, em 'S' ele sai e vence a fase.

Os pontos em vermelho são posições possíveis para o personagem que, percebendo a proximidade do olhar de alguma das câmeras, deve correr e se esconder numa região em preto. Sendo assim, para cada posição do personagem, diga para onde ele deve correr: Região horizontal 'H' ou Região quadrada 'Q'.

PARA PESQUISAR

A definição geométrica da **parábola** apresentada inicialmente pode ser associada à referência histórica de corte de cone reto, para isso acesse o link do geogebra a seguir e mantenha os valores de t e a , variando apenas os valores de s .

O cone e as cônicas - excentricidade da parábola (<https://ggbm.at/Z38MMkqV>)

Para demonstrar que toda parábola é gerada por cortes específicos em cones retos, sugerimos uma leitura das páginas 13, 14 e 15 da dissertação de Monteiro (2014).

EXPLORANDO OTIMIZAÇÃO EM DOMÍNIO DISCRETO

Aumento na passagem

Atividade 9

Uma empresa de transporte rodoviário, faz o trajeto entre duas cidades brasileiras diariamente, e transporta mensalmente, uma média de 1200 passageiros. O custo individual da passagem cobrado pela empresa, é atualmente de R\$40,00, porém seus diretores estudam um aumento desse valor. Para isso contratam uma outra empresa para realizar uma pesquisa de mercado, a pesquisa realizada por essa empresa, estima que a cada R\$1,00 de aumento no preço da passagem, 10 passageiros deixarão de viajar pela transportadora. De posse desta informação, os diretores desejam saber qual é o preço de passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento dessa transportadora. Para isso vamos responder os itens a seguir:

- a) Se aumentarmos em R\$2,00 a passagem qual será seu novo preço? Qual a nova quantidade de passageiros? Qual será o novo faturamento em reais? E se o aumento fosse de R\$12,00?
- b) Preencha a tabela a seguir, seguindo o padrão que modela a situação.

Aumento em reais	Novo preço	Nova quantidade de passageiros	Faturamento em reais
0	$40 + 1 \cdot 0 = 40$	$1\,200 - 10 \cdot 0 = 1\,200$	$40 \cdot 1\,200 = 48\,000$
10	$40 + 1 \cdot 10 = 50$	$1\,200 - 10 \cdot 10 = 1\,100$	$50 \cdot 1\,100 = 55\,000$
20	$40 + 1 \cdot 20 = 60$	$1\,200 - 10 \cdot 20 = 1\,000$	$60 \cdot 1\,000 = 60\,000$
30			
40			
50			
60			
70			
80			
90			
100			
110			
130			

- c) Escolha um dos planos cartesianos a seguir, para representar os pontos da tabela acima e os represente no plano escolhido.

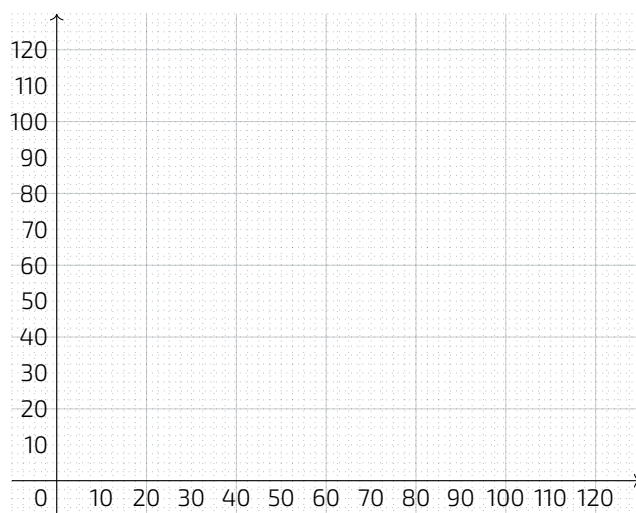


Figura 4.35: Gráfico A

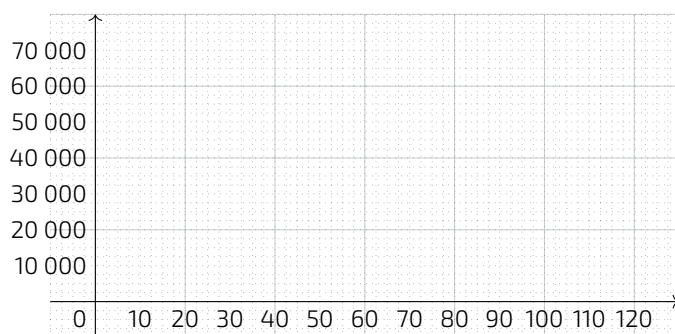


Figura 4.36: Gráfico B

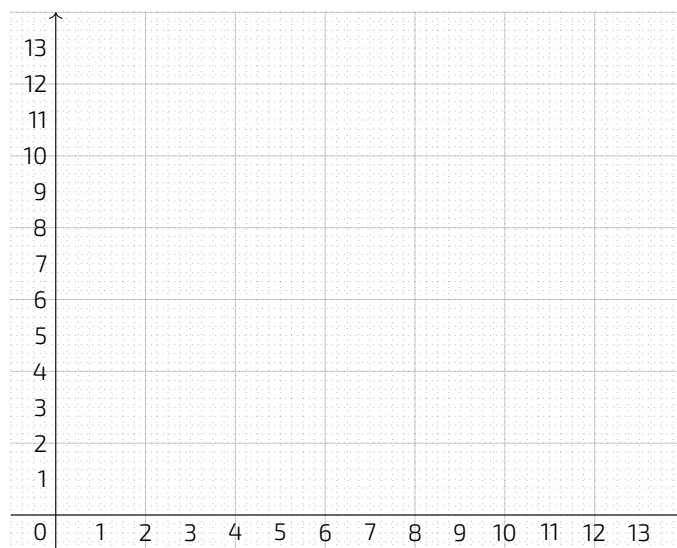


Figura 4.37: Gráfico C

- d) Qual "gráfico" você escolheu? Justifique sua escolha.
- e) A escala no "gráfico" escolhido é a mesma nos dois eixos? Quais os "gráficos" do item "b" possuem a mesma escala nos dois eixos?
- f) Quais as vantagens e desvantagens em ambos os casos (eixos em escalas distintas e eixos em mesma escala)?
- g) Explique o motivo do valor 130 estar na tabela e não estar no gráfico. Justifique levando em consideração o valor de sua imagem dentro do conceito da atividade.
- h) Podemos afirmar que os pontos obtidos, são pontos de uma parábola? Justifique sua resposta.
- i) Ao representarmos por x o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente o novo preço da passagem (já com o aumento de x reais).
- j) Ao representarmos por x o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente a nova quantidade mensal de passageiros (já com o aumento de x reais).
- k) Ao representarmos por x o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente o faturamento da empresa em função de x , dado por $F(x)$.
- l) Se representarmos expressão obtida no item anterior por uma função $F : A \rightarrow B$, onde A é seu domínio e B é sua imagem, podemos afirmar que F é uma função quadrática? Justifique sua resposta
- m) Apresente os conjuntos A (domínio de F) e B (imagem F) que satisfazem os valores possíveis na situação apresentada.
- n) Em que ponto o gráfico corta o eixo das ordenadas? E o que esse valor representa na situação?
- o) Em que ponto o gráfico corta o eixo das abscissas? O que esse ponto representa na situação?
- p) E se o domínio fosse o $\mathbb{R}$, qual seria o outro ponto de intersecção com o eixo das abscissas? Por que ele não é considerado na situação?
- q) Utilize o processo de completar quadrados e apresente a função F em sua forma canônica.
- r) Enfim, qual é o aumento no preço de passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento dessa transportadora?
- s) Qual é o valor desse faturamento máximo? Este valor aparece tabela e no gráfico?

EXERCÍCIOS

1 Trace os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 2x$

b) $f(x) = -x^2 + 9$

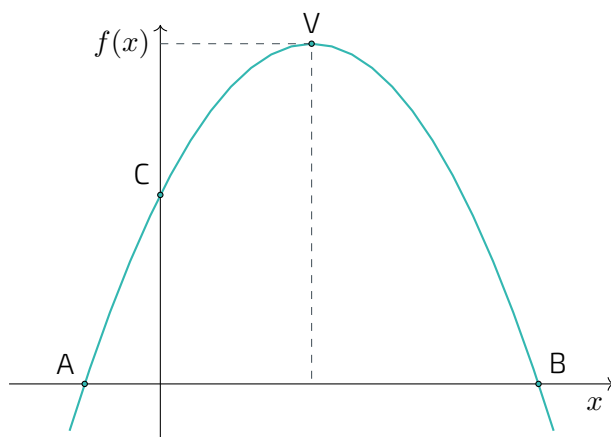
c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

e) $f(x) = -3x^2$

f) $f(x) = x^2 + x + 1$

2 Dada a função real f dada por $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, o gráfico da mesma está representado abaixo:



As coordenadas corretas dos pontos do gráfico são:

a) $C = (0, 5)$; $A = (-1, 0)$; $B = (5, 0)$; $V = (3, 9)$

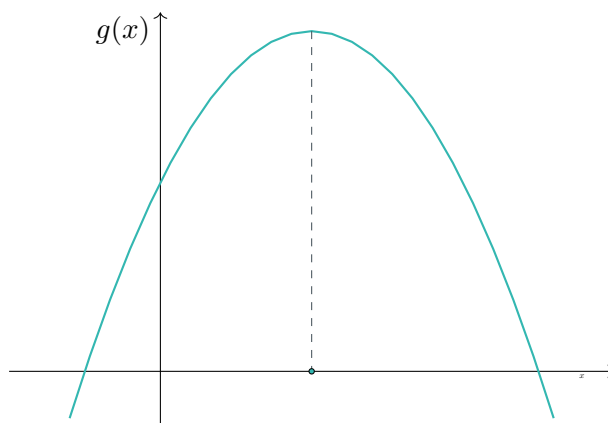
b) $C = (0, 4)$; $A = (0, -1)$; $B = (0, 5)$; $V = (2, 9)$

c) $C = (0, 5)$; $A = (0, -1)$; $B = (0, 5)$; $V = (9, 2)$

d) $C = (0, 5)$; $A = (-1, 0)$; $B = (4, 0)$; $V = (3, 4)$

e) $C = (0, 5)$; $A = (-1, 0)$; $B = (5, 0)$; $V = (2, 9)$

- 3 Seja a função real g , definida por $g(x) = ax^2 + bx + c$ representada no gráfico a seguir:



Pode-se afirmar que:

- a) $a > 0; b > 0; c < 0$
- b) $a > 0; b < 0; c > 0$
- c) $a < 0; b < 0; c < 0$
- d) $a < 0; b > 0; c < 0$
- e) $a < 0; b > 0; c > 0$

ORGANIZANDO INTERSEÇÃO COM OS EIXOS COORDENADOS

Em atividades anteriores, observamos as mudanças ocorridas no gráfico de uma função quadrática em sua forma canônica. Ao observarmos essa função definida em sua forma polinomial, também conseguimos perceber a influência que cada um de seus coeficientes (a , b e c) tem na posição do gráfico da função.

Dada a função real f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos descobrir em quais pontos f intersecta os eixos coordenados:

a) O eixo das ordenadas

Todo ponto pertencente ao eixo das ordenadas possui coordenada $x = 0$, logo $P = (0, f(0))$ pertence à parábola e ao eixo das ordenadas com $P = (0, c)$, pois:

$$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = c$$

b) O eixo das abscissas

Todo ponto pertencente ao eixo das abscissas possui coordenada $f(x) = 0$, logo $P = (x, 0)$ pertence à parábola e ao eixo das abscissas. E quando substituímos $f(x)$ por 0, temos uma equação do segundo grau, ela pode ser resolvida por diversas maneiras, a mais comum utilizando a fórmula quadrática, conhecida no Brasil erroneamente por fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ao resolvermos a equação quadrática é possível que encontremos os **zeros da função**, termo utilizado para os valores de x que fazem $f(x)$ ser nula, $f(x) = 0$. Neste caso obteremos o(s) ponto(s) em que o gráfico da função intersecta o eixo das abscissas.

Analisemos o sinal de Δ :

Caso 1

Para $\Delta > 0$, teremos na fórmula quadrática, uma raiz quadrada de um número positivo, sendo seu resultado um número real positivo qualquer (inteiro, racional não inteiro ou irracional), ao somarmos esse valor com $-b$ e dividirmos o resultado por $2a$, encontraremos um dos zeros da função f que chamaremos de x_1 ; ao subtrairmos esse valor de $-b$ e dividirmos o resultado por $2a$, teremos o outro zero da função f que chamaremos de x_2 , sendo:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto a parábola (gráfico de f) intersectará o eixo das abscissas em dois pontos: $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$

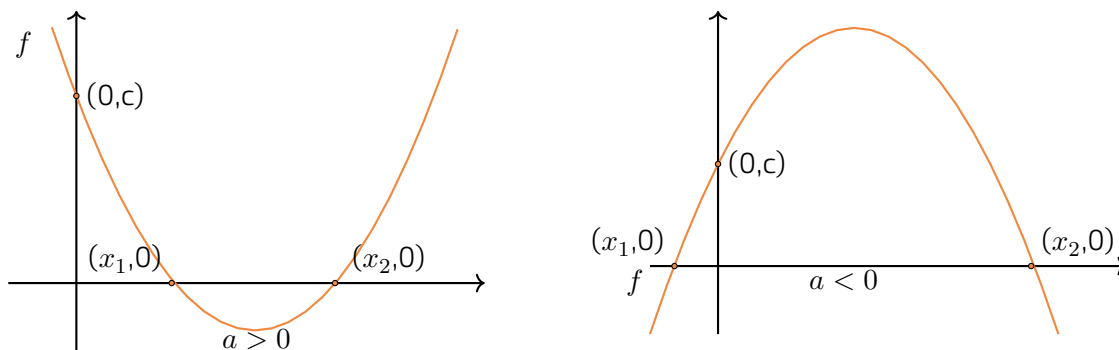
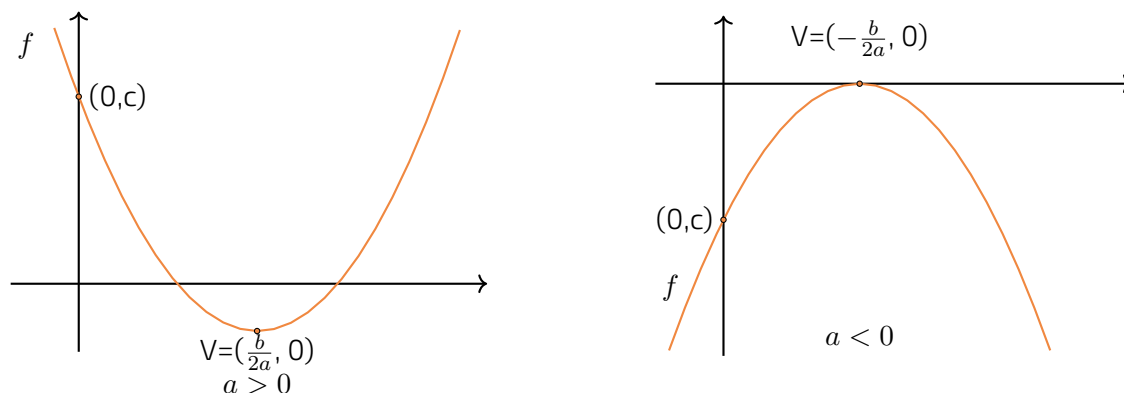


Figura 4.38: ($\Delta > 0$)

Caso 2

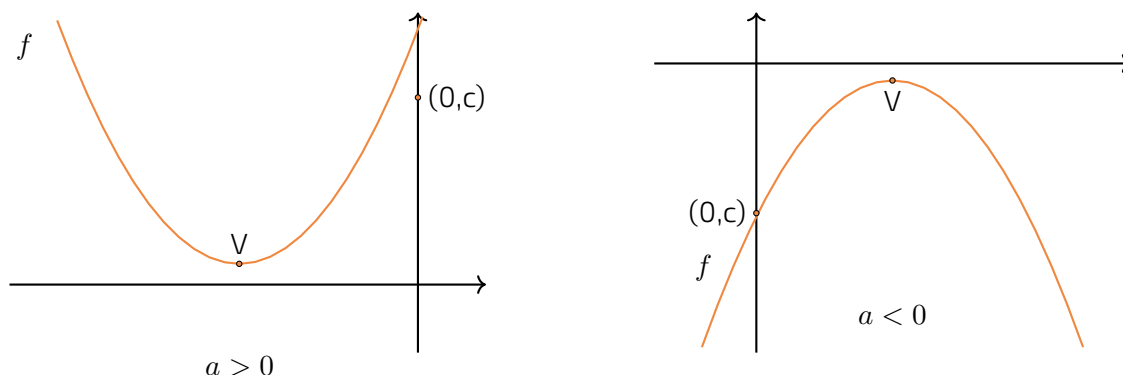
Para $\Delta = 0$, teremos na fórmula quadrática, uma raiz quadrada de zero, que resulta em zero, e somar ou subtrair 0 de $-b$ acharemos sempre $-b$, resultando assim num único zero de f , no caso: $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a} = p = x_v$. Note que esta expressão é a mesma apresentada anteriormente para a coordenada x do vértice da parábola.

Portanto a parábola (gráfico de f) "tocará" no eixo das abscissas em apenas um ponto: $V = (\frac{-b}{2a}, 0)$. Ou melhor, o eixo das abscissas será tangente à parábola no ponto V .

Figura 4.39: ($\Delta = 0$)**Caso 3**

Para $\Delta < 0$, teremos na fórmula quadrática, uma raiz quadrada de um número real negativo, que resulta no fato de não existir um valor de x real que atenda essa equação quadrática. Sendo assim o gráfico nem toca nem intersecta o eixo das abscissas, logo a função f não possuirá zeros.

Portanto a parábola (gráfico de f) ficará posicionada totalmente acima ($a > 0$) ou abaixo ($a < 0$) do eixo das abscissas.

Figura 4.40: ($\Delta < 0$)

Vale ressaltar que uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em sua forma polinomial por: $f(x) = ax^2 + bx + c$, além de poder ser representada em sua forma canônica: $f(x) = a(x-p)^2 + q$, também pode ser escrita em sua forma fatorada: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, onde x_1 e x_2 são os zeros de f .

Exemplo 1 : Seja a função real f definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$ representada graficamente por:

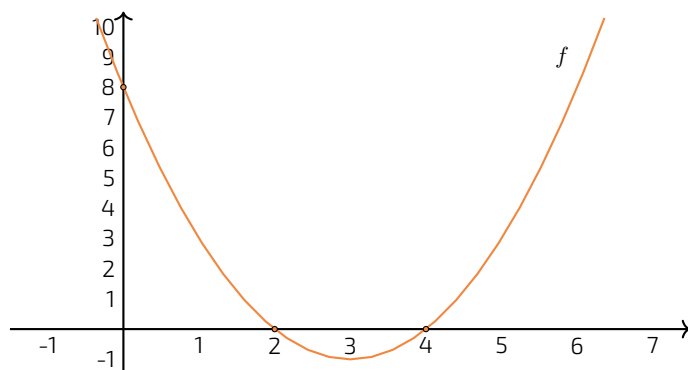


Figura 4.41: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Note que suas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$ (podemos descobrir esses valores utilizando a fórmula quadrática), note que a forma fatorada de f será:

$$f(x) = (x - 2)(x - 4)$$

Para retornarmos para a forma polinomial basta efetuarmos o produto indicado.

Exemplo 2: Seja a função real f definida por $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ representada graficamente por:

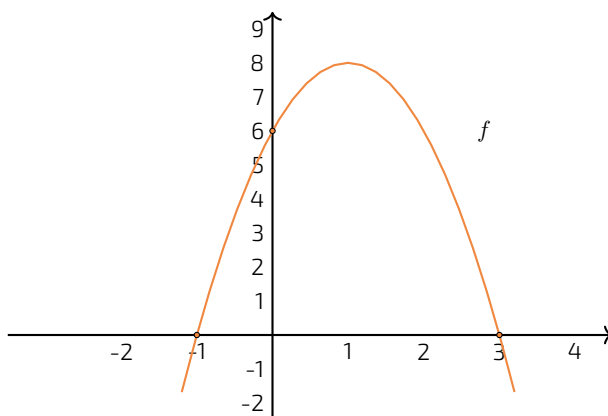


Figura 4.42: $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Note que suas raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$ (podemos descobrir esses valores utilizando a fórmula quadrática), note que a forma fatorada de f será:

$$f(x) = a(x - 3)(x + 1)$$

Substituindo o ponto $(0, 6)$ temos:

$$6 = a(0 - 3)(0 + 1)$$

$$6 = -3a$$

$$a = -2$$

Portanto, f na sua forma fatorada será dada por: $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$

Para retornarmos para a forma polinomial basta efetuarmos o produto indicado.

EXPLORANDO DETERMINANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Altura do arco da praça da Apoteose

Atividade 10

A passarela Professor Darcy Ribeiro (*1922, †1997), mais conhecida como Sambódromo, fica na cidade do Rio de Janeiro e foi construída em 1984. Com projeto arquitetônico de Oscar Niemeyer (*1907, †2012), ela foi concebida para ser o local fixo de uma das maiores festas populares do Brasil, o Carnaval. Ao final da passarela, encontra-se a praça da apoteose, com o museu do samba e um enorme arco cujo formato lembra o de uma parábola.



Figura 4.43: Foto de [Jorge Mello](#) CC-BY-SA

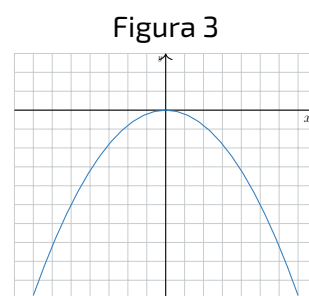
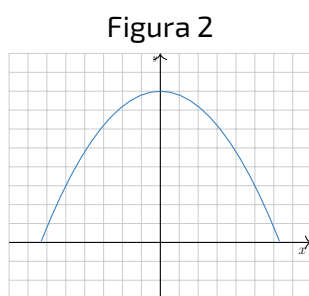
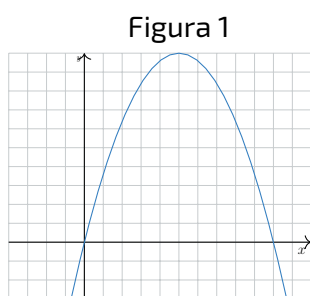
Em 2011, pela primeira vez desde a construção, a prefeitura providenciou a limpeza do arco.



Figura 4.44: [Banho nos arcos do Sambódromo](#)

A empresa que foi contratada para fazer essa limpeza, precisou ter uma estimativa da altura do arco, com a finalidade de saber se seu equipamento seria suficiente para a tarefa, já que a altura máxima que o equipamento suportaria, seria de 40 m de altura. Uma busca rápida na internet não forneceu o resultado esperado, apenas que o comprimento da base é de 50 m. Sendo assim, a estimativa teve que ser feita através de cálculos. Admitindo por aproximação que o arco seja parabólico, faça o que se pede:

- Quantas informações concretas são fornecidas para esta parábola?
- Caso você soubesse a função que descreve essa parábola, você seria capaz de determinar a altura aproximada do arco?
- Dentre as opções a seguir marque a que faz o rascunho do arco no plano cartesiano.



- Para essa escolha, qual o significado dos valores de x e de y ?
- Que pontos do plano cartesiano são conhecidos, se juntarmos a escolha gráfica com os dados fornecidos sobre o arco?
- Com base em sua escolha do rascunho gráfico mais adequado e considerando os pontos conhecidos da parábola, qual forma da função quadrática resulta em maior quantidade de informações conhecidas?
 - ☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - ☐ $f(x) = a(x - p)^2 + q$
 - ☐ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Quantos dados estão faltando para que seja conhecida a função que descreve esta parábola?
- Com o auxílio da calculadora gráfica em: Estimando a parábola(<https://ggbm.at/VFR6nWHM>) obtenha a informação que falta para obter a função que descreve a parábola.
- Qual a altura estimada para a altura do arco?
- A empresa contratada para a limpeza do arco teve capacidade de concluir o serviço com o equipamento que possuía?

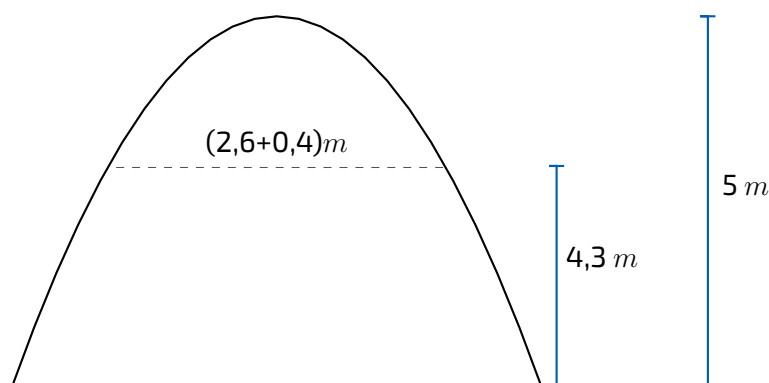
Mãos à obra!

Atividade 11

A prefeitura de uma cidade, com o fim de melhorar as atividades comerciais locais, fez um levantamento com produtores, fornecedores e compradores. Ficou claro que a redução no percurso até a cidade beneficiaria a todos. Por esse motivo, a prefeitura encomendou a construção de uma nova estrada, que exigiria dois túneis em certo trecho, um para cada sentido da estrada. O formato das entradas ou das saídas dos túneis, a pedido da prefeitura, deverão ser arcos parabólicos.

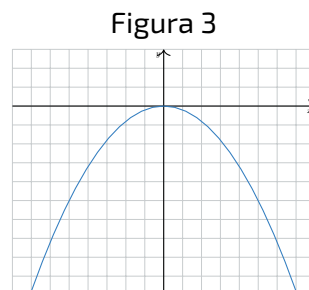
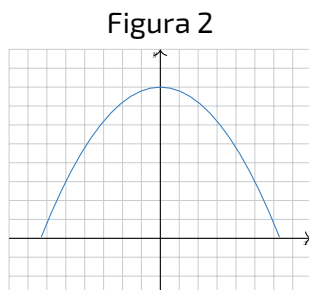
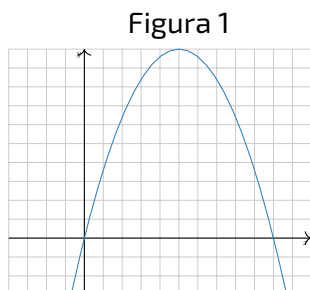


Limitações geológicas impedem que as alturas dos túneis sejam maiores do que 5 m e cada túnel deve permitir a passagem de caminhões comerciais, que tem 4,3 m de altura e 2,6 m de largura. Além disso, para que os caminhões não arrastem pelas paredes dos túneis, uma largura extra de 0,4 m deverá ser considerada conforme o rascunho a seguir.



Por fim, o projeto dos túneis deve satisfazer as condições mínimas apresentadas por questões econômicas. Sendo assim, a empresa deve calcular a largura das bases das entradas ou saídas dos túneis. [Para simplificar o texto, as medidas das entradas ou saídas dos túneis serão tratadas apenas por *medidas dos túneis*.]

- a) Caso você conhecesse a função que descreve essa parábola, você seria capaz de calcular a largura da base dos túneis?
- b) Dentre as opções a seguir marque a que faz o rascunho de um dos túneis no plano cartesiano.



- c) Para essa escolha, qual o significado dos valores de x e de y ?
- d) Que pontos do plano cartesiano são conhecidos, se juntarmos a escolha gráfica com os dados fornecidos as medidas dos túneis?
- e) Com base em sua escolha do rascunho gráfico mais adequado e considerando os pontos conhecidos da parábola, qual forma da função quadrática resulta em maior quantidade de informações conhecidas?
- ☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ☐ $f(x) = a(x - p)^2 + q$
- ☐ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- f) Quantos dados estão faltando para que seja conhecida a função que descreve esta parábola?
- g) Com alguma coordenada ainda não utilizada desta curva, determine a informação que falta para conhecer a função que descreve esta parábola.
- h) Determine, segundo esse plano cartesiano, as coordenadas das extremidades das bases desses túneis [Se julgar útil, use apenas a aproximação $\sqrt{14} = 3,75$].
- i) Com tudo que foi feito, qual a largura das bases desses túneis?

A jogada vencedora

Atividade 12

Vamos trabalhar aqui com um famoso jogo que simula lançamento de objetos. No caso, são “pássaros” caricaturados em formato de personagens de cinema que tem que impedir o plano dos “porcos verdes” de roubarem seus ovos e trazer destruição ao universo. A “variável” resistência do ar, por exemplo, não está incluída em boa parte das fases deste jogo.

Digamos que o programador de uma das fases decida, dentre todos os possíveis lançamentos, um que forneça a maior quantidade de pontos possível para a fase. Entendendo a tela como um plano cartesiano, o programador deve escolher a parábola que representará a “Jogada Vencedora”. A figura a seguir ilustra a situação.

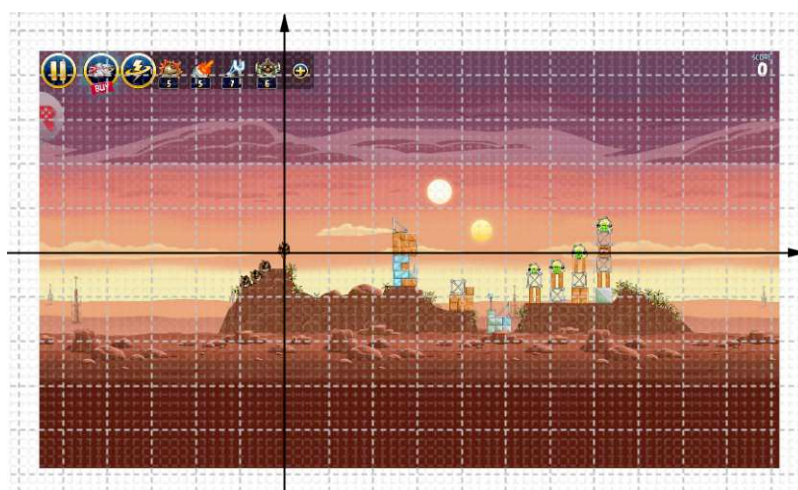
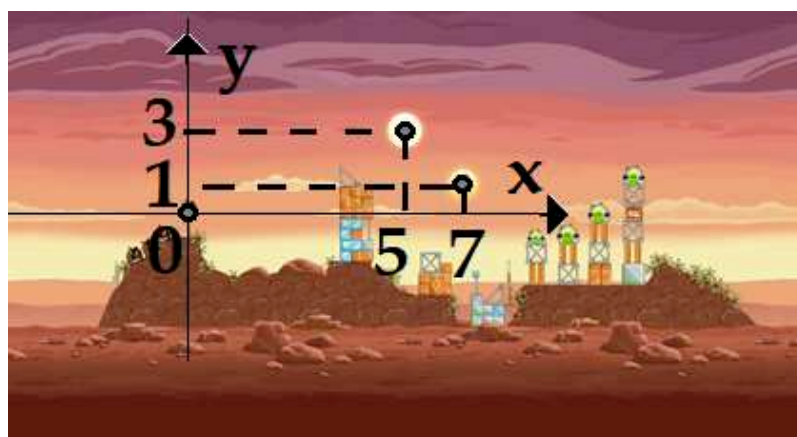


Figura 4.45: Imagem de divulgação.

Com a finalidade de inserir na programação a função que descreve a “Jogada Vencedora” o programador usou três coordenadas como referência: o pássaro e os dois “sóis”, cujas coordenadas estão destacadas a seguir.



- Quais são as coordenadas indicadas no gráfico pelo programador?
- Quais os significados dos valores de x e de y neste contexto?

- c) Das formas da função quadrática apresentadas a seguir, qual delas parece mais adequada diante das informações fornecidas?
- ☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - ☐ $f(x) = a(x - p)^2 + q$
 - ☐ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- d) Substituído a origem na forma escolhida do item anterior, qual a conclusão?
- e) Faça o mesmo para as outras duas coordenadas, mas considere também o que você concluiu no item anterior, e obtenha duas equações diferentes com variáveis a e b .
- f) Nas equações apresentadas no item anterior, uma tem o 49 e a outra tem o 25. Na que tem o 49, multiplique toda ela por 25 e, na outra, a que tem o 25, multiplique toda ela por 49. Feito isso, subtraia, membro a membro, as duas equações resultantes. Qual a conclusão?
- g) Mais uma vez vamos pegar as equações do item 'e'. Repare que uma tem um coeficiente 7 e a outra tem um coeficiente 5. Multiplique a que tem o 7 por 5 e a que tem o 5, por 7. Depois subtraia, membro a membro, as equações assim obtidas. Qual a conclusão?
- h) Qual a função que o programador vai inserir como a "Jogada Vencedora"?

ORGANIZANDO VANTAGENS DE CADA FORMA

Nesta seção vimos como obter a lei de formação de algumas funções quadráticas através de alguns dados iniciais. A forma escolhida para a lei de formação depende de cada informação dada, mas isso pode ser generalizado conforme passamos a apresentar.

Uso da forma $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Essa forma necessita de apenas duas coordenadas da parábola: o vértice que fornece p e q , e uma outra coordenada qualquer para que seja montada a equação que fornece o a .

Supondo que essa outra coordenada é (κ, λ) teremos:

$$\begin{aligned} a \cdot (\kappa - p)^2 + q &= \lambda \Rightarrow a \cdot (\kappa - p)^2 = \lambda - q \\ \Rightarrow a &= \frac{\lambda - q}{(\kappa - p)^2} \end{aligned}$$

Assim, fica concluída a tarefa de determinar a lei de formação procurada.

Uso da forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Aqui há a necessidade de três coordenadas, sendo os dois **zeros da função**, ou seja, ambos os valores devem existir e precisam ser diferentes; a terceira coordenada pode ser outra qualquer, incluindo o vértice. Contudo, dispondo do vértice a técnica anterior resulta num caminho mais rápido.

Aqui, mais uma vez, o a fica sendo o valor desconhecido a ser determinado com a terceira co-

ordenada citada, vamos supor que ela seja (κ, λ) . Assim,

$$a \cdot (\kappa - x_1) \cdot (\kappa - x_2) = \lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda}{(\kappa - x_1) \cdot (\kappa - x_2)}$$

Uso da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Se as coordenadas fornecidas não apresentarem nenhuma das particularidades relatadas nos casos anteriores, o caminho será o apresentado aqui. A utilização dos símbolos para representar os valores conhecidos ficariam pouco atrativo e não apresentariam uma simplificação digna de nota. Por esse motivo vamos seguir com um exemplo.

EXEMPLO 1

Uma equipe técnica está analisando máquinas que arremessam bolas de tênis para decidir qual a mais adequada às necessidades de treinamento dos atletas dessa equipe.

Com instrumento adequado, sem vento, eles mediram a altura da bola em alguns instantes de tempo, conforme tabela.

Tempo em segundos	1	2	3
Altura em metros	7	11	13

Sem vento, podemos considerar a trajetória da bola ao longo do tempo como uma parábola. Logo, as três coordenadas apresentadas na tabela permitem a determinação da função quadrática que dá a altura da bola em função do tempo.

Não sabemos se um desses pontos é o vértice e, com certeza, nenhum deles é zero da função. Teremos que utilizar a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Com os dados da tabela, obtemos três equações para a , b e c :

$$a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c = 7 \Rightarrow a + b + c = 7 \quad [1]$$

$$a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c = 11 \Rightarrow 4a + 2b + c = 11 \quad [2]$$

$$a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) + c = 13 \Rightarrow 9a + 3b + c = 13 \quad [3]$$

Subtraindo $[2] - [1]$ e $[3] - [2]$ obtemos outras duas equações, mas desta só para a e b :

$$3a + b = 11 - 7 \Rightarrow 3a + b = 4 \quad [4]$$

$$5a + b = 13 - 11 \Rightarrow 5a + b = 2 \quad [5]$$

Subtraindo $[5] - [4]$ ou percebendo que $[5]$ é igual $2a + (3a + b) = 2$ chega-se na mesma conclusão, $2a = -2 \Rightarrow a = -1$.

Substituindo esse resultado em $[4]$, temos que $3 \cdot (-1) + b = 4 \Rightarrow b = 7$.

Por fim, ao usar estes valores em $[1]$ encontramos $(-1) + (7) + c = 7 \Rightarrow c = 1$.

Assim, a função quadrática que dá a altura h da bola em função do tempo t para o arremesso analisado é $h(t) = -t^2 + 7t + 1$.

Com essa função podemos determinar de que altura a bola foi lançada, quanto tempo ela ficou no ar e até altura máxima que atingiu. Tente!

PARA SABER + A PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA

A *Parábola* possui uma propriedade que é bastante utilizada na composição de alguns objetos do nosso cotidiano. Na realidade, a propriedade acaba sendo utilizada em uma superfície tridimensional obtida com base na parábola. Para a construção dessa superfície, rotacio-se uma semiparábola em torno do seu eixo de simetria, formando o chamado *parabolóide de revolução*. Contudo, para simplificar a linguagem, vamos tratar esse parabolóide por **superfície parabólica**. Isto pode ser visto no vídeo *Parabolóide de Revolução* (<https://youtu.be/4Jk4T9oubDM>).

A Propriedade Refletora da Parábola

Se uma fonte de luz estiver fixada no foco da parábola que gerou uma superfície parabólica, todo raio que insidir sobre essa superfície será refletido paralelamente ao eixo de rotação (eixo de simetria).

No sentido oposto, se os raios, ou mesmo ondas, emitidos de uma fonte externa, mas que cheguem na superfície parabólica pela direção de retas paralelas ao eixo de rotação dessa superfície, estes raios ou ondas, serão refletidos para o foco.

Aplicações

Algumas das aplicações que relataremos aqui pode ser vista em vídeo através do programa [Isto é Matemática T03 E02](#).

■ O Farol Automotivo

Alguns faróis automotivos utilizam espelhos parabólicos para que os raios luminosos iluminem especificamente uma determinada região (no caso a rodovia), sem desperdiçar a emissão para regiões que não são de interesse luminoso do condutor do automóvel. Além disso, feixes não direcionados de luz, numa estrada escura, ofuscaria a visão do condutor. Portanto, além de um aproveitamento otimizado dos feixes luminosos, evita-se que eles prejudiquem a direção.

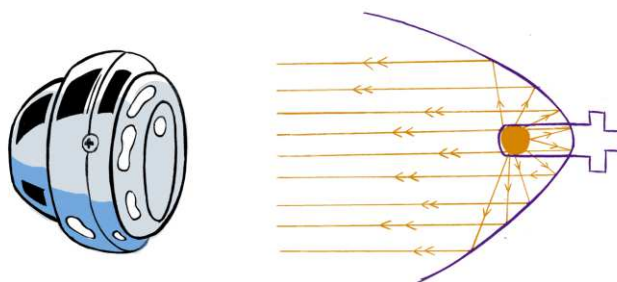


Figura 4.46: Farol automotivo

Para essa reflexão induzida, a lâmpada emissora dos raios luminosos é acoplada de tal maneira que a emissão de luz ocorra no foco da superfície do espelho parabólico, fazendo com que os

raios saiam todos na mesma direção, sempre paralelos ao eixo de simetria que contém o foco.

■ A Antena Parabólica

Em regiões afastadas dos grandes centros, sinais, emitidos por ondas, de rádio, televisão, internet, etc., chegam com baixa intensidade, é necessário que uma antena receptora tenha a capacidade de reunir uma quantidade significativa dessas ondas, concentrando-as num único ponto, fazendo assim o sinal ficar forte o suficiente para ser processado. Mais uma vez a propriedade é usada, criando uma antena no formato de uma superfície parabólica refletora, colocando o receptor de sinal garantimos que todos as ondas que incidirem paralelamente ao eixo de simetria do parabolóide, se concentrem no foco (receptor de sinal).

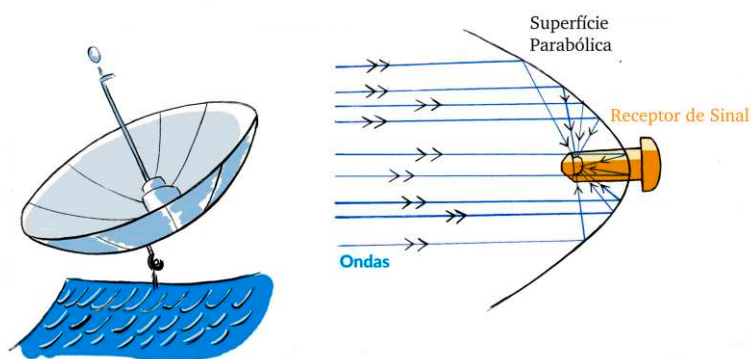


Figura 4.47: Antena Parabólica

Vale ainda observar que apesar das ondas emitidas não serem paralelas, o artefato funciona pois como foi dito a antena é útil quando instalada longe da antena emissora da onda, assim como os raios solares na superfície da terra, a distância faz com que boa parte dessas ondas acabem chegando paralelas o eixo de simetria da antena parabólica.

■ O Forno de Odeillo

"Na foto a seguir vemos o [forno solar](#) de Odeillo, cuja potência é de 1MW e está instalado no sul da França, na região dos Pirineus. O espelho parabólico é constituído por 9 500 pequenos espelhos planos. A temperatura atingida chega até 3 800 °C."



Figura 4.48: O Forno de Odeillo - Acesso em 21/02/2018

O forno na [figura 4.48](#) consegue derreter aço numa fração de minuto, ele utiliza os mesmo conceito da antena parabólica, pois como estamos bastante afastados do sol, os raios solares chegam praticamente paralelos à superfície terrestre, com isso eles refletem no espelho e se concentram no interior da "Câmara de concreto".

Além das aplicações apresentadas, essa propriedade também é utilizada em alguns grandes telescópios, aparelhos radioterápicos e/ou ultrasônicos de uso da medicina, todos utilizando espelhos parabólicos.

Entendendo o porquê da propriedade

Para entender a propriedade, partimos de conceitos já conhecidos da física, como o princípio que *"todo raio que incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão"*. Observe a figura que exemplifica o princípio: onde α representa o ângulo de incidência e β o ângulo de reflexão.

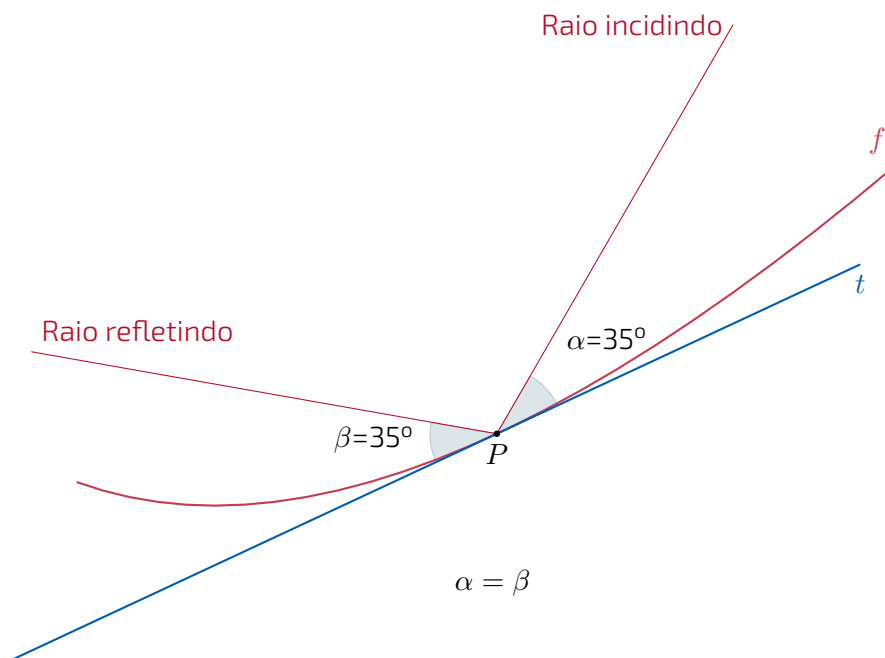


Figura 4.49: Curva f , reta tangente t e raios

Imagine uma superfície parabólica refletora, esta superfície pode ser substituída pela curva *parábola* (representada na figura acima pela curva f) que é a interseção dessa superfície com o plano que contém os raios (incidente e refletido) e o eixo da parábola (eixo de rotação da superfície parabólica). É também fato que, o ângulo que r faz com a reta tangente à curva λ , tangente esta que é traçada à partir do ponto em que r intersecta a curva λ .

De posse dessas afirmativas, podemos dizer que a parábola divide o plano em duas regiões: a região interior à concavidade, que chamaremos de *região focal*, por conter o foco, e a região exterior à concavidade, chamaremos de *região não-focal*. Com isso, admita dois pontos P_1 e P_2 contidos na reta r que contém P e é paralela à diretriz d . Observe na figura a seguir onde,

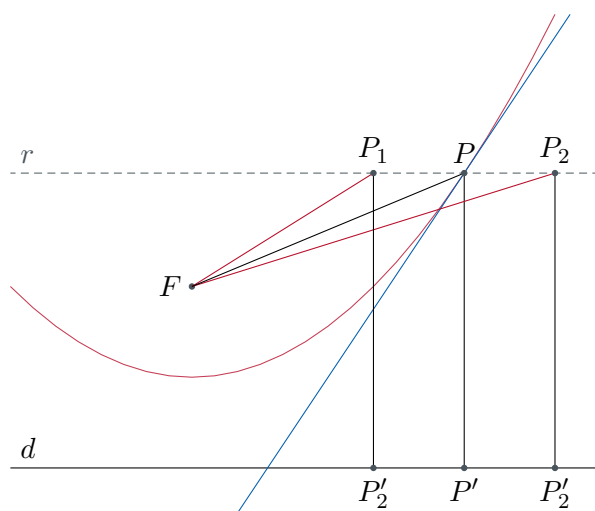


Figura 4.50: $d(P_1, F) < d(P_1, d)$ e $d(P_2, F) > d(P_2, d)$

o ponto P_1 está na região focal e o ponto P_2 na região não-focal. Com isso, é fácil perceber que a distância de P_1 ao foco é menor que a distância de P_1 à reta diretriz d , já o ponto P_2 , tem distância até o foco maior que a sua distância à reta diretriz d .

Com isso podemos concluir a:

Propriedade 2.1 Um ponto P_1 está na *região focal* de uma parábola, se e somente se, a sua distância ao foco for **menor** que a sua distância à reta diretriz.

Propriedade 2.3 Um ponto P_2 está na *região não-focal* de uma parábola, se e somente se, a sua distância ao foco for **maior** que a sua distância à reta diretriz.

Dado um ponto P da parábola de foco F e diretriz d , tracemos o triângulo FPF' (onde P' é a projeção ortogonal de P na reta d) e a reta t como sendo a reta bissetriz do ângulo $\widehat{FP'P} = \alpha$, vamos mostrar que t é tangente à parábola.

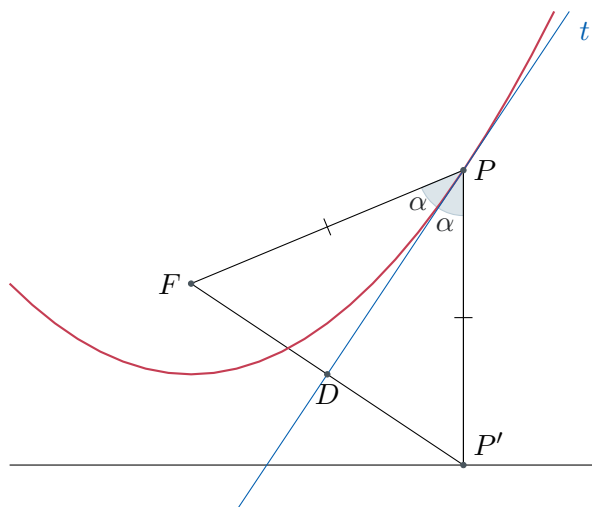


Figura 4.51: Reta t bissetriz de $\widehat{FP'P}$

Sendo D o ponto de intersecção da reta t com o lado FP' , temos que a ceviana PD não apenas é bissetriz interna do triângulo, mas também mediana e altura, já que o triângulo $FP'P$ é isósceles devido à definição de parábola ($PF = PP'$), logo podemos concluir que t é mediatriz do segmento FP' .

Marquemos sobre t um ponto Q distinto de P onde sua projeção ortogonal sobre d seja Q' , como mostra a figura a seguir:

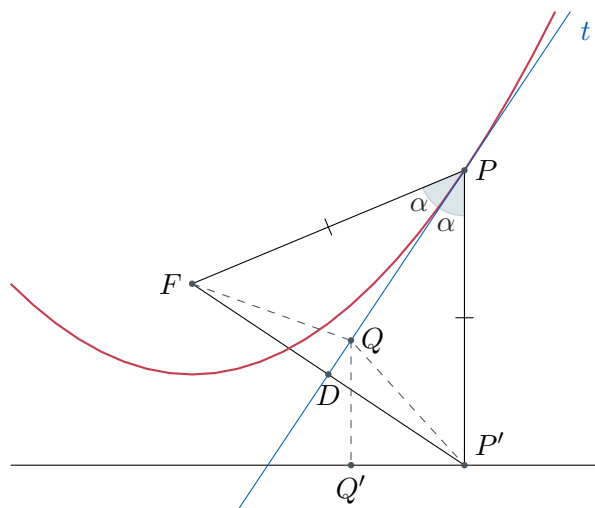


Figura 4.52: ($Q \in t$)

Como Q está sobre a metrizatriz t , temos que:

$$FQ = P'Q > QQ'$$

(pois QQ' é cateto e $P'Q$ é hipotenusa do triângulo $QQ'P'$).

Logo, pela *propriedade 2.2* pode-se afirmar que o ponto Q está na *região não-focal* da parábola, assim como qualquer outro ponto da reta t , exceto P que é ponto da parábola. Com isso concluímos que a reta t é tangente à parábola no ponto P .

Agora observe a figura a seguir fechamos a conclusão à respeito da **Propriedade Refletora da Parábola**:

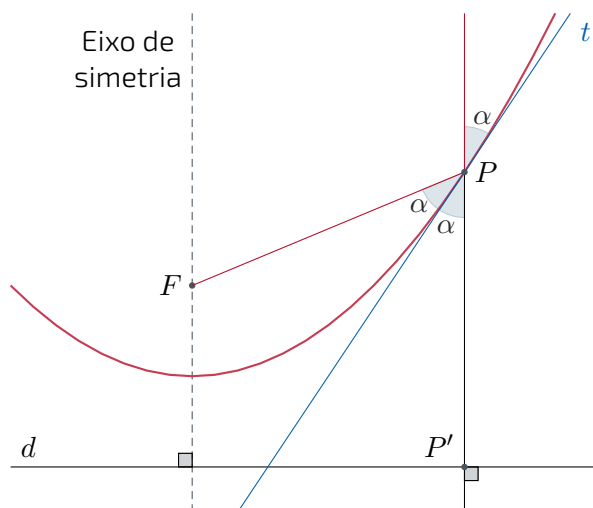


Figura 4.53: Propriedade Refletora da Parábola

Na figura anterior, é fato que os ângulos representados por α são todos iguais, devido aos fatos que:

- a) t é bissetriz do ângulo FPP'
- b) os ângulos entre as retas PP' e t são opostos pelo vértice.

Portanto, todas as ondas emitidas de F , ao tocarem a superfície parabólica refletora partem paralelas ao eixo de simetria e analogamente, todas as ondas que chegam paralelas ao eixo de simetria, ao tocarem na superfície parabólica refletora, partem em direção ao foco.

Será que é parábola?

A Catenária

Um famoso problema da história do cálculo é a descoberta da relação que fornece as coordenadas de um fio suspenso no ar por dois pontos de apoio como, por exemplo, os fios de alta tensão de postes públicos de energia.



Figura 4.54: Foto de [Heb](#) CC BY-SA.

O conhecimento dessa relação permite, por exemplo, calcular o seu comprimento para fins de planejamento e economia na execução de um projeto.

O conhecimento adquirido sobre as parábolas e a relação que ela tem com a queda dos corpos, nos conduz à certeza de que a forma desses fios suspensos por dois pontos de apoio é também uma parábola. Foi em 1690 que esse problema foi oficialmente lançado para a comunidade científica da época por Jakob Bernoulli (*1654, †1705), através do *Acta eruditorum*, jornal fundado por Leibniz (*1646, †1716). Porém, antes disso, famosos como Leonardo da Vinci (*1452, †1519)

e Galileu Galilei (★1564, †1642) tentaram resolver esse problema, obtendo a conclusão de que tratava-se de uma parábola.

Após a divulgação do problema, três estudiosos se destacaram nesta que é considerada uma das soluções mais difíceis da história do cálculo: O irmão mais novo de Jakob, Johann Bernoulli (★1667, †1748), Leibniz e Huygens (star 1629, dagger 1695). Considerando aspectos da mecânica eles concluíram que a curva em questão não era uma parábola! Foi Leibniz quem deu-lhe o nome de **catenária**, que do latim, vem de *catena* que significa *cadeia*.

Hoje, com os recursos computacionais gerados a partir desses e de outros fatos históricos, podemos verificar experimentalmente que, de fato, o problema do fio suspenso por dois pontos de apoio não se resolve com uma parábola. A figura *Parábola ou Catenária?* exibe um cordão comum suspenso por dois pontos, qual a curva que se sobrepõe perfeitamente no cordão? Esta animação pode ser manipulada em <https://ggbm.at/wGMSrZb3>

O telhado com forma de catenária é importante tanto esteticamente como funcionalmente, dá estabilidade, flexibilidade e firmeza a estrutura, sua forma tem qualidade acústica dispersando os ruídos rapidamente, algo de grande valor para um aeroporto, também sua forma evita al-guns afeitos dos ventos. (Saarinem apud Torres, 2004)



Figura 4.55: Dulles International Airport. Disponível em [Torres \(2014\)](#)



Figura 4.56: Arco Catenário da casa de Milá. A catenária invertida é uma estrutura que se auto sustenta. Disponível em [Torres \(2014\)](#)



Figura 4.57: Ponte Bisantis, Itália. Conhecida pelo nome do engenheiro que a projetou: Viaduto Morandis. Disponível em [Morandis](https://www.geogebra.org/m/qezn7h4M).

Acesse Ponte Morandis (<https://www.geogebra.org/m/qezn7h4M>) para ver como a catenária descreve o arco desta ponte, mas a parábola não.

Segundo Talavera (2018), a catenária tem equação $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, sendo e um número irracional tal que $\exp \approx 2,71$, e a é uma constante não nula; Além disso, ela pode ser representada na forma do cosseno hiperbólico, $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b - a$. A estimativa de erro da catenária em relação a parábola, ao termarmos fazê-las coincidir é da ordem de $\frac{1}{16}$.

A função real definida por $f(x) = x^{2^2}$, ou melhor, $f(x) = x^4$

■ Análise Algébrica

Queremos determinar se os pontos da curva h definida por $h(x) = x^4$, de domínio real, é uma parábola.

Uma forma de construir tal determinação, é avaliando a coincidência de pontos entre essa curva e a parábola. Em outras palavras, queremos verificar as interseções entre essas curvas, uma descrita pela função $f(x) = x^2$ e a outra descrita por $h(x) = x^4$. Caso esse processo revele infinitos pontos em comum dessas curvas, teremos que tentar outro método, visto que só poderíamos concluir que o gráfico de h é uma parábola se todos os pontos coincidirem. Por outro lado, se a quantidade de pontos em comum for finita, teremos a garantia de que h não descreve uma parábola. Explicada a metodologia, vamos para a prática:

$$\begin{aligned}x^4 &= x^2 \\x^4 - x^2 &= 0 \\x^2 \cdot (x^2 - 1) &= 0 \\x^2 &= 0 \text{ ou } x^2 - 1 = 0 \\x &= 0 \text{ ou } x^2 = 1 \\x &= 0 \text{ ou } x = \pm 1\end{aligned}$$

Ou seja, as funções de domínios reais e dadas por $f(x) = x^2$ e $h(x) = x^4$, só possuem três pontos em comum: $(0, 0)$, $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

Resta ainda a dúvida, para o caso em que altera-se a função f pelo fator $a > 0$, conforme trabalhado em [O gráfico e a forma canônica](#), **parte 1**. Será que algum valor de $a > 0$ faria com que o gráfico de h coincidisse com o de f , revelando que o gráfico de h é uma parábola?... Vamos

buscar os pontos em comum para essas funções:

$$\begin{aligned}x^4 &= ax^2 \\x^4 - ax^2 &= 0 \\x^2 \cdot (x^2 - a) &= 0 \\x^2 &= 0 \text{ ou } x^2 - a = 0 \\x &= 0 \text{ ou } x^2 = a \\x &= 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{a}, \text{ já que } a > 0\end{aligned}$$

E ainda assim, a quantidade de interseções está restrita a três pontos: $(0, 0)$, $(-\sqrt{a}, a^2)$ e $(\sqrt{a}, a^2)$.

Com isso nossa conclusão é clara: Não há como obter uma função quadrática do tipo $g(x) = ax^2$ que represente o gráfico de $h(x) = x^4$, ou seja, $h(x) = x^4$ **não é uma parábola!**

■ Análise Gráfica

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^4$.

Ao preenchermos a tabela a seguir com as imagens dessa função podemos notar algumas características de funções quadráticas:

x	$f(x)$
-2	16
-3/2	81/16
-1	1
-1/2	1/16
0	0
1/2	1/16
1	1
3/2	81/16
2	16

Note que existe uma simetria em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, temos que $f(-x) = f(x)$. Além disso, $f(x) \geq 0$. Pode-se verificar essas propriedades no gráfico da função representado na figura a seguir:

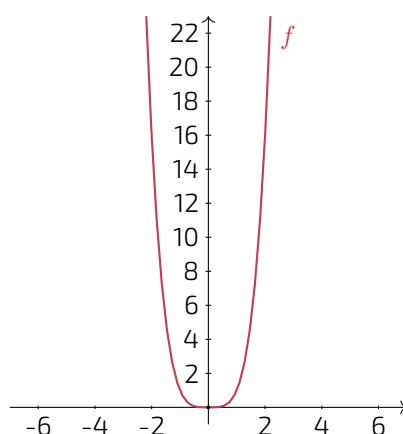


Figura 4.58: $(f(x) = x^4)$

Porém, ao atender algumas propriedades específicas do gráfico de " $y = x^2$ ", não a caracteriza como sendo uma parábola. Para respondermos a essa pergunta, usaremos a seguinte estratégia:

Vamos supor que o gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$ seja uma **parábola**, ou seja, existe um ponto $F = (0, p)$ e uma reta $d : y = -p$ tal que: $PF = Pd$, onde $P = (x, x^4) \in f$, logo:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x^4 - p)^2 + (x - 0)^2} &= x^4 - (-p) \\ (x^4 - p)^2 + x^2 &= (x^4 + p)^2 \\ x^8 - 2px^4 + p^2 + x^2 &= x^8 + 2px^4 + p^2 \\ 2 &= 4px^4 \\ 1 &= 4px^2 \\ p &= \frac{1}{4x^2}\end{aligned}$$

logo d é definida por $d : y = -\frac{1}{4x^2}$ o que não é uma reta e sim uma curva.

Como consequência, por não existir a reta diretriz não temos uma parábola.

Portanto o gráfico de f **não é uma parábola**.

Para comprovarmos que f não é uma função quadrática, podemos utilizar o fato que $f(x) = x^4$ não atende uma das propriedade das funções quadráticas. Por exmplo: Note que se escolhermos um subconjunto do domínio de f onde seus elementos estejam em Progressão Aritmética (P.A.), as diferenças entre as imagens desses elementos não forma uma P.A., portanto f não é uma função quadrática.

x	$f(x) = x^4$	Diferenças
-4	256	$81 - 256 = -175$
-3	81	$16 - 81 = -65$
-2	16	$1 - 16 = -15$
-1	1	$0 - 1 = -1$
0	0	$1 - 0 = 1$
1	1	$16 - 1 = 15$
2	16	$81 - 16 = 65$
3	81	$256 - 81 = 175$
4	256	...

E se for $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, é parábola?

■ Análise Algébrica

Da mesma forma que em $f(x) = x^4$, a busca por pontos em comum tem um conjunto solução bem limitado. Analisando o ponto mínimo, concluí-se que o mínimo de $\sqrt{x^2 + 1}$ é obtido pela raiz quadrada do mínimo de $x^2 + 1$. Assim, supondo que $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ seja uma parábola, seu vértice será $V(0, 1)$. A função quadrática que tem esse ponto como vértice e 1 como valor mínimo, é $f(x) = ax^2 + 1$, com $a > 0$. Vamos investigar os pontos em comum dessas curvas além de $(0, 1)$:

$$\sqrt{x^2 + 1} = ax^2 + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1})^2 = (ax^2 + 1)^2$$

Como $x^2 + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= a^2 x^4 + 2ax^2 + 1 \\a^2 x^4 + (2a - 1)x^2 &= 0 \\x^2(a^2 x^2 + 2a - 1) &= 0 \\x^2 = 0 \text{ ou } a^2 x^2 + 2a - 1 &= 0 \\x = 0 \text{ ou } x^2 &= \frac{1 - 2a}{a^2}\end{aligned}$$

$x = 0$ já era uma solução conhecida, mas $x^2 = \frac{1-2a}{a^2}$ traz novidades. Perceba, que para que essa expressão exista, $1 - 2a$ precisa ser maior ou igual a zero, ou seja, $2a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$. Neste caso, obtemos mais dois valores para x , que são $x = \frac{\sqrt{1-2a}}{a}$ e $x = -\frac{\sqrt{1-2a}}{a}$, pois $0 < a < \frac{1}{2}$.

Mais uma vez, a busca por pontos em comum gera, no máximo, três pontos em comum, para $x \in \{-\frac{\sqrt{1-2a}}{a}, 0, \frac{\sqrt{1-2a}}{a}\}$, quando $0 < a < \frac{1}{2}$. Para $a \geq \frac{1}{2}$ o número de valores possíveis para x cai para apenas um. Sendo assim, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **não é parábola**.

■ Análise Gráfica

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Observe seu gráfico:

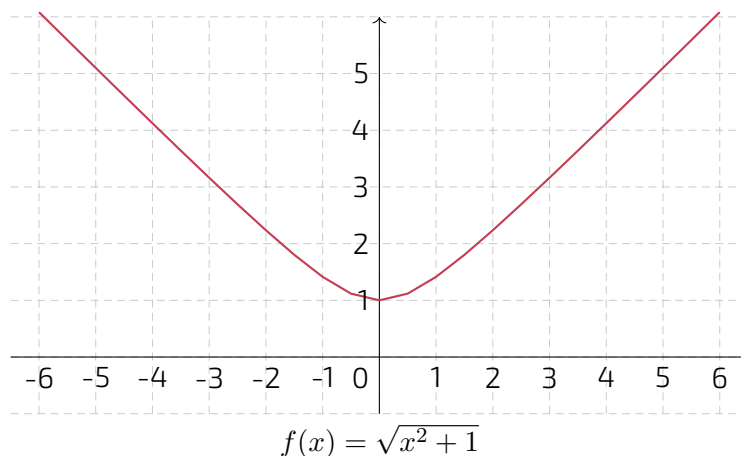


Figura 4.59: É uma parábola?

Podemos afirmar que o gráfico da função g é uma parábola?

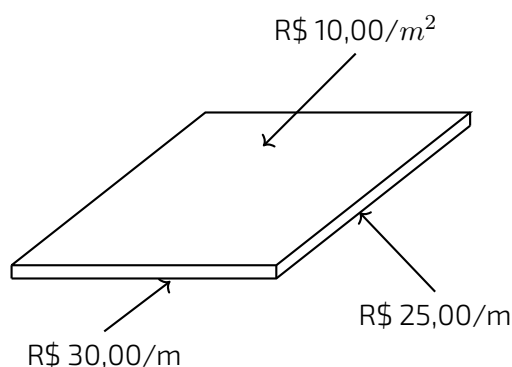
A resposta é não, deixaremos como exercício para o leitor repetir o processo utilizado na parte 1, porém é fácil mostrar que g não é função quadrática, basta mostrarmos que g não atende a propriedade das funções quadráticas enunciada ao final da parte 1. Observe:

x	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	Diferenças
-4	$\sqrt{17}$	$\sqrt{10} - \sqrt{17} \approx -0,961$
-3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5} - \sqrt{10} \approx -0,926$
-2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2} - \sqrt{5} \approx -0,822$
-1	$\sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2} \approx -0,414$
0	1	$\sqrt{2} - 1 \approx 0,414$
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 0,822$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10} - \sqrt{5} \approx 0,926$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17} - \sqrt{10} \approx 0,961$
4	$\sqrt{17}$	...

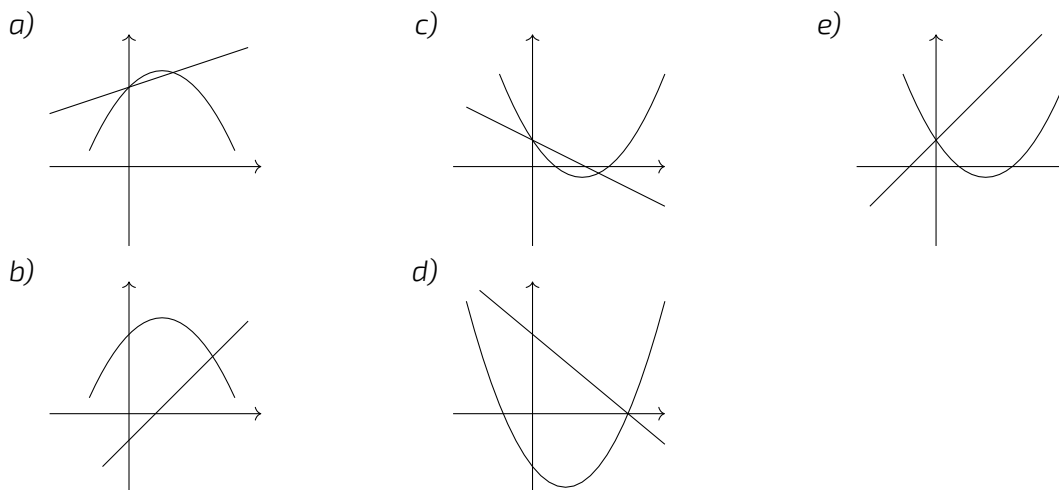
Note que as diferenças não estão em progressão aritmética, o que a descaracteriza como função quadrática.

EXERCÍCIOS

- 1 (UFRJ) Um fabricante está lançando a série de mesas "Super 4". Os tampos das mesas dessa série são retangulares e têm 4 metros de perímetro. A fórmica usada para revestir o tampo custa R\$ 10,00 por metro quadrado. Cada metro de ripa usada para revestir as cabeceiras custa R\$ 25,00 e as ripas para as outras duas laterais custam R\$ 30,00 por metro.



- a) Determine o gasto do fabricante para revestir uma mesa dessa série com cabeceira de medida x .
- b) Determine as dimensões da mesa da série "Super 4" para a qual o gasto com o revestimento é o maior possível.
- 2 (UFF) Considerem m, n e p números reais e as funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x) = mx^2 + nx + p$ e $g(x) = mx + p$. A alternativa que melhor representa os gráficos de f e g é:



3 (PUC-RJ) Considere a função $f : [-8, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 12x + 35$. Então a imagem de f é um intervalo de comprimento:

- a) 75
- b) 78
- c) 81
- d) 83
- e) 90

4 (UERJ) Um barco percorre seu trajeto de descida de um rio, a favor da correnteza, com a velocidade de 2 m/s em relação à água. Na subida, contra a correnteza, retornando ao ponto de partida, sua velocidade é de 8 m/s, também em relação à água.

Considere que:

- o barco navegue sempre em linha reta e na direção da correnteza;
- a velocidade da correnteza seja sempre constante;
- a soma dos tempos de descida e de subida do barco seja igual a 10 min.

Assim, a maior distância, em metros, que o barco pode percorrer, neste intervalo de tempo, é igual a:

- a) 1.250
- b) 1.500
- c) 1.750
- d) 2.000

- 5 (UFF) Um muro, com 6 metros de comprimento, será aproveitado como parte de um dos lados do cercado retangular que certo criador precisa construir. Para completar o contorno desse cercado o criador usará 34 metros de cerca.

Determine as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o criador poderá construir.

- 6 (ENEM-2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f , de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x^2 + 2x$

e) $y =$

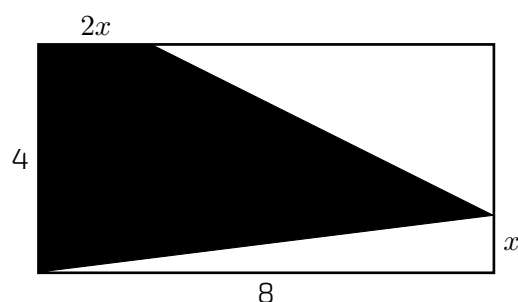
- 7 Um médico acompanha o estado febril de pacientes acometidos de uma determinada infecção. Ele conseguiu identificar dentre os casos analisados que, em geral, uma pessoa tem sua temperatura corporal T , em função dos dias de infecção D , dada por $T(D) = -\frac{4}{9} \cdot D^2 + \frac{8}{3} \cdot D + 36$, com $0 \leq D \leq 6$. Considere que a temperatura saudável de uma pessoa seja de 36°C . Com base nessas informações, responda as questões que seguem:



Figura 4.60: Foto do [National Cancer Institute](#)

- a) Quanto tempo dura o estado febril de um paciente infectado e nas condições analisadas?
- b) Qual a temperatura máxima que uma pessoa com esta infecção atinge em sua febre?

- 8 Na figura retangular, fazendo-se o valor de x variar de 0 a 4, a área da região sombreada também varia. O valor máximo que essa área poderá ter é:



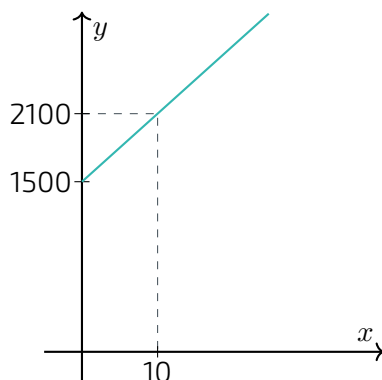
- a) 30
b) 24
c) 20
d) 18
e) 16
- 9 A representação gráfica a seguir, representa um objeto arremessado de um prédio e que segue uma trajetória parabólica.



Figura 4.61: [The Headquarters of the Institute of Applied Computer Science](#) - Polônia, CC BY-SA.

Sabendo que as medidas estão em metros, determine a altura máxima atingida por esse objeto, uma vez que essa altura foi alcançada a 2 metros do prédio.

- 10 Uma fábrica tem o custo de sua produção descrito no gráfico a seguir.



x representa a quantidade de unidades produzidas e y o custo total, em reais, para produzir essas quantidades. Considere que o preço de venda das x unidades produzidas seja $220x$; Lembre-se que o lucro é a diferença entre o que se arrecada e o gasto que se tem. Nessas condições, qual deve ser a quantidade x produzida para se obter o lucro máximo?

- 11 (UERJ-2005) Numa operação de salvamento marítimo, foi lançado um foguete sinalizador que permaneceu aceso durante toda sua trajetória. Considere que a altura h , em metros, alcançada por este foguete, em relação ao nível do mar, é descrita por $h = 10 + 5t - t^2$, em que t é o tempo, em segundos, após seu lançamento. A luz emitida pelo foguete é útil apenas a partir de 14 m acima do nível do mar. O intervalo de tempo, em segundos, no qual o foguete emite luz útil é igual a:

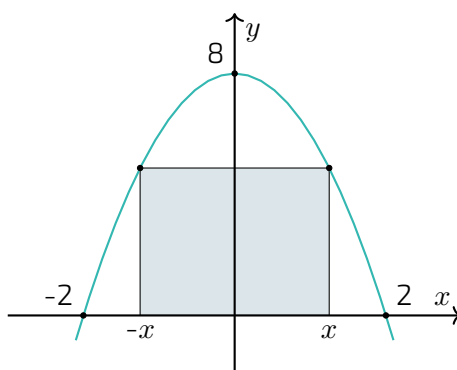
- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

- 12 (UFRJ) Considere a função $y = f(x)$ definida por:

$$y = f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 6x, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

- a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo de $[0, 6]$;
- b) Para que valores de x temos $f(x) = 5$?

- 13 (AFA) O retângulo, com base no eixo das abscissas, está inscrito numa parábola, conforme figura abaixo. O valor de x que faz esse retângulo ter perímetro máximo é



- a) 1
b) 0,5
c) 0,25
d) 1,25
- 14 (ENEM-2010) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia do processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função:

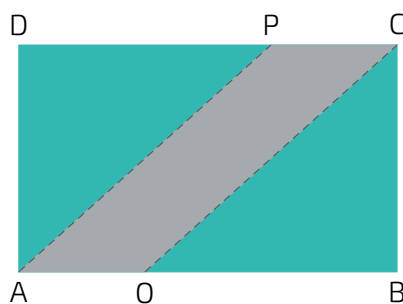
$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \geq 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200°C .

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a:

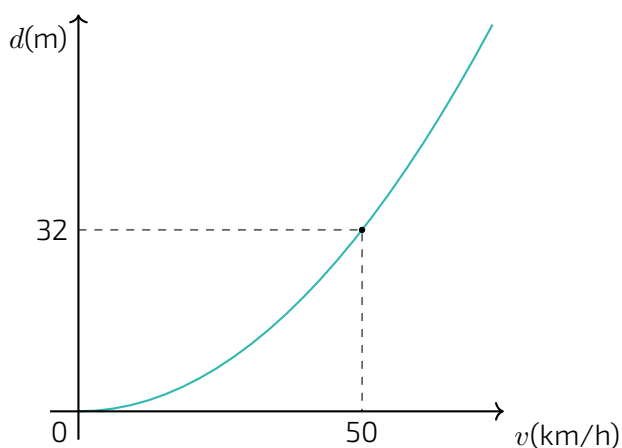
- a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e) 150

- 15 (UERJ - 2010) Um terreno retangular tem 800 m de perímetro e será dividido pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{CQ}$ em três partes, como mostra a figura.



Admita que os segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{CQ}$ estão contidos nas bissetrizes de dois ângulos retos do terreno e que a área do paralelogramo $PAQC$ tem medida S . Determine o maior valor, em m^2 , que S pode assumir.

- 16 (UERJ - 2012) Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

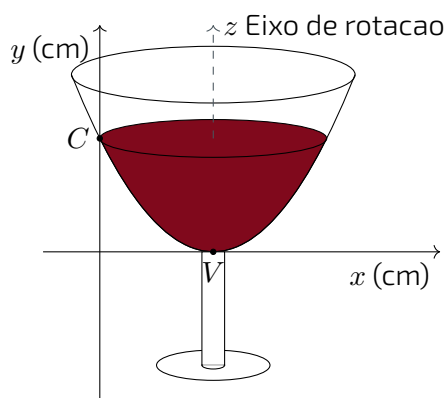


O gráfico abaixo indica a distância de frenagem d , em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade v , em quilômetros por hora.

Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h.

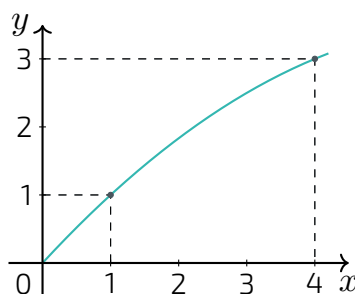
Calcule sua distância de frenagem, em metros.

- 17 (ENEM - 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x . Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- a) 1
 - b) 2
 - c) 4
 - d) 5
 - e) 6
- 18 (FGV - 2014) A figura a seguir mostra uma parte do gráfico da função quadrática que simula a trajetória de uma bala de canhão. Com os eixos e escala adequados, o canhão estava no solo, no ponto $(0, 0)$ e a bala passou, em seguida, pelos pontos $(1, 1)$ e $(4, 3)$.



A bala atingirá o solo no ponto

- a) $(11, 0)$
- b) $(14, 0)$
- c) $(13, 0)$
- d) $(12, 0)$
- e) $(15, 0)$

- 19 (FUVEST) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre $30m$ desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de $200m$ acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P , a partir do instante do lançamento, é de $10m$. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



Figura 4.62: Foto de W. Carter CC-BY.

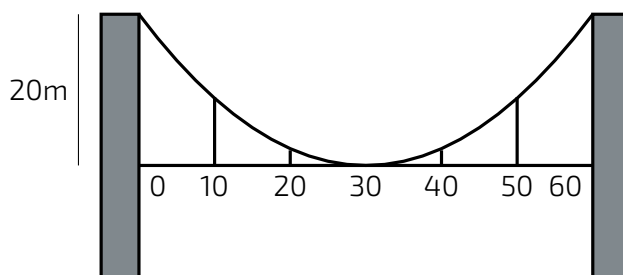
- a) 60
b) 90
c) 120
d) 150
e) 180
- 20 (ITA) Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo.

Tempo (s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

- a) 3,60
b) 3,65
c) 3,70
d) 3,75
e) 3,80

- 21 Uma ponte será sustentada por dois cabos principais, cujo formato consideraremos o de um arco parabólico. A ponte terá 60 m de comprimento e, a cada 10 m, haverá um apoio vertical, ligando a ponte com o cabo principal, estabilizando a estrutura. A figura abaixo exibe o esquema de um dos lados dessa ponte.



O valor do metro do apoio vertical é R\$ 500,00. Nessas condições, calcule o gasto com os apoios verticais para a construção dessa ponte. (Use a aproximação $\frac{10}{9} = 1$).

- 22 Uma pizzaria só vende pizza de tamanho individual. Ela cobra R\$ 15,00 por cada pizza e considera como um padrão a venda de 80 pizzas por dia.



Figura 4.63: Foto do [Nicola](#) CC BY.

Um estudo foi contratado e realizado na vizinhança dessa pizzaria, em lojas, escolas, escritórios e pontos de ônibus. A conclusão revelou que a cada real reduzido no preço da pizza, aumentaria em 10 a quantidade padrão de venda de pizzas por dia. Nessas condições, responda:

- Quanto arrecada em um dia essa pizzaria, cobrando R\$ 15,00 por pizza?
- Quanto arrecada em um dia essa pizzaria, cobrando R\$ 10,00 por pizza?
- Qual é o valor ideal para o preço da pizza deste estabelecimento, de modo a tornar máxima a arrecadação?
- Com o valor ideal, qual o ganho diário esperado?

Referências Bibliográficas

- Alexandre, P. P. e Santos, M. H. S. M. (2009). Principais dificuldades de alunos do 2º ano do ensino médio quanto à interpretação gráfica da função quadrática. *I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia*, páginas 1121–1137.
- Batschelet, E. (1998). *Introdução à matemática para biocientistas*. Interciência, São Paulo, Brasil.
- Brasil (2018). Base nacional comum curricular (bncc).
- Cance, C. A. (2015a). Parábola e suas aplicações. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia – UFBA, Bahia, Brasil.
- Cance, C. A. (2015b). Projeto canhão: o ensino de funções quadráticas com o auxílio do software geogebra. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Paulo, Brasil.
- Chung, K. (2013). A parábola, sua propriedade refletora e aplicações. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Pernambuco, Brasil.
- Connally, E., Hughes–Hallett, D. e Gleason, A. M. (2015). *Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus*. John Wiley & Sons, New Jersey, Estados Unidos.
- Cooney, T. (2010). *Developing Essential Understanding of Functions for Teaching Mathematics in Grades 9–12*. National Council of Teachers of Mathematics, Virgínia, Estados Unidos.
- da Silva Junior, G. C. (2017). Método dos mínimos quadrados aplicado ao lançamento de foguetes propulsionados a ar comprimido. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, Brasil.
- de Assis, V. H. D. (2015). Características da função quadrática e a metodologia de resolução de problemas. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, Brasil.
- DETRAN-PR (2002). *Comportamentos seguros no trânsito*. Governo do Estado do Paraná, Paraná, Brasil. Disponível em <http://www.educacaotransito.pr.gov.br/pagina-122.html>.
- dos Santos, A. R. (2009). Construções concretas e geometria dinâmica: Abordagens interligadas para o estudo de cônicas. Em *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Brasília, Brasil. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Duarte, J. L. (2013). Problemas de máximos e mínimos no ensino médio. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, Brasil.
- Eves, H. (2004). *Introdução a história da matemática*. Universidade de Campinas – UNICAMP, São Paulo, Brasil.
- Eves, H. (2013). *Geometria em Sala de Aula*, volume 32 de *Coleção do Professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.
- Figueredo, E. J. d. (2017). Uma análise sobre a valorização do conceito de máximo e mínimo por estudantes do ensino médio. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRP, Pernambuco, Brasil.

- Jornal da Cidade (2013). Direção defensiva: saiba como a velocidade influi na frenagem do veículo. Matéria online. Disponível em: <https://www.jcnet.com.br/noticias/geral/2013/02/367699-direcao-defensiva--saiba-como-a-velocidade-influi-na-frenagem-do-veiculo.html#prettyPhoto>.
- Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics: A cognitive approach. *Australian Mathematics Teacher*, 63(2):19–24.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 de *Coleção do Professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 9ª edição.
- Louzada, S. (2013). Relações entre cônicas e funções no ensino médio. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Espírito Santo, Brasil.
- Maia, D. (2007). Principais dificuldades de alunos do 2º ano do ensino médio quanto a interpretação gráfica da função quadrática. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo, Brasil.
- Monetiro, R. M. (2014). Resgate do teorema de dandelin no estudo de cônicas com o geogebra. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Espírito Santo, Brasil.
- Parent, J. S. S. (2015). *Students' Understanding Of Quadratic Functions: Learning From Students' Voices*. Tese de doutorado, University of Vermont, Vermont, Canada.
- Pietrocola, M., Pogibin, A., de Andrade, R. e Raquel, T. (2011). *Física em Contextos 1 - Ensino Médio*. Editora do Brasil, São Paulo, Brasil, 1ª edição.
- Rocha, A. M. (2014). Problemas de otimização envolvendo a matemática do ensino médio. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás - UFG, Espírito Santo, Brasil.
- Silva, R. d. A. (2013). Funções quadráticas e suas aplicações no ensino médio. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.
- Silva, T. L. (2015). O ensino de funções polinomiais do 2º grau: Uma aplicação com o software geogebra. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, Rio Grande do Norte, Brasil.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2):124–144.
- Talavera, L. M. B. (2008). Parábola e catenária: história e aplicações. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - USP, São Paulo, Brasil. Disponível em [Teses USP](#).
- Tassone, M. Z. T. (2015). Construção da parábola através de modelos lúdicos e computacionais. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Paulo, Brasil.
- Torres, R. I. (2004). El vientre de un arquitecto. Em Torres, R. I. e Stadler, M. M., editores, *Un paseo por la Geometría*, Madrid, Espa. Universidad del País Vasco, Real Sociedad Matemática Española.
- Wang, W. S. (2006). O aprendizado através de jogos para computador: por uma escola mais divertida e mais eficiente. *Portal da Família*.
- Álvia, G. (1988). Funções e gráficos num problema de frenagem. *Revista do professor de matemática*, 12. Disponível em [RPM12](#).

5

Sistemas Lineares e Inequações

O QUÊ?

Equações lineares e quadráticas, sistemas de equações lineares e inequações polinomiais de primeiro e segundo grau, explorando métodos algébricos e geométricos de determinação de suas soluções.

POR QUÊ?

Equações e inequações consistem em poderosos instrumentos de modelagem matemática, utilizados pelo homem há muitos anos para investigar padrões de comportamento e resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento envolvendo medidas de uma ou várias grandezas. Quando uma coleção de equações está associada à resolução de um determinado problema, tal coleção é chamada de sistema de equações. Neste capítulo estudaremos alguns sistemas de equações, entre eles, podemos destacar o tipo mais simples, os sistemas lineares, que nos permitirão resolver problemas sobre dietas nutricionais, produção de uma fábrica de bolos, lucro de bilheteria de um teatro, redes de tráfego rodoviário, interpolação polinomial, tomografia computadorizada, dentre outros. Por sua vez, as inequações são úteis para se comparar valores de duas grandezas variáveis, obter estimativas, calcular intervalos de variação e de erro associados à medição de uma grandeza e resolver problemas de otimização (cálculo de máximos e mínimos), que são ações inquestionavelmente relevantes na construção do pensamento matemático dos estudantes. Tanto para os sistemas lineares como para as inequações, aplicaremos as noções sobre funções afim e quadrática vistas nos capítulos anteriores.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título: Sistemas Lineares e Inequações

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Douglas Monsôres de Melo Santos (UFRRJ)
Gisela Maria da Fonseca Pinto (UFRRJ)
Luciano Vianna Félix (UFRRJ)

Revisão: Wanderley Rezende

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

Ilustrações: Miller Guglielmo

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



EXPLORANDO EQUAÇÕES: SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

Ao longo do Ensino Fundamental, você foi apresentado aos conceitos de sistemas de equações lineares e de inequações, além de problemas relacionados aos mesmos. No presente capítulo, vamos resgatar e aprofundar o nosso conhecimento sobre esses dois conceitos, utilizando o que foi desenvolvido nos capítulos de funções afins e quadráticas.

Enigma do Castelo

Atividade 1

Numa antiga série de TV chamada "Castelo Rá-tim-bum", para os personagens entrarem no castelo, eles precisavam responder a um enigma proposto pelo porteiro. O enigma proposto era "Diga 2 números reais cuja soma dos quadrados seja igual a 25".



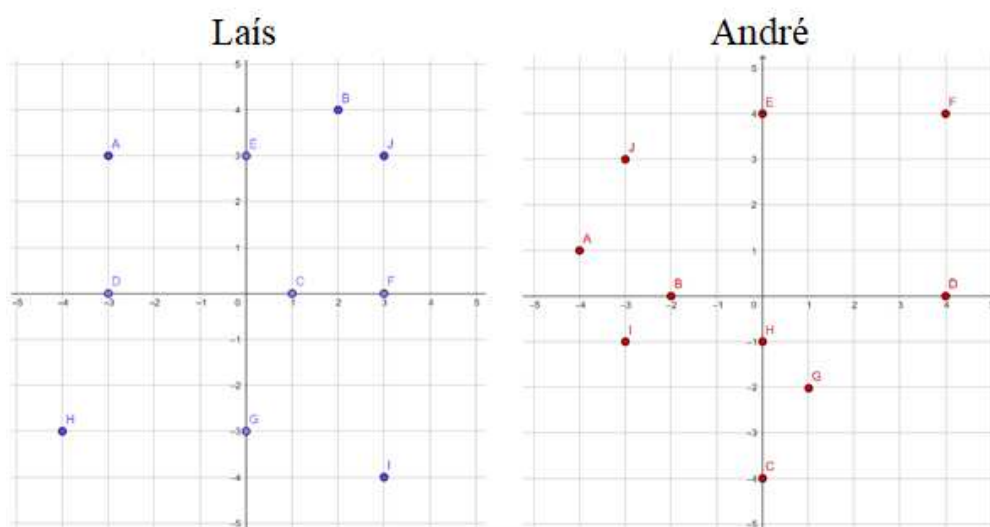
- a) Os números -3 e 4 são uma possível resposta para o enigma? E os números 5 e 3 ?
- b) Você consegue outras respostas para o enigma formadas apenas por pares de números inteiros?
- c) Ao responder ao enigma, se qualquer um dos dois números escolhidos for maior que 5 , esta resposta estará correta? E se um deles for menor que -5 ? Justifique.
- d) Escolhendo qualquer número entre -5 e 5 , é possível encontrar um segundo número de forma que, junto com o primeiro, eles formem uma solução para o enigma? Se sim, determine algumas dessas soluções.
- e) Estabelecendo uma ordem para os dois números escolhidos, chamemos o primeiro número de x e o segundo de y . Qual a equação nas incógnitas x e y descreve o acerto do enigma?
- f) Marque suas respostas aos nos itens **a**, **b** e **d** no plano cartesiano, associando ao primeiro número à coordenada x e ao segundo número, a coordenada y . Se você preferir, pode usar o GeoGebra para isso!
- g) Discuta com os seus colegas se há algum padrão na disposição dos pontos marcados pelas possíveis respostas do enigma.

Batalha Naval

Atividade 2

Laís e André estão jogando uma batalha naval diferente: nesse jogo, cada jogador tem uma cartela, em formato de plano cartesiano, de maneira que os valores das incógnitas x e y pertençam ao intervalo $[-5, 5]$. Cada jogador marca 10 pontos em sua cartela, sempre com coordenadas inteiras. Os "tiros" são dados a partir de equações nas incógnitas x e y que devem "acertar" os pontos que tenham sido marcados na cartela do adversário. A equação "acerta" um ponto quando ele é solução da equação. Por exemplo: a equação $x + 4y = 5$ acerta o ponto $(4, 1)$, pois $x = 4$ e $y = 1$ é solução da equação. Se a "equação-tiro" acertar mais de um ponto, então o jogador que acertou terá a pontuação igual ao quadrado do número de pontos que acertou.

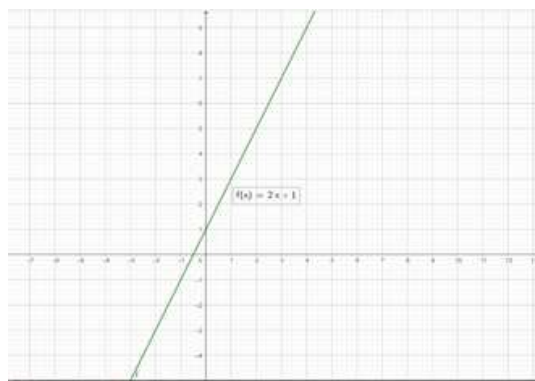
Laís e André irão disputar uma partida do jogo e cada um já marcou os seus pontos nas cartelas. Veja como eles ficaram dispostos:



- Laís é a primeira a jogar. Cite dois exemplos de equações-tiro que Laís pode dar para acertar pelo menos dois pontos marcados por André.
- André, em sua jogada, usou $x^2 + y^2 = 9$ como equação-tiro. Qual a sua pontuação com essa jogada?
- Dê exemplo de três equações-tiro que permitam à Laís acertar o ponto A da cartela de André.
- Suponha que Laís e André irão começar uma nova partida e que Laís inicie o jogo com a equação-tiro $x + 2y = 4$. Dependendo dos pontos marcados por André em sua cartela, qual é a pontuação máxima que ela pode adquirir com essa jogada? Nesse caso, marque no plano cartesiano os pontos que ela terá acertado.
- Com as regras que foram estabelecidas, existe alguma equação-tiro que André dê que acerte todos os pontos da cartela de Laís em uma única rodada?

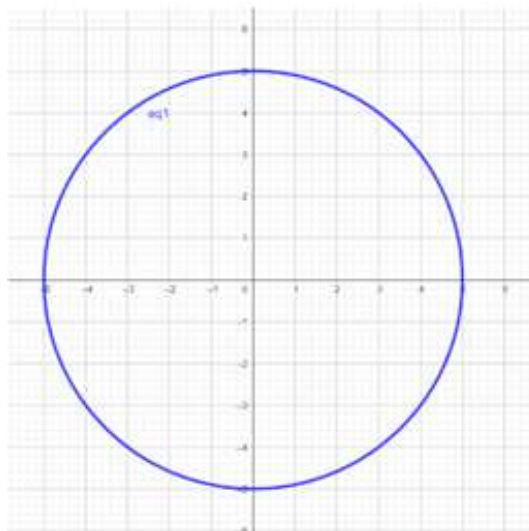
ORGANIZANDO EQUAÇÕES: SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

Nos capítulos anteriores deste livro de Funções, você aprendeu que em muitos casos, utilizamos expressões algébricas envolvendo uma variável para caracterizar funções definidas em conjuntos numéricos. Se considerarmos, por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, a expressão $y = 2x + 1$ nos permite compreender como os elementos do domínio se relacionam com os do contradomínio, por exemplo, o número 3 é associado ao número 7, pois $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. O gráfico desta função (uma reta) é a forma como representamos essa relação geometricamente. Ele é construído marcando os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $y = f(x)$, isto é, $y = 2x + 1$. Assim, a coleção de pontos do gráfico consiste exatamente de todos os pares de valores dados às variáveis x e y para os quais é verdadeira a igualdade $y = 2x + 1$, ou seja, são todas as soluções dessa equação.



Lembramos que uma equação é uma igualdade matemática envolvendo termos desconhecidos (em geral números reais) a serem determinados, por isso chamadas de *incógnitas*. Uma *solução* de uma equação que envolve apenas duas incógnitas x e y é um par ordenado de números reais (a, b) tal que, uma vez convencionado que o primeiro termo do par ordenado refere-se à incógnita x e o segundo à incógnita y , substituindo $x = a$ e $y = b$ nas expressões da equação, ainda obtemos uma afirmação verdadeira. Como exemplo, o par $(2, 3)$ é uma solução da equação $y = 2x - 1$. O conjunto de todas as soluções de uma equação em duas incógnitas é denominado *conjunto solução* ou *solução geral* desta equação.

De maneira geral, quando temos uma equação em duas incógnitas x e y , mesmo que seu conjunto solução não represente o gráfico de uma função, podemos representar graficamente a sua solução geral no plano cartesiano, analisando-as de uma maneira mais visual, através de um desenho neste plano, o que pode nos ajudar a entender melhor certos padrões dessas soluções. Por exemplo, pode-se mostrar que a solução geral da equação $x^2 + y^2 = 25$ forma o desenho de uma circunferência de raio 5 no plano, com centro na origem. Você deve ter percebido isso na atividade *Enigma do Castelo*. Observando esta figura, pode-se concluir que se o par (x, y) é solução desta equação, então os valores de x e de y devem estar, cada um, no intervalo $[-5, 5]$.



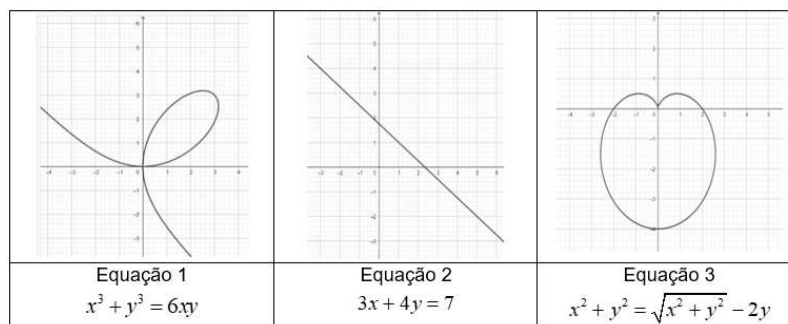
Esta perspectiva de estudo das soluções de equações de duas variáveis por meio do plano cartesiano foi desenvolvida pelo matemático René Descartes (1596-1650). Em seu livro *Discours de la méthode*, que teve sua primeira edição publicada em 1637, ele propôs uma nova perspectiva de estudo da Geometria e da Álgebra. Desde a antiguidade até o século XVII, os objetos da Geometria eram caracterizados apenas por descrições dos lugares geométricos das figuras planas e por construções geométricas. Por exemplo, uma circunferência era definida somente como o lugar geométrico dos pontos que têm mesma distância a um certo ponto O fixado, denominado centro da circunferência.

A partir da abordagem sugerida por Descartes, tornou-se possível conceber alguns objetos geométricos como curvas no plano cartesiano que passam a ser descritas por equações cujas soluções são os todos os pontos que pertencem a essa curva. Por exemplo, um círculo de raio r e centro na origem $O = (0, 0)$ é caracterizado pelo conjunto de pontos (x, y) que são soluções da equação $x^2 + y^2 = r^2$. Repare que, ao fazermos $r = 5$, obtemos exatamente a equação e a circunferência estudadas na atividade [Enigma do Castelo](#).



Desse modo, Descartes estabeleceu uma interligação entre a Geometria e a Álgebra hoje conhecida como Geometria Analítica, com o intuito de utilizar as vantagens de uma área para complementar a outra. Como a Geometria é muito visual e intuitiva, podemos por vezes ser enganados pelos olhos e chegar a conclusões incorretas; por outro lado, com seus símbolos e

equações, a Álgebra é uma ferramenta poderosa para modelar e resolver problemas, mas em algumas vezes, seu excesso de símbolos pode confundir e nos levar a erros. Desta união, surge a Geometria Analítica, área da Matemática que visa representar e estudar objetos da Geometria através do estudo de soluções de equações e vice-versa. Nas figuras abaixo ilustramos alguns exemplos de equações em duas variáveis e da representação gráfica das suas soluções gerais, todas plotadas com o auxílio do *software* GeoGebra:



PARA REFLETIR

Junto com os seus colegas, reveja os exemplos de equações em duas variáveis estudadas até aqui e da representação gráfica das suas soluções gerais. Está certo afirmar que todos eles representam gráficos de funções? Por quê? Existe algum critério para determinar se a representação gráfica da solução geral de uma equação é o gráfico de uma função?

PRATICANDO EQUAÇÕES: SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

Estádio de Futebol

Atividade 3

O Estádio Governador Magalhães Pinto, mais conhecido como Mineirão, é um estádio de futebol localizado em Belo Horizonte, capital de Minas Gerais. Na [figura 5.1](#), pode-se ver uma foto da vista aérea do estádio através do *Google Earth*. O contorno externo do estádio, realçado na figura por uma linha azul, é aproximado por uma elipse. Suponha que tenham sido introduzidas coordenadas cartesianas e unidades de medida de comprimento nesta foto. A origem O foi escolhida para ser o centro do campo de futebol e os pontos (x, y) do contorno externo do estádio são exatamente aqueles que são soluções da equação $9x^2 = 144 - 16y^2$.

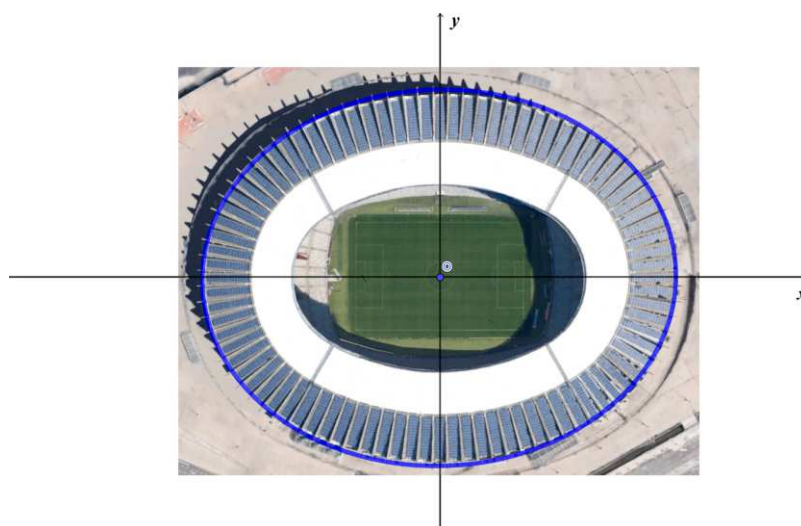


Figura 5.1: Estádio do Mineirão com os eixos marcados

- Qual a distância entre os pontos do contorno externo do Mineirão que estão sobre o eixo x ?
- Qual a distância do centro do campo de futebol a qualquer um dos dois pontos do contorno externo do estádio que estão sobre o eixo y ?
- Existe algum ponto (a, b) do contorno externo do Mineirão que não esteja sobre os eixos coordenados de modo que a e b sejam números inteiros? Justifique.

Fábrica de Bolos

Atividade 4

A fábrica de bolos “Tia Tatá” produz e vende bolos de diversos tipos, mas os mais solicitados são o de fubá e o de chocolate, que custam 15 reais e 18 reais cada um, respectivamente. Em um determinado dia, a venda dos bolos de fubá e de chocolate gerou 684 reais em caixa.

- a) Quantos bolos de cada tipo podem ter sido vendidos nesse dia?
- b) Use a construção no GeoGebra disponível em <https://www.geogebra.org/classic/juvucjuh>, para movimentar o controle deslizante k e checar a sua resposta dada no item a). Diga como você pode usar essa ferramenta para encontrar outras respostas para o item a).
- c) Seria possível que a venda de bolos de chocolate nesse dia fosse de 50 bolos? Justifique.

EXPLORANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES**Faturamento de um Teatro****Atividade 5**

Um teatro conta com 500 assentos. Uma peça que está fazendo muito sucesso entrou em cartaz nesse teatro e, em uma determinada noite de apresentação, todos os ingressos foram vendidos, obtendo um faturamento de R\$ 20.500,00 com a bilheteria. A entrada cheia nesse teatro custa R\$ 50,00, sendo que pessoas com mais de 65 anos pagam meia entrada e os aniversariantes têm gratuidade.

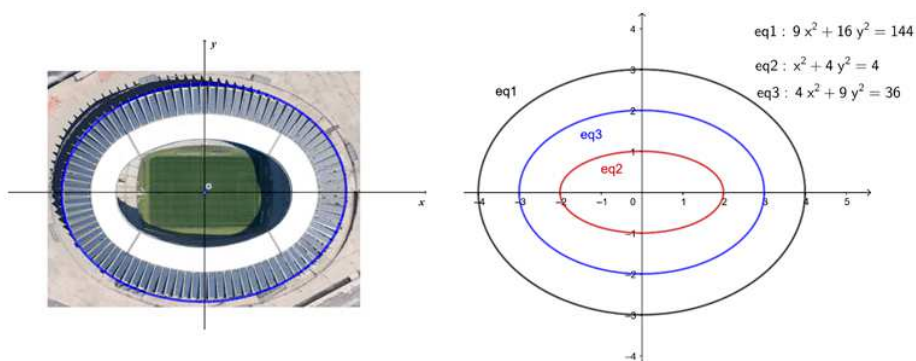


- a) Escreva duas equações que modelam as informações do enunciado. Quantas variáveis você necessita dispor para isso?
- b) Encontre três possibilidades para o número de ingressos vendidos de entrada cheia, meia entrada e de gratuidade que poderiam ter ocorrido, com as condições informadas no enunciado.
- c) Suponha que na noite do espetáculo, o número de pessoas com mais de 65 anos foi quatro vezes o número de aniversariantes. Quantos aniversariantes estiveram na plateia nesse dia?

Retornando ao Estádio do Mineirão**Atividade 6**

Manoel Rezende de Mattos Cabral, mais conhecido como Nelinho, foi um jogador de futebol brasileiro que atuava como lateral direito e participou como titular da seleção brasileira nas copas de 1974 e 1978. Em 1979, ao ser desafiado por uma emissora de televisão, Nelinho conseguiu chutar uma bola para fora do estádio do Mineirão, estando dentro do campo (veja a façanha de Nelinho em <https://www.youtube.com/watch?v=psJJEdZHpcU>).

Na Atividade **Estádio de Futebol** da seção anterior, consideramos que o Estádio do Mineirão pode ter o seu contorno externo representado por uma elipse de equação $9x^2 = 144 - 16y^2$, em um sistema de coordenadas cartesianas, conforme indicado na figura a seguir, com o centro do campo coincidindo com a origem $(0, 0)$ e de forma que as unidades de medida reais estejam em escala com este sistema.



- a) Assumindo uma vista aérea conforme representada nas figuras anteriores, suponha que Nelinho tenha chutado a bola a partir do centro do campo em direção ao corner do time adversário (2º quadrante) em trajetória retilínea (numa vista aérea) que segue a equação $y = -x$. Em que pontos do plano cartesiano a projeção da trajetória dessa bola cruzará as três elipses?
- b) Novamente, Nelinho está no centro do campo de jogo e deu um outro chute, agora na direção do ponto $(1, 1)$, de forma que, numa vista aérea, a bola segue uma trajetória retilínea e sai do estádio. Em que pontos (no primeiro quadrante) a vista aérea desse chute intersecta as três elipses?

ORGANIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Nas atividades anteriores, você percebeu que as equações e suas respectivas soluções podem representar matematicamente situações de um determinado contexto. Determinados casos podem exigir o uso equações simultâneas, como ilustrado nas atividades *Faturamento de um Teatro* e *Retornando ao estádio do Mineirão*. Um conjunto finito de equações consideradas simultaneamente em um problema é chamado um *sistema de equações* ou simplesmente um *sistema*. Assim, no contexto do item b) da atividade), as equações $9x^2 = 144 - 16y^2$ e $y = -x$ compõem um sistema de duas equações. É usual organizar um sistema de equações listando-as uma abaixo da outra à direita de um símbolo de chave que engloba todas as equações , como ilustrado abaixo:

$$\begin{cases} 9x^2 = 144 - 16y^2 \\ y = -x \end{cases}$$

As incógnitas que aparecem em, pelo menos uma das equações são chamadas de *incógnitas do sistema de equações*. As incógnitas do sistema do exemplo acima são x e y .

Uma *solução* de um sistema de m equações e n incógnitas é um conjunto ordenado de valores para as n incógnitas que satisfazem às m equações simultaneamente. Mais precisamente, se um sistema de equações tem n incógnitas, digamos $x_1, x_2, \dots, x_n$ uma solução do sistema é uma lista ordenada de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tais que ao fazer $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ obtemos uma solução para todas as equações do sistema. Em particular, se um sistema tem

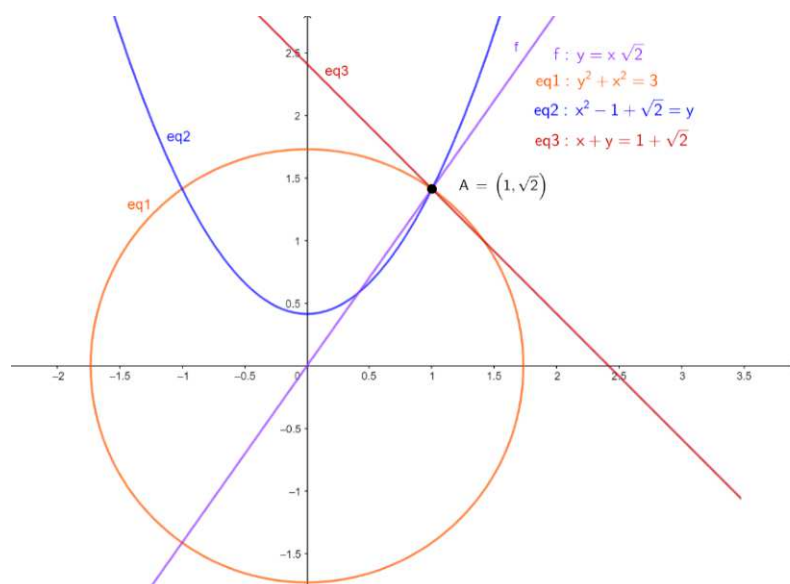
apenas 2 incógnitas x e y , então as soluções desse sistema serão pares ordenados (a, b) , ou seja, pontos do plano cartesiano.

Quando o sistema de equações tem apenas duas incógnitas, as suas soluções têm uma interpretação geométrica no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. De fato, conforme vimos nas seções anteriores, algumas curvas no $\mathbb{R}^2$ são a representação geométrica do conjunto solução de uma equação. Considerando a equação $y^2 + x^2 = 3$, podemos destacar os pontos $(1, \sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2})$ e $(\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2})$ como exemplos de soluções da mesma (há infinitas soluções para essa equação! Por quê?). Observe que o ponto $A = (1, \sqrt{2})$ também pertence ao conjunto solução da equação $y - x \cdot \sqrt{2} = 0$ e ainda da equação $y - x^2 = -1 + \sqrt{2}$ ou da equação $x + y = 1 + \sqrt{2}$ assim como de muitas outras!

Assim, vemos que o ponto $A = (1, \sqrt{2})$ é uma solução do seguinte sistema:

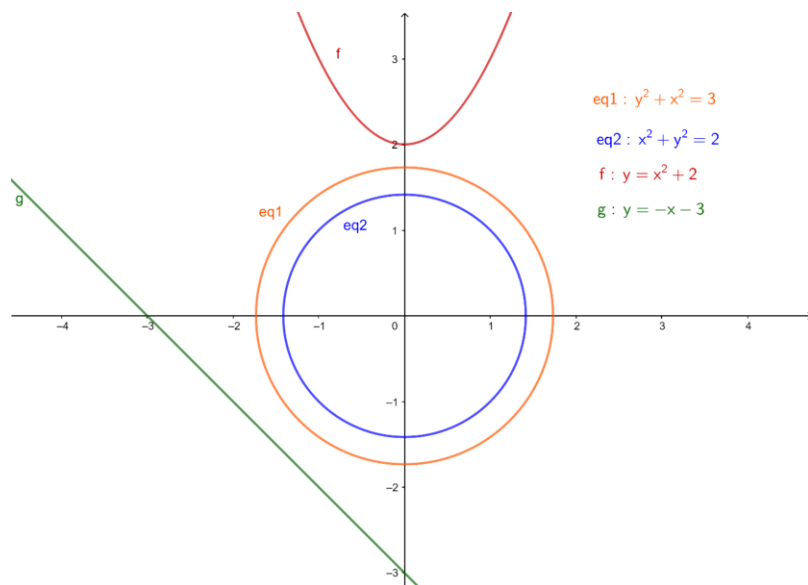
$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 3 \\ y - x \cdot \sqrt{2} = 0 \\ y - x^2 = -1 + \sqrt{2} \\ x + y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Geometricamente, podemos dizer então que o ponto A está na interseção entre as curvas $y^2 + x^2 = 3$, $y - x \cdot \sqrt{2} = 0$, $y - x^2 = -1 + \sqrt{2}$ e ainda $x + y = 1 + \sqrt{2}$. Veja a figura abaixo, onde plotamos essas curvas no software GeoGebra:

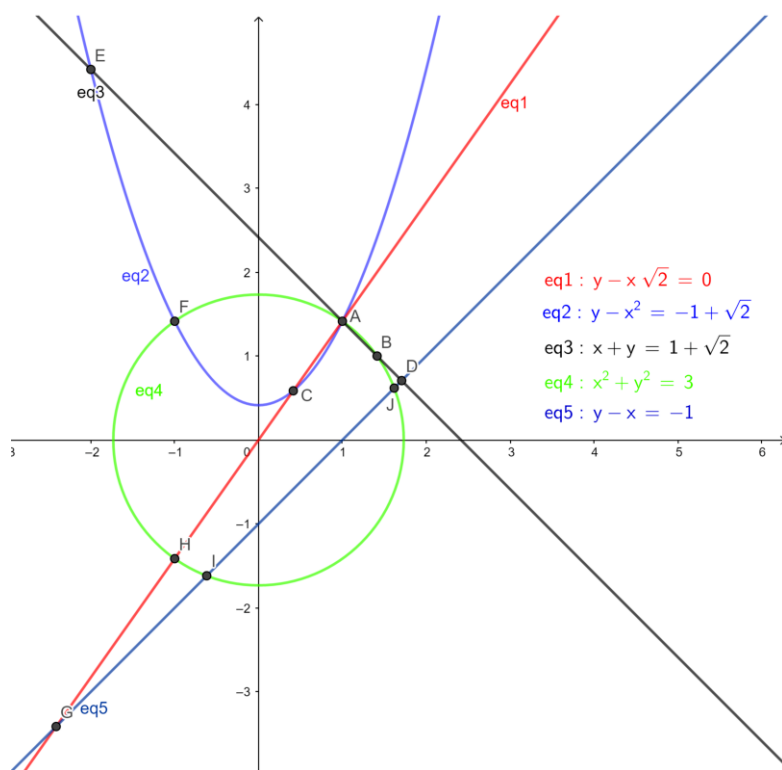


Então, quando um mesmo ponto (a, b) satisfaz a duas ou mais equações ao mesmo tempo, temos que esse ponto pertence ao conjunto solução dessas equações, assim, ao representarmos geometricamente esses conjuntos, esse ponto estará em todas essas curvas, portanto, estará na interseção entre elas.

Nem sempre curvas representadas em um mesmo sistema de eixos apresentam pontos de interseção. A figura a seguir fornece um exemplo de 4 curvas correspondendo às soluções das equações $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 - y = -2$ e $x + y = -3$. O conjunto solução do sistema de equações formado por essas 4 equações é vazio, pois não há um ponto que pertença simultaneamente a todas as curvas.



Exemplo: Considere a seguinte lista de 5 equações em duas incógnitas: $y = x \cdot \sqrt{2}$, $y - x^2 = -1 + \sqrt{2}$, $x + y = 1 + \sqrt{2}$, $y^2 + x^2 = 3$ e $y - x = -1$. O conjunto solução de cada uma dessas equações está descrito geometricamente na figura abaixo.



Considere os três sistemas (I), (II) e (III) abaixo, todos compostos por equações dessa lista:

$$(I) \begin{cases} y - x \cdot \sqrt{2} = 0 \\ y - x^2 = -1 + \sqrt{2} \\ x + 2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} y^2 + x^2 = 3 \\ x + y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} y - x \cdot \sqrt{2} = 0 \\ y - x^2 = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Analisando a última figura, podemos concluir que:

- a) O sistema (I) possui tem única solução, dada pelo ponto A .
- b) O sistema (II) possui duas soluções, dadas pelos pontos A e B .
- c) O sistema (III) possui duas soluções, dadas pelos pontos A e C .
- d) O sistema dado pelas cinco equações da lista dada neste exemplo tem solução vazia, visto que não há um ponto que pertença simultaneamente às 5 curvas da figura acima.

PRATICANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Construindo Sistemas

Atividade 7

Utilizando apenas equações que aparecem na figura do último exemplo, construa sistemas de equações com as propriedades pedidas abaixo, indicando na figura quais os pontos que correspondem às suas respectivas soluções.

- a) Um sistema com três equações da figura que não possua solução;
- b) Dois sistemas que tenham exatamente duas soluções;

Praticando Sistemas de Equações no GeoGebra

Atividade 8

Abra o GeoGebra no seu *smartphone*, no aplicativo calculadora gráfica. No campo de entrada, digite as equações $x - 2y = 8$ (Equação 1) e em seguida, $ax + by = c$ (Equação 2). O GeoGebra irá criar controles deslizantes para os coeficientes a , b e c da Equação 2. Nos itens a seguir, considere o sistema formado pelas equações 1 e 2 nas incógnitas x e y .

- a) Qual figura está associada ao conjunto solução da Equação 1? E da Equação 2?
- b) Existem valores para os coeficientes a , b e c de forma que o sistema formado pelas Equações 1 e 2 possua uma única solução? E apenas duas soluções? E infinitas soluções?
- c) Insira o ponto $(2, -3)$ no campo de entrada. Ele é uma solução da Equação 1 (por quê?). Usando os controles deslizantes, obtenha valores para os coeficientes a , b e c de forma que esse ponto seja solução do sistema.
- d) Elabore um sistema com duas equações diferentes que tenha o ponto $(1, 1)$ como única solução. Construa as curvas correspondentes a essas equações no GeoGebra para realizar uma "prova real" do sistema que você elaborou.

EXPLORANDO EQUAÇÕES LINEARES EM 2 INCÓGNITAS

Clube de Esportes

Atividade 9

Um clube precisa realizar uma reforma na sua piscina, e para isso, cobrará uma taxa de cada associado. Cada adulto pagará R\$ 6,00 reais e cada criança R\$ 4,00.



Sabendo que a obra está orçada em R\$ 1000,00 e que o valor arrecadado foi exatamente o do preço da obra, responda:

- Se o clube tem 120 adultos associados, quantos associados são crianças?
- Se forem 160 crianças associadas, quantos serão os adultos?
- Complete a tabela a seguir em termos de x e y , gerando pares ordenados com essas variáveis, usando x para representar o número de crianças e y para representar o número de adultos.

Nº de crianças associadas	Nº de adultos associados	(x, y)
40		
	30	
	150	
100		
x		
	y	

- Escreva uma equação que relacione o número de crianças e de adultos associados ao clube;
- Usando o GeoGebra em seu *smartphone*, plote os quatro primeiros pontos dessa tabela. Você pode precisar ajustar a sua tela para conseguir visualizar esses pontos, reduzindo o zoom.

ORGANIZANDO EQUAÇÕES LINEARES EM 2 INCÓGNITAS

Na Atividade *Clube de Esportes*, denotando por x e y respectivamente o número de crianças e adultos que são sócias do clube, você deduziu que a equação que relacionava essas duas incógnitas era $4x + 6y = 1000$. Essa equação tem o seguinte formato:

$$ax + by = c,$$

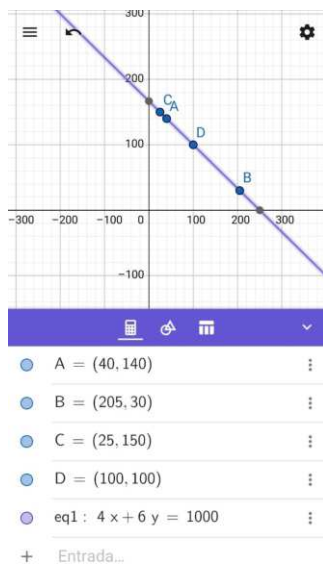
onde a , b e c são números reais constantes e os números a e b não são simultaneamente iguais a zero. Estas constantes são chamadas de *coeficientes* da equação nas incógnitas x e y . Equações desse tipo já foram estudadas por você no Ensino Fundamental: elas são chamadas de *equações polinomiais de 1º grau* ou de *equações lineares* nas incógnitas x e y . O nome "1º grau" está relacionado ao fato de cada coeficiente estar multiplicado a no máximo uma única incógnita e esta sempre aparece com expoente igual a 1. O coeficiente c é chamado de *independente*, por não estar multiplicado a nenhuma incógnita. Note que as únicas operações que aparecem nas expressões algébricas de uma equação linear são multiplicar uma única incógnita por um número real e somar esses produtos entre si.

Como exemplos de equações que **não** são lineares, temos:

- a) $3x^2 + 2y = 1$;
- b) $2^x = 3y$;
- c) $2x - 5xy + 4y = 8$;
- d) $-\sqrt{x} + y = 2$.

De fato, na primeira equação, a incógnita x aparece elevada a dois. Na segunda, a incógnita x aparece num expoente. Na terceira, x se encontra multiplicada à incógnita y e na quarta, a incógnita x aparece em uma raiz quadrada, logo, aparece com expoente $\frac{1}{2}$.

No item d) da atividade *Clube de Esportes*, temos um exemplo de uma equação linear e no item e) foi pedido que você plotasse no plano cartesiano quatro pares ordenados que fossem soluções daquela equação. Você deve ter percebido que todos esses pontos ficavam alinhados. Plotando as soluções da equação $4x + 6y = 1000$ no plano cartesiano com o auxílio do GeoGebra, vemos que realmente elas compõem uma reta, que evidentemente passa pelos quatro pontos marcados.



As equações lineares já haviam aparecidos nas seções anteriores deste capítulo (localize-as!) e em todas elas, a representação geométrica das soluções também eram dadas por retas. Esse fato nos sugere a seguinte pergunta:

O conjunto solução de uma equação linear de duas incógnitas sempre pode ser representado geometricamente por uma reta no plano cartesiano?

A fim de responder a esta pergunta, vamos fixar uma equação linear $ax + by = c$. Para facilitar a nossa análise, vamos organizar o raciocínio em dois casos:

1º caso: $b \neq 0$.

Consideremos um par ordenado (x_0, y_0) do plano cartesiano. Como $b \neq 0$, é permitido dividir por b . Assim, obtemos as equivalências a seguir:

$$ax_0 + by_0 = c \Leftrightarrow by_0 = c - ax_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_0.$$

Assim, dizer que um ponto (x_0, y_0) é uma solução da equação linear em questão é o mesmo que afirmar que ele é ponto do gráfico da função $f(x) = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$. Com isso, concluímos que o conjunto solução da equação $ax + by = c$ coincide exatamente com o gráfico da função $f(x) = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.

Como vimos no Capítulo de Função Afim, independente do valor de a , o gráfico de f é dado por uma reta (horizontal se $a = 0$ e inclinada se $a \neq 0$), logo o conjunto solução da equação linear coincide com o gráfico da função f , sendo portanto representado geometricamente por uma reta no plano cartesiano.

2º caso: $b = 0$.

Como na equação linear $ax + by = c$ estamos supondo que os coeficientes a e b não são simultaneamente nulos, concluímos que $a \neq 0$, uma vez que $b = 0$. Dessa forma, a equação linear se reduz a $ax = c$. Assim, dizer que um ponto $(x_0, \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_0)$ é solução desta equação é o mesmo que escrever $ax_0 = c$, ou equivalentemente, $x_0 = \frac{c}{a}$. Como a incógnita y não aparece nesta equação, não há qualquer restrição para o valor de y_0 , isto é, y_0 pode ser qualquer número real. Concluímos então que o conjunto solução da equação linear será formado pelos pontos $(\frac{c}{a}, y_0)$, onde y_0 é qualquer. Se marcarmos todos esses pontos nos

plano cartesiano, teremos exatamente a reta vertical que corta o eixo dos x no número $\frac{c}{a}$.

Todo esse raciocínio nos mostrou que a resposta à pergunta é sim, ou seja:

O conjunto solução de uma equação linear de duas incógnitas (em que os coeficientes a e b não são simultaneamente nulos) sempre pode ser representado geometricamente por uma reta no plano cartesiano.

Uma vez que respondemos à pergunta anterior, é natural que pensemos sobre outra questão:

Toda reta no plano cartesiano representa o conjunto solução de uma equação linear de duas incógnitas?

Vamos começar o raciocínio considerando uma reta qualquer do plano cartesiano. Novamente, vamos dividir o problema em dois casos:

1º caso: A reta não é paralela aos eixos coordenados.

Como visto no Capítulo de Função Afim, toda reta que não seja paralela aos eixos coordenados no plano cartesiano é o gráfico de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Cada ponto (x_0, y_0) pertencente a esta reta (ou seja, ao gráfico de f) satisfaz a igualdade $y_0 = ax_0 + b$, ou seja, $-ax_0 + y_0 = b$. Portanto, o conjunto de pontos da reta é precisamente o conjunto solução da equação linear $-ax + y = b$ nas incógnitas x e y .

2º caso: A reta é paralela aos eixos coordenados.

Se a reta considerada for horizontal, ela intersecta o eixo y em um número y_0 . Assim, todos os pontos desta reta têm a segunda coordenada igual a y_0 , ou seja, são da forma (k, y_0) , para qualquer k real. Portanto, os pontos da reta compõem o conjunto solução da equação linear $0 \cdot x + 1 \cdot y = y_0$.

Suponha agora que a reta seja vertical. Então ela intersecta o eixo x em um número x_0 . Todos os pontos desta reta têm a primeira coordenada igual a x_0 , sendo da forma (x_0, k) para qualquer k real. Logo, os pontos da reta são o conjunto solução da equação linear $1 \cdot x + 0 \cdot y = x_0$.

Portanto, a resposta para a segunda pergunta é: **Sim, toda reta do plano representa o conjunto solução de alguma equação linear de duas variáveis.**

O nome "linear" usado para denominar essas equações que estamos estudando se justifica pelo fato demonstrado acima: os conjuntos soluções das equações da forma $ax + by = c$ correspondem exatamente às retas do plano cartesiano.

Como sabemos dois pontos distintos determinam uma reta, não é difícil esboçar a reta associada a uma equação linear $ax + by = c$. Se por exemplo, $b \neq 0$, basta atribuir dois valores distintos a_1 e a_2 para a incógnita x e substituí-los na equação, isolando e calculando os valores correspondentes para y , digamos, b_1 e b_2 . Assim, a reta procurada será aquela que passa por (a_1, b_1) e (a_2, b_2) . Por exemplo, na equação $3x + y = 8$, substituindo $x = 0$ na equação, obtemos $y = 8$ e substituindo $x = 1$, obtemos $y = 5$, logo, a reta associada à equação é aquela que passa pelos pontos $(0, 8)$ e $(1, 5)$.

No contexto mais geral, envolvendo um número maior de incógnitas, digamos $x_1, x_2, \dots, x_n$, equações da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ são constantes, tais que $a_1, a_2, \dots, a_n$ não são todos nulos, também serão chamadas de lineares.

EXPLORANDO POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS NO PLANO

Retas no Plano Cartesiano

Atividade 10

Na última seção, vimos que o conjunto solução de uma equação linear em duas incógnitas é representado por uma reta no plano. Considere as equações lineares a seguir:

$$\text{Equação 1 : } 2x + 3y = 1; \quad \text{Equação 2 : } -6x - 9y = -3;$$

$$\text{Equação 3 : } 2x + 3y = 4; \quad \text{Equação 4 : } 3x + y = 5.$$

- Esboce a reta associada a Equação 1, em seguida, destaque 2 pontos dessa reta. Esses dois pontos são soluções da Equação? Justifique.
- Esboce a reta da Equação 2. Qual é a relação entre essa reta e a da Equação 1? Discuta com seus colegas o que isso significa com relação às soluções das Equações 1 e 2.
- Qual é a relação algébrica entre as Equações 1 e 2? Elabore exemplos de outras equações lineares que tenham a mesma relação.
- Esboce a reta da Equação 3. Qual é a relação entre as retas das Equações 1 e 3? Baseado nisso, diga se um ponto (x_0, y_0) pode ser solução das Equações 1 e 3 simultaneamente? Justifique a sua resposta.
- Qual é a relação algébrica entre as Equações 1 e 3? Dê exemplos de outras equações que tenham a mesma relação.
- Trace a reta associada a Equação 4. Qual a relação dessa reta com as traçadas nos itens anteriores?
- Resolva o sistema formado pelas Equações 1 e 4 e relacione a solução com o que você observou no gráfico?

ORGANIZANDO POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS NO PLANO

Nos itens a), b e c da atividade *Retas no Plano Cartesiano* vimos que algumas equações lineares, mesmo tendo coeficientes diferentes, representam a mesma reta no plano, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução. Naquela atividade, a equação $-6x - 9y = -3$ é obtida multiplicando-se a equação $2x + 3y = 1$ por -3 e ambas essas equações possuíam mesmo conjunto solução, sendo representadas por uma mesma reta no plano cartesiano. Seria esse um fenômeno geral? Bem, vamos investigar!

EXEMPLO 1

Vamos começar com duas equações lineares múltiplas uma da outra por uma constante $k \neq 0$ como segue:

$$\text{Equação 1: } ax + by = c; \quad \text{Equação 2: } kax + kby = kc.$$

Se (x_0, y_0) é uma solução da Equação 1, temos:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Ao multiplicarmos ambos os lados dessa equação por k , temos:

$$kax_0 + kby_0 = kc.$$

Ou seja, (x_0, y_0) também é uma solução para Equação 2.

Por outro lado, se (x_0, y_0) é uma solução para Equação 2, temos:

$$kax_0 + kby_0 = kc.$$

Ao dividirmos ambos os lados dessa equação por k (lembre-se que $k \neq 0$), temos:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Assim, temos que (x_0, y_0) também é uma solução para Equação 1. Duas equações que têm o mesmo conjunto solução são chamadas de *equações equivalentes*. O raciocínio acima prova que **se duas equações que são múltiplas uma da outra são equivalentes e, portanto, são representadas por retas coincidentes no plano.**

Com base nas ideias organizadas acima, as equações $3x - 6y = 4$ e $12x - 24y = 16$ representam retas coincidentes no plano, pois a segunda equação é obtida da primeira multiplicando-se a igualdade por 4.

Ainda na atividade *Retas no Plano Cartesiano* nos itens d e e, você estudou um caso de duas equações lineares que eram diferentes apenas pelo valor de seus coeficientes independentes. As retas correspondentes àquelas equações eram paralelas. Vamos deduzir aqui que este também é um fato geral.

EXEMPLO 2

Considere as Equações 3 e 4 abaixo:

$$\text{Equação 3: } ax + by = c_1; \quad \text{Equação 4: } ax + by = c_2;$$

onde a, b, c_1 e c_2 são constantes com $c_1 \neq c_2$. Vamos dividir nosso estudo em três casos:

1º caso) $b = 0$: As duas equações se reduzem a $ax = c_1$ e $ax = c_2$. Como b é nulo e a e b não são nulos simultaneamente, temos $a \neq 0$. Dividindo as equações por a , temos $x = \frac{c_1}{a}$

e $x = \frac{c_2}{a}$, que representam duas retas verticais e diferentes, uma vez que $c_1 \neq c_2$. Assim, estas retas são paralelas.

2º caso) $a = 0$: Temos que b será não nulo. Repetindo o processo acima, veremos que as Equações 3 e 4 são equivalentes às equações $y = \frac{c_1}{b}$ e $y = \frac{c_2}{b}$, que correspondem a um par de retas horizontais e diferentes, logo, paralelas.

3º caso) $a \neq 0$ e $b \neq 0$: Dividindo as Equações 3 e 4 por b e isolando o termo que contém a incógnita y , vemos que estas equações são equivalentes respectivamente às equações $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c_1}{a}$ e $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c_2}{a}$. As retas correspondentes a essas equações são exatamente os gráficos das funções afins $f(x) = \frac{-a}{b}x + \frac{c_1}{a}$ e $g(x) = \frac{-a}{b}x + \frac{c_2}{a}$. As taxas de variação média de f e g são ambas iguais a $\frac{-a}{b}$, portanto, como vimos no capítulo de Função Afim, os gráficos dessas duas funções são dados por retas paralelas.

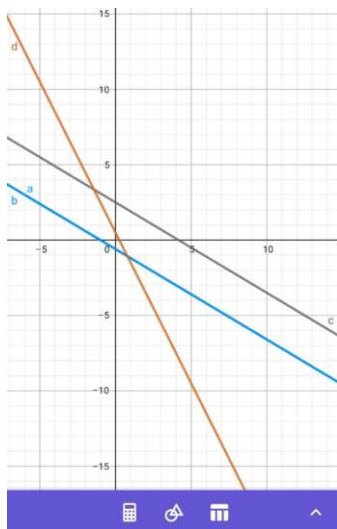
Deduzimos assim que **se duas equações lineares diferem apenas pelo seu coeficiente independente, elas definem retas paralelas**.

O raciocínio desenvolvido acima mostra que numa equação linear $ax + by = c$, os coeficientes a e b das incógnitas x e y estão diretamente relacionados à inclinação da sua reta associada: quando $b = 0$, a reta é vertical; quando $a = 0$, é horizontal e quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a inclinação da reta é igual à taxa de variação média da função afim $f(x) = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{a}$, ou seja, $\frac{-a}{b}$.

Para ilustrar o raciocínio desenvolvido acima, considere as equações abaixo:

$$(a) 3x + 5y = -3; \quad (b) 6x + 10y = -6; \quad (c) -12x - 20y = -50; \quad (d) 4x + 2y = 1.$$

A inclinação das retas dadas pelas equações lineares (a), (b) e (c) é a mesma, pois $\frac{-3}{5} = \frac{-6}{10} = \frac{-(-12)}{-20}$, logo, elas correspondem a retas paralelas (ou coincidentes) duas a duas no plano cartesiano. Em particular, como (b) é obtida multiplicando a equação (a) por 2, estas equações são equivalentes e portanto determinam retas coincidentes no plano. Já a equação (d) tem inclinação igual a $\frac{-4}{2} = -2$, e portanto, diferente das demais. Logo, a reta que representa o conjunto solução da equação (d) terá um único ponto de interseção com cada uma das retas associadas às equações (a), (b) e (c). A figura a seguir ilustra esses fatos:



PRATICANDO POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS NO PLANO

Construindo Retas no Plano

Atividade 11

Considere a reta r cuja equação é $3x + 4y = 1$. Em cada item abaixo, encontre uma equação linear em x e y tal que ela:

- a) Seja equivalente à equação do enunciado, com coeficiente de x igual a -1 ;
- b) Seja equivalente à equação do enunciado, com coeficiente de y igual a 2 ;
- c) Seja equivalente à equação do enunciado, com coeficiente de x igual a $\frac{1}{3}$;
- d) Seja equivalente à equação do enunciado, com termo independente igual a 5 ;
- e) Represente uma reta paralela a r e que passa pelo ponto $(2, 5)$;
- f) Tenha o coeficiente de x igual a 6 , represente uma reta paralela a r e passe pelo ponto $(3, -7)$;
- g) Tenha coeficiente de y igual a 9 , represente uma reta concorrente a r e passe pelo ponto $(8, 1)$.
- h) Você consegue encontrar mais de uma equação linear que atenda o que foi pedido no item g)? O mesmo é possível para os itens e) e f)? Por quê?
- i) Utilize o GeoGebra para plotar as retas correspondentes às equações obtidas por você nos itens e), f) e g) e confirmar se elas cumprem as propriedades pedidas nesses itens.

Fazendo mais bolos

Atividade 12

Vamos voltar à fábrica de bolos da Tia Tatá? Sabemos que os bolos que mais vendem são os de fubá e o de chocolate e que custam 15 reais e 18 reais cada um, respectivamente.



- a) Em determinado dia, a fábrica precisa faturar exatamente R\$ 510,00 com a venda desses dois tipos de bolo. Escreva uma equação que relacione as possíveis quantidades de cada bolo que ela precisa vender;
- b) Na receita do bolo de chocolate usam-se 4 ovos, enquanto na de fubá, usam-se 3. Escreva uma equação que relacione a quantidade de bolos de chocolate e a quantidade de bolos de fubá e com um total de 100 ovos;
- c) Num mesmo plano cartesiano, faça um esboço das representações gráficas dos conjuntos soluções das equações encontradas nos itens a) e b);
- d) Imagine que o dia em que é necessário se obter o faturamento de R\$ 510,00 é o mesmo em que a fábrica dispõe dos 100 ovos. Assumindo que todos os bolos sejam vendidos, quantos bolos de cada sabor deverão ser produzidos?



Figura 5.2: Fonte: Adaptada do aplicativo Google Maps.

O mapa acima ilustra o trecho de uma rede rodoviária com grande movimento de carros em um bairro da cidade do Rio de Janeiro. Todas as avenidas destacadas no mapa são de mão única e as setas indicam o sentido em que os veículos trafegam sobre elas. Os valores destacados em amarelo em alguns trechos das avenidas representam o fluxo de veículos que passam por hora naquele trecho. Nessa rede de tráfego há conservação do fluxo de veículos, isto é, o fluxo de veículos que entra em uma bifurcação é igual ao fluxo de veículos que sai dessa bifurcação. Por exemplo, a figura mostra que por hora chegam 600 veículos nesta rede através da Avenida Maria Teresa, sendo que na primeira bifurcação, uma certa quantidade x_1 de veículos continua em frente e outra quantidade x_2 entra pelo retorno da Avenida. Pela conservação de fluxos temos:

$$x_1 + x_2 = 600.$$

- Com as informações que estão disponíveis no mapa e a conservação do fluxo de veículos, obtenha um sistema de equações envolvendo as incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_6$.
- Suponha que um técnico da companhia de engenharia de tráfego aferiu que o valor da incógnita x_6 era de 400 veículos por hora. Com essa informação e com o sistema obtido no item **a)**, determine o valor das outras incógnitas destacadas no mapa.
- O sistema que você obteve no item **a)** tem mais de uma solução? Se sim, você consegue obter algumas?

ORGANIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de equações é dito *linear* quando ele é formado apenas por equações lineares. Você provavelmente já estudou a resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas há alguns anos, pelos métodos de *substituição* e de *adição*. Vamos relembra-los?

O *método de substituição* consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir essa incógnita na outra equação pela expressão equivalente a ela determinada previamente. Vamos ver um exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Isolando x na segunda equação, obtemos $x = 4y + \frac{5}{3}$. Substituindo o valor de x na primeira equação:

$$2x + 3y = 7 \Rightarrow 2\left(4y + \frac{5}{3}\right) + 3y = 7 \Rightarrow 8y + \frac{10}{3} + 3y = 7 \Rightarrow 11y = \frac{11}{3} \therefore y = \frac{1}{3}.$$

Substituindo o valor obtido para y na segunda equação, obtemos:

$$x = 4y + \frac{5}{3} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{3} \therefore x = 3.$$

Portanto, o sistema possui uma única solução, dada pelo par $(3, \frac{1}{3})$.

Poderíamos resolver esse mesmo sistema de equações de outra maneira, usando o *método da adição*. Nesse método, trabalhamos com equações equivalentes determinadas de forma que seja possível, somando membro a membro as equações do sistema, cancelar os termos de uma das incógnitas. De fato, vamos multiplicar a segunda equação do sistema por -2 , obtendo uma equação equivalente.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = \frac{5}{3} \end{cases} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 8y = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Repare que ao somarmos as equações membro a membro, a incógnita x desaparecerá da expressão da soma:

$$(2x + 3y) + (-2x + 8y) = 7 + -\frac{10}{3} \Rightarrow 11y = \frac{11}{3} \therefore y = \frac{1}{3}.$$

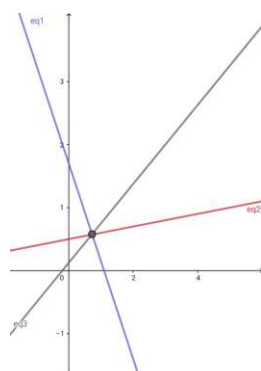
Agora, basta substituir o valor obtido para y em alguma das duas equações do sistema, e como já vimos acima, vemos que teremos $x = 3$.

Quantas soluções um sistema linear com 2 incógnitas pode ter?

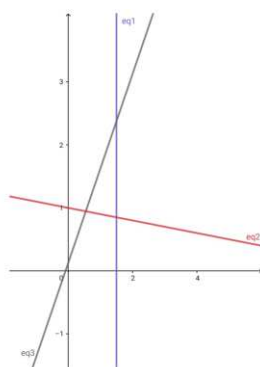
Nas seções anteriores vimos que o número de soluções em um sistema de equações pode ser bem diverso. Na seção *Organizando - Sistemas de Equações*, vimos exemplos de sistemas que possuem, uma, duas ou até mesmo nenhuma solução. Veremos agora que quando o sistema de equações em duas incógnitas é **linear**, o formato do conjunto solução será bem particular. Lembra-se da interpretação geométrica dada ao conjunto solução das equações lineares em duas incógnitas x e y ? Essas soluções correspondem a uma reta no plano cartesiano. Se temos um sistema linear nestas mesmas incógnitas, as suas soluções são dadas por **pontos que pertencem simultaneamente a cada uma das retas** correspondentes às equações lineares desse sistema. Sabemos que toda reta tem infinitos pontos. Sabemos também que duas retas do plano ou não se intersectam (são paralelas), ou se intersectam num único ponto (são concorrentes) ou são iguais (são coincidentes). Portanto, as possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear em duas incógnitas é:

- Possui uma única solução.** Este é o caso em que as retas associadas às equações lineares concorrem em um único ponto, que será exatamente a solução do sistema;
- Possui infinitas soluções.** Este é o caso em que todas as retas associadas às equações lineares são iguais, isto é, são todas coincidentes entre si.
- Não existe solução.** Este é o caso em que não existe um ponto que pertença a todas as retas simultaneamente.

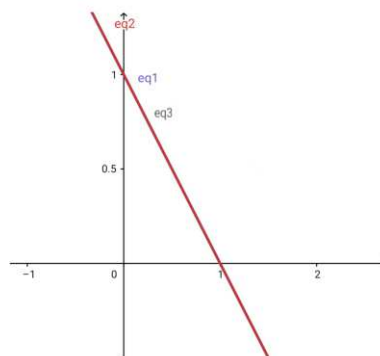
A figura abaixo ilustra, geometricamente, as três possibilidades de conjunto solução apresentadas acima, para o caso de um sistema linear com duas incógnitas e três equações. Repare que no caso de infinitas soluções, as três retas associadas às equações são coincidentes.



Sistema com solução única



Sistema com solução vazia



Sistema com infinitas soluções

Você observou que quando resolvemos um sistema linear pelo método da adição, realizamos uma manipulação algébrica em uma das equações de modo que pudéssemos cancelar uma incógnita do sistema? Essa é uma estratégia bastante interessante e que pode ser ampliada para a resolução de sistemas maiores. Vamos conhecer melhor essa estratégia de resolução? Para isso, antes precisamos conhecer um tipo de sistema que será bem interessante para nós: os sistemas escalonados.

Sistemas escalonados

No item a) da atividade *Rede de Tráfego Rodoviário*, você viu que o seguinte sistema linear modelava matematicamente as informações sobre o fluxo de veículos em um complexo de avenidas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 600 \\ x_2 + x_3 = 650 \\ x_3 - x_4 = 100 \\ x_4 - x_5 = -50 \\ x_5 - x_6 = 100 \end{cases}$$

Apesar de possuir seis incógnitas, descobrir soluções desse sistema não é tão complicado. Por exemplo, ao atribuir o valor 400 à incógnita x_6 , através da quinta equação, se obtém que $x_5 = 500$. "Subindo" para a quarta equação, substituindo esse valor encontrado para x_5 se determina que $x_4 = 450$. Continuando desse modo, "subindo" gradativamente nas equações, se determinam valores para todas as incógnitas de forma que, para eles, todas as igualdades do sistema são satisfeitas, isto é, obtemos uma solução desse sistema. Se iniciássemos atribuindo um outro valor para x_6 , digamos 300, poderíamos repetir o mesmo processo, obtendo outra solução para o sistema: calculamos x_5 na quinta equação, obtendo 400, e depois "subimos" nas equações e substituindo os valores obtidos, encontrando $x_4 = 350$, $x_3 = 450$, $x_2 = 200$ e $x_1 = 400$. Note que esse sistema tem, portanto, mais de uma solução.

Observe que esse sistema pôde ser organizado em um formato bem específico: a incógnita x_1 não aparece efetivamente a partir da segunda equação, ou seja, os coeficientes de x_1 nessas outras equações são todos nulos; a incógnita x_2 não aparece a partir da terceira equação, a incógnita x_3 não aparece a partir da quarta equação e assim sucessivamente até chegar à última equação. Note que é correto afirmar que a incógnita x_5 não aparece a partir da sexta equação, pois... não há uma sexta equação. Um sistema linear com este formato é chamado de **escalonado**.

De maneira mais precisa, dizemos que um sistema linear está **escalonado** se é possível enumerar suas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ e ordenar as suas equações lineares de forma que x_1 não aparece efetivamente a partir da segunda equação, x_2 não aparece a partir da terceira equação e assim sucessivamente até chegarmos à última incógnita x_n ou até a última equação do sistema.

A seguir temos mais um exemplo de sistema escalonado. Quando organizamos as equações escrevendo cada incógnita de forma alinhada verticalmente como ilustrado abaixo (x_4 embaixo de x_4 , x_3 embaixo de x_3 , ...), visualmente se forma nos espaços "em branco" uma espécie de "escada":

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 3 \\ 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -7 \\ x_3 + 2x_4 = 9 \\ 7x_4 = 15 \end{cases}$$

Vamos analisar os sistemas a seguir:

$$(I) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - z = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 2x + 4y - 3z + w = 1 \\ 7y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

O sistema (I) está escalonado. Aparentemente o sistema (II) não está escalonado, porém, ele está sim: ao invés de listar as incógnitas na ordem x , y , z e w , organizamos na ordem w , x , y , z . Também alternamos a posição da segunda equação com a terceira. Note que esse tipo de mudança não altera as soluções do sistema pois as equações, na prática, continuam as mesmas.

$$\begin{cases} w + 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + 2z - z = 0 \\ 7y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando e Resolvendo Sistemas Lineares

Veremos agora que todo sistema linear pode ser transformado em um sistema escalonado que mantém exatamente as mesmas soluções do primeiro. Este processo será chamado de *escalonamento* de um sistema linear. O fato do sistema estar escalonado facilita o cálculo das suas soluções.

Essencialmente, o processo de escalonamento utiliza as mesmas técnicas que já vínhamos utilizando até aqui. São elas:

- a) Trocar duas ou mais equações de posição;
- b) Multiplicar uma equação (todos os seus termos) por uma constante não nula;
- c) Trocar uma equação pela soma, membro a membro, dela com outra equação do sistema.

Observe que ao aplicar a técnica a) evidentemente não se alteram as soluções do sistema pois as suas equações continuam as mesmas. Por sua vez, as técnicas b) e c) são as mesmas usadas no método da adição para sistemas lineares com 2 equações e 2 incógnitas. Pode-se provar que estas técnicas também não alteram as soluções do sistema.

Repare que, combinando as técnicas b) e c), obtemos a técnica:

- d) Trocar uma equação pela soma, membro a membro, dela com uma outra equação do sistema que foi multiplicada por uma constante não nula.

Vamos ver alguns exemplos de como utilizá-las para se escalonar e resolver um sistema?

EXEMPLO 3

Iremos escalonar e resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Procuramos sempre deixar a primeira incógnita da primeira equação com coeficiente 1. É o caso deste exemplo, mas se não fosse, utilizaríamos as técnicas a) ou b) para deixar o sistema com esse formato.

Iremos eliminar primeiro a incógnita x na segunda e na terceira equações. Usamos a técnica

d) trocando a segunda equação pela soma dela pela primeira multiplicada por -1 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(-1) \downarrow \\ + \leftarrow \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Agora, usamos a técnica d) novamente, trocando a terceira equação pela soma dela pela primeira multiplicada por -2 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(-2) \downarrow \\ \downarrow \\ + \leftarrow \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$$

Para concluir o escalonamento, basta eliminar a incógnita y da terceira equação. Usamos a técnica d) novamente, trocando a terceira equação pela sua soma com a segunda equação multiplicada por -1 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(-1) \downarrow \\ + \leftarrow \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ -3z = -3 \end{cases}$$

Obtivemos portanto um sistema escalonado. Na terceira equação obtemos:

$$-3z = -3 \quad \therefore z = 1.$$

Substituindo o valor encontrado para z na segunda equação:

$$-5y + 4z = -11 \implies -5y + 4 = -11 \implies -5y = -15 \quad \therefore y = 3.$$

Por fim, substituindo os valores encontrados para y e z na primeira equação, obtemos:

$$x + 2y + z = 12 \implies x + 6 + 1 = 12 \quad \therefore x = 5.$$

Concluimos que o sistema possui uma única solução: $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$, ou de forma mais resumida, podemos representar esta solução lista ordenada $(5, 3, 1)$.

Quando um sistema linear possui uma única solução, dizemos que ele é um **sistema possível e determinado** (S.P.D.).

EXEMPLO 4

Escalone e resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = -4 \\ -2x + 4y - 6 = 8 \end{cases}$$

Começamos usando a técnica **a)** alternando a posição da primeira equação com a segunda. Dessa forma, o coeficiente de x na primeira equação passa a ser 1:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 3x + 4y + z = -6 \\ -2x + 4y - 6z = 8 \end{cases}$$

Em seguida, usamos a técnica **d)** na segunda equação, trocando-a pela soma dela com a primeira equação multiplicada por -3 :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 3x + 4y + z = -6 \\ -2x + 4y - 6z = 8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-3) \downarrow \\ \downarrow \\ + \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2y - 8z = 6 \\ -2y + 4y - 6z = 8 \end{cases}$$

Repetimos o processo agora trocando a terceira equação pela soma dela com a primeira multiplicada por 2. Notemos que ao fazer essa operação, todos os coeficientes da última equação vão se anular:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2y - 8z = 6 \\ -2x + 4y - 6z = 8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(+2) \downarrow \\ \downarrow \\ + \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2y - 8z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Assim, concluímos o escalonamento. Observe que quaisquer valores que se deem às incógnitas x , y e z sempre fornecerão uma solução para a terceira equação (compare com a resposta obtida no item **e)** da Atividade *Batalha Naval*), de modo que ela é *irrelevante* para o cálculo das soluções do sistema. Podemos descartá-la, ficando apenas com as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2y - 8z = 6 \end{cases}$$

Este último sistema também está escalonado. Isolando y na segunda equação, obtemos:

$$2y - 8z = 6 \Rightarrow 2y = 6 + 8z \therefore y = 3 + 4z.$$

Substituindo este valor encontrado para y na primeira equação:

$$x - 2y + 3z = -4 \Rightarrow x - 2(3 + 4z) + 3z = -4 \Rightarrow x - 6 - 8z + 3z = -4 \therefore x = 2 + 5z.$$

Notemos que, se fizermos $z = 0$, pelos cálculos acima, obteremos que $x = 2$ e $y = 3$, e portanto, esses três valores compõem uma solução do sistema. Se porém fizermos $z = 3$, obteremos $x = 17$ e $y = 15$, logo, esses três valores fornecem outra solução para o sistema. Poderíamos proceder assim para qualquer outro valor real escolhido para z . Dessa forma, vemos que todas as soluções desse sistema são da forma:

$$x = 2 + 5k, \quad y = 3 + 4k \quad \text{e} \quad z = k,$$

para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Portanto, esse sistema linear tem *infinitas soluções*. Quando isso ocorre, dizemos que o **sistema é possível e indeterminado** (S.P.I.).

EXEMPLO 5

Vamos alterar levemente o sistema do Exemplo 2, mudando apenas o coeficiente independente da última equação:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = -4 \\ -2x + 4y - 6z = 9 \end{cases}$$

Ao fazermos o processo de escalonamento, obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2y - 8z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

Observe que a terceira equação linear não possui solução, pois para quaisquer valores escolhidos para x , y e z , o primeiro membro nunca será igual a 1. Portanto, o sistema linear deste exemplo *não possui solução*. Quando isto ocorre, dizemos que o **sistema é impossível** (S.I.).

PRATICANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Classificando Sistemas Lineares

Atividade 14

Os sistemas lineares abaixo estão escalonados. Classifique-os em relação ao número de soluções (S.P.D., S.P.I. ou S.I.).

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ y - 4z = 2 \\ -3z = 9 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} -x - 2y + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + z - z + w = 5 \\ 5y - 3z + 2w = -8 \\ -3z - w = -3 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x + y + 3z - 4w = 9 \\ y - 4z + w = 5 \\ -z + 4w = 2 \\ 2w = -1 \end{cases}$$

Dieta Nutricional

Atividade 15

Um nutricionista está elaborando uma dieta para um paciente que está com deficiência de vitamina C, cálcio e magnésio. Uma das refeições da dieta será composta por três alimentos com quantidades medidas em porções de 50 g, de forma que os totais em miligramas (mg) dos nutrientes necessários sejam atingidos. A tabela abaixo contém as informações nutricionais dos três alimentos desta refeição:

Miligramas de nutrientes por porção de 50g de alimento				
Nutriente	Alimento 1 (mg)	Alimento 2 (mg)	Alimento 3 (mg)	Total de nutrientes necessários (mg)
Vitamina C	10	10	20	100
Cálcio	50	40	10	300
Magnésio	30	10	40	200

- a) Denote por x_1 , x_2 e x_3 a quantidade de porções dos alimentos 1, 2 e 3 respectivamente que compõem uma refeição contendo exatamente a quantidade necessária de Vitamina C, Cálcio e Magnésio a serem ingeridas pelo paciente. Utilizando a tabela acima, escreva um sistema linear nas incógnitas x_1 , x_2 e x_3 que represente essa situação;
- b) Escalone e resolva o sistema obtido no item a), classificando-o.
- c) Qual será o peso total de comida ingerida nesta refeição, considerando que ela contém apenas os alimentos 1, 2 e 3?

Trajetória de uma bola de futebol

Atividade 16

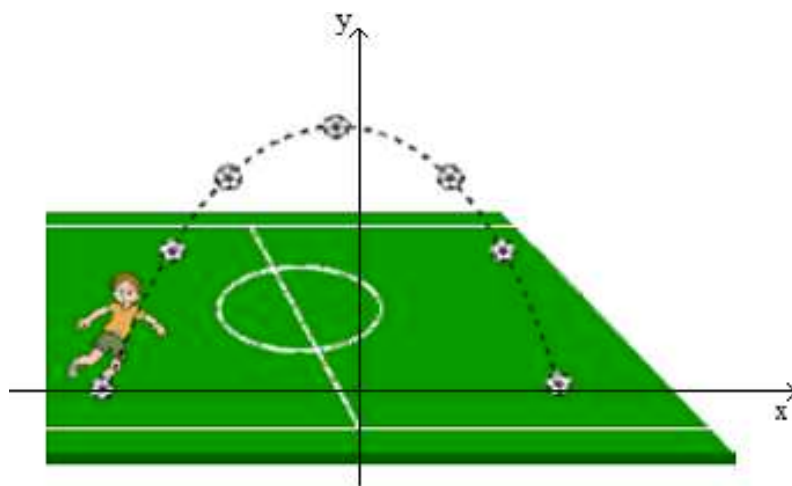


Figura 5.3: Adaptado de: [Profes](#)

Após ver o vídeo em que Nelinho chuta a bola para fora do estádio, Mateus ficou fã do jogador e está praticando chutes altos com sua bola de futebol no campinho que há nas proximidades de sua casa. Mateus dá um chute na bola, que segue a trajetória de uma parábola. Considere que, numa visão frontal, considerou-se um sistema de coordenadas cartesianas como o da figura, onde o eixo x é paralelo à linha lateral do campo e o eixo y é perpendicular ao plano do campo. Ao longo da trajetória, a bola parte do ponto $(-5, 0)$, passa pelo ponto $(-2.5, 5)$ e toca o solo no ponto $(2.5, 0)$. Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que modela a

trajetória da bola.

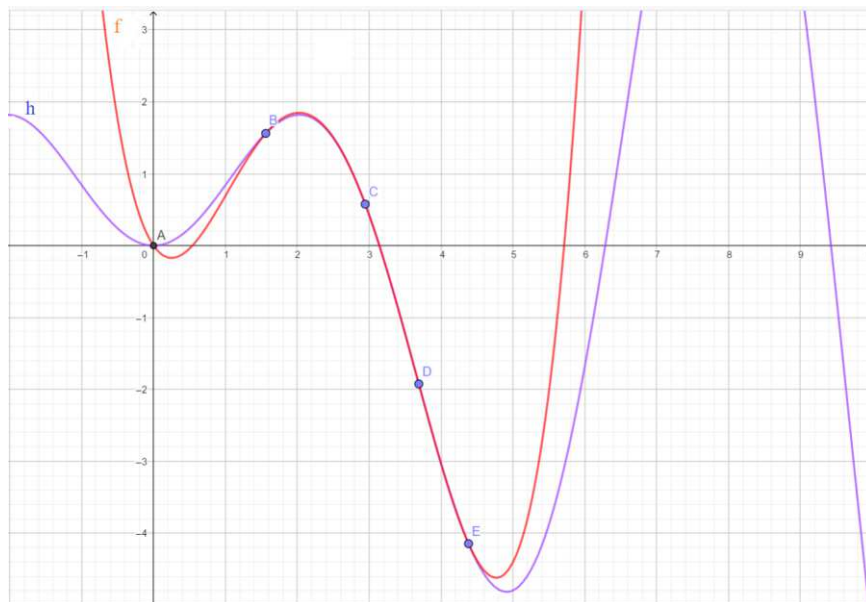
- Utilizando as informações sobre os pontos do sistema de coordenadas informados no enunciado pelos quais a bola passa no decorrer do movimento, obtenha um sistema de 3 equações nas 3 incógnitas a , b e c .
- Escalone e resolva o sistema do item a);
- Determine a altura máxima atingida pela bola após o chute dado por Mateus.

PARA SABER + INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Na Atividade *Trajetoária de uma bola de futebol*, você verificou que existe uma única função quadrática cujo gráfico passa por três pontos dados no plano cartesiano. O processo de encontrar uma função cujo gráfico passa por uma quantidade finita de pontos dados é denominado **interpolação de pontos**. A interpolação de pontos costuma ser aplicada quando se estuda um problema envolvendo duas grandezas representadas pelas variáveis x e y respectivamente, tais que y é uma função de x , digamos $y = h(x)$. Esta função h pode ter uma expressão analítica muito complicada e na maioria das vezes, desconhecida, e o máximo que se conhece sobre ela é uma lista finita $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., $A_n = (x_n, y_n)$ de pontos de seu gráfico. Através da interpolação dos pontos $A_1, \dots, A_n$, procura-se obter uma função f cujo gráfico passe por esses pontos, que seja definida por uma expressão mais simples e que tenha o gráfico parecido com o da função h .

As **funções polinomiais** são aquelas definidas através de expressões da forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes reais. Se a_n é não nulo, a maior potência de x que aparece na expressão $f(x)$ é x^n . Neste caso, dizemos que f é uma função polinomial de **grau** n . As funções afins e quadráticas, estudadas nos capítulos anteriores, são exemplos de funções polinomiais de graus 1 e 2 respectivamente. Repare que o cálculo das imagens das funções polinomiais envolvem apenas as operações elementares de adição, subtração e multiplicação de números reais, o que favorece o cálculo dessas imagens do ponto de vista computacional.

Chamamos de **interpolação polinomial** o procedimento de encontrar uma função polinomial que interpola um conjunto finito de pontos dados. A figura abaixo ilustra um exemplo de interpolação polinomial de uma função h (gráfico azul) os 5 pontos A, B, C, D e E do seu gráfico, aproximando-a por uma função polinomial f (gráfico vermelho). Note que o comportamento do gráfico de f é muito parecido com o de h nas proximidades desses 5 pontos.



A Teoria dos Sistemas Lineares que estamos estudando permite demonstrar que dada uma lista $A_0 = (x_0, y_0)$, $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ de $n + 1$ pontos conhecidos do plano cartesiano, se as abscissas $x_0, x_1, \dots, x_n$ forem distintas duas a duas, então existe uma única função polinomial de grau n cujo gráfico passa por esses pontos. De fato, se f é uma função polinomial de grau n , temos que:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

onde $a_n \neq 0$. Se o gráfico de f passa por $A_0 = (x_0, y_0)$, então $f(x_0) = y_0$. Substituindo essa última informação na expressão de f temos:

$$a_0 + x_0 \cdot a_1 + \dots + x_0^n \cdot a_n = y_0,$$

o que nos dá uma equação linear nas incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$, cujos coeficientes dessas incógnitas são respectivamente $1, x_0, \dots, x_0^n$ e o coeficiente independente é y_0 . Repetindo o mesmo cálculo para os demais pontos da lista, obtém-se um sistema linear de $n + 1$ equações nas $n + 1$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$:

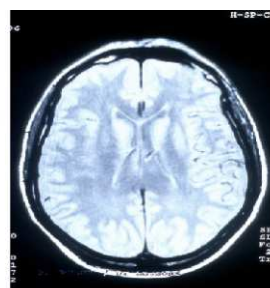
$$\begin{cases} a_0 + x_0 \cdot a_1 + \dots + x_0^n \cdot a_n = y_0 \\ a_0 + x_1 \cdot a_1 + \dots + x_1^n \cdot a_n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + x_n \cdot a_1 + \dots + x_n^n \cdot a_n = y_0 \end{cases}$$

o qual pode-se provar que é possível e determinado! Assim, existem únicos valores para as incógnitas $a_0, \dots, a_n$ que fornecem uma solução para o sistema, logo existe uma única função polinomial que interpola os pontos $A_0, \dots, A_n$. Repare que, na atividade [Trajetória de uma bola de futebol](#), foram dados os três pontos do plano: $A_0 = (-5, 0)$, $A_1 = (-2.5, 5)$ e $A_2 = (2.5, 0)$ o que permitiu a você determinar uma (única!) função polinomial de grau 2 (função quadrática) que interpola esses pontos.

VOCÊ SABIA?

Nos últimos quarenta anos, a **Tomografia Computadorizada** se consolidou como um dos métodos mais importantes de diagnóstico na medicina do corpo humano. Ela possibilita a aquisição de imagens paralelas e espacialmente consecutivas e cortes axiais com melhor contraste entre os tecidos do que a radiografia convencional, possibilitando a análise de regiões que com outras técnicas, não poderiam ser observadas satisfatoriamente.

Assim, a Tomografia Computadorizada é um meio não invasivo de obter imagens do interior de um corpo. Essas imagens são obtidas a partir do exterior do objeto pela medição das intensidades dos feixes de Raios-X que atravessam esse corpo. Esses dados são processados por um computador e a seção transversal computada é exibida num monitor de vídeo.



A construção de uma imagem da Tomografia requer encontrar **soluções aproximadas de sistemas de equações lineares com muitas equações e muitas incógnitas**. Para compreender melhor o processo de construção da imagem, imaginemos que a seção transversal física do paciente seja a própria imagem dividida em *pixels*. Os *pixels* são pequenos quadrados monocromáticos que formam a imagem, ou seja, são os "elementos básicos" da imagem. Como o paciente é bombardeado inúmeras vezes por feixes de Raios-X, cada *pixel* será "igualmente bombardeado" por estes feixes, em diversas direções, à medida que o tomógrafo gira. Para construir a imagem da Tomografia é necessário determinar a densidade de Raios-X retida em cada *pixel*. A densidade de Raios-X em cada *pixel* é interpretada pelo computador através de uma tonalidade de cinza. Como o tecido humano absorve ou desvia densidades diferentes de Raios-X, a imagem distingue os diversos tecidos e órgãos.

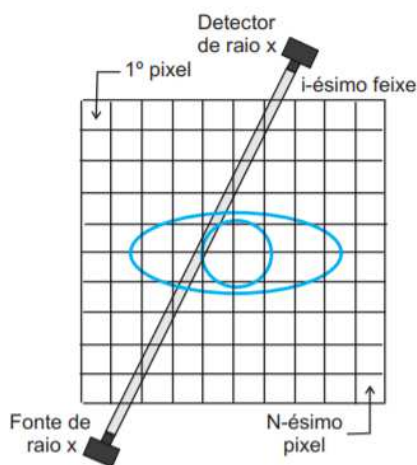


Figura 5.4: Fonte: Livro do Howard Anton.

Para compreender melhor a ideia dos cálculos que permitem obter as imagens do exame, considere uma simplificação do campo de visão em apenas 9 *pixels*, que foram "escaneados" com 12 feixes de Raios-X, cujas densidades são indicadas na figura a seguir:

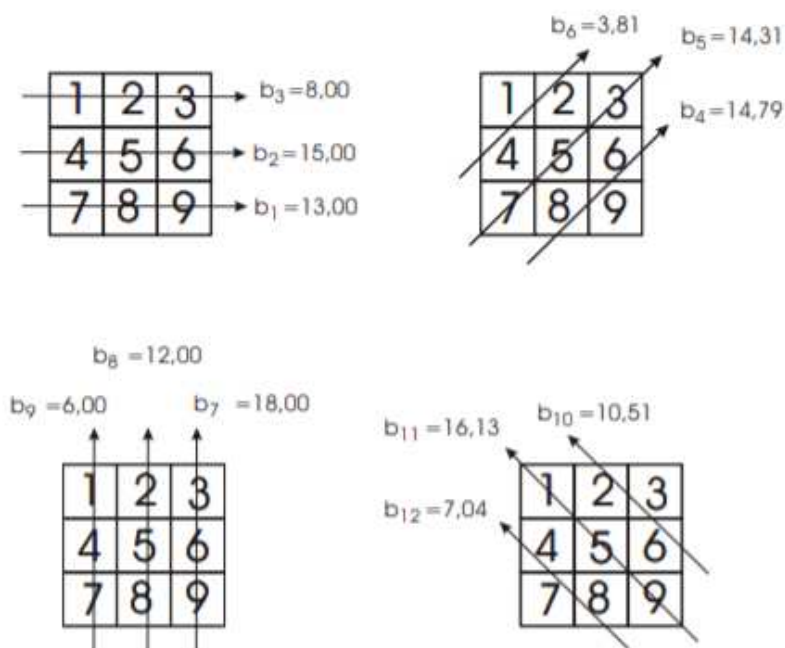


Figura 5.5: Fonte: Livro do Howard Anton.

Denotamos por x_1 a densidade de Raios-X absorvidas no pixel 1, x_2 a densidade de Raios-X absorvidas no pixel 2 e assim sucessivamente. Por outro lado, representamos por b_1 a densidade do 1º feixe de Raios-X, por b_2 a densidade do 2º feixe de Raios-X e assim sucessivamente. Para cada feixe de *pixels*, sabe-se que **a sua densidade feixe é igual à soma das densidades de Raios-X absorvidas em todos os *pixels* pelos quais ele atravessa**. Analisando a imagem acima, temos que o 1º feixe atravessa os *pixels* 7, 8 e 9, logo, a densidade b_1 desse feixe é igual a soma das densidades absorvidas por esses *pixels*. Isto é:

$$x_7 + x_8 + x_9 = b_1 = 13,00,$$

que é uma equação linear nas incógnitas x_7 , x_8 e x_9 . Fazendo mesmo raciocínio para os outros 11 feixes com densidades $b_2, b_3, \dots, b_{12}$, obtemos outras equações lineares, que juntas compõem o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_7 + x_8 + x_9 = 13,00 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15,00 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8,00 \\ x_6 + x_8 + x_9 = 14,79 \\ x_3 + x_5 + x_7 = 14,31 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3,81 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 18,00 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 12,00 \\ x_1 + x_4 + x_7 = 6,00 \\ x_2 + x_3 + x_3 = 10,51 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 16,13 \\ x_4 + x_7 + x_8 = 7,04 \end{cases}$$

As soluções desse sistema nos permitem determinar as densidades de Raios-X absorvidas em cada *pixel* e assim, o computador colore esse pixel com uma tonalidade de cinza associada a essa densidade, formando no seu conjunto, a imagem da Tomografia.

Repare que o que fizemos aqui foi uma simplificação do processo de geração da imagem, visto que há máquinas de Tomografia que trabalham com mais de 260.000 *pixels*, o que acaba gerando sistemas lineares com um número enorme de equações e incógnitas. Tais sistemas são resolvidos computacionalmente através de algoritmos muito eficientes no tempo de cálculo de suas soluções.

PARA SABER + SISTEMAS LINEARES COM 3 INCÓGNITAS

Neste capítulo, você aprendeu que as equações lineares em 2 incógnitas correspondem exatamente à retas no plano cartesiano. Além disso, você também viu que a solução de um sistema linear em 2 incógnitas é geometricamente interpretado pelo conjunto de pontos do plano que pertencem simultaneamente a todas as retas associadas às equações desse sistema.

Um sistema linear em 2 incógnitas é S.P.D. exatamente quando todas as retas dadas pelas equações do sistema são concorrentes em um ponto P do plano. Ele será S.P.I. quando todas as equações do sistemas forem representadas pela mesma reta do plano. Por fim, ele será S.I. quando não houver um ponto do plano que pertença a todas as retas simultaneamente.

Assim como os pontos de um plano estão em correspondência biunívoca com o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais, pode-se provar que **existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço com as listas ordenadas (x, y, z) de 3 números reais**. Soluções gerais de equações em três incógnitas x, y e z podem ser interpretadas geometricamente como objetos do espaço. Em particular, pode-se demonstrar que a solução geral de uma equação linear da forma:

$$ax + by + cz = d,$$

corresponde a um **plano** no espaço!

Dessa forma, o conjunto solução de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas pode ser visto como o conjunto de pontos que pertencem ao mesmo tempo aos 3 planos correspondentes às suas equações. Vamos interpretar geometricamente as possibilidades para o conjunto solução desse tipo de sistema em termos das posições relativas entre esses planos no espaço:

- a) **Sistema Possível e Determinado (S.P.D.):** Neste caso, haverá apenas uma única solução. Isso só é possível quando os três planos associados às equações do sistema forem transversais dois a dois, ambos tendo um ponto comum, como na figura a seguir:

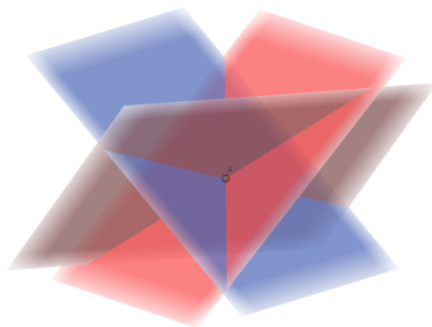


Figura 5.6: Três planos com um único ponto em comum.

- b) **Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.):** Neste caso, haverá infinitos pontos que pertencem ao mesmo tempo aos três planos. Isso ocorre em exatamente duas situações: (i) quando os três planos são coincidentes (figura 5.7); (ii) dois planos são coincidentes e o terceiro é transversal a eles (figura 5.8). Nesse caso, a interseção entre os três planos é uma reta, que contém infinitos pontos; (iii) os três planos são distintos dois a dois, e ambos possuem a mesma reta em comum (figura 5.9).



Figura 5.7: Três planos coincidentes.

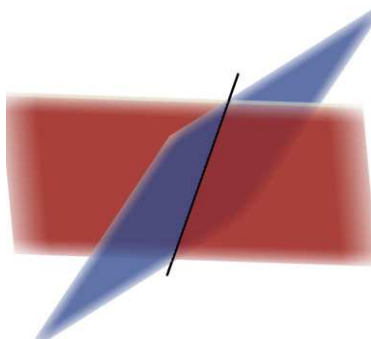


Figura 5.8: Dois planos coincidentes e um transversal com uma reta em comum.

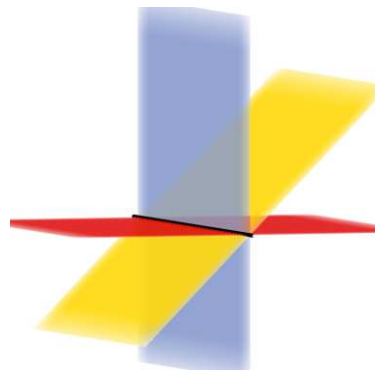


Figura 5.9: Três planos distintos dois a dois com uma reta em comum.

- c) **Sistema Impossível (S.I.):** Neste caso, não haverá pontos que pertençam simultaneamente aos três planos. Há um total de 4 configurações possíveis para os planos: (i) dois planos são coincidentes e o terceiro é diferente e paralelo a eles; (ii) dois planos são diferentes e paralelos e o terceiro é transversal a eles; (iii) os três planos são distintos e paralelos dois a dois; (iv) os três planos são transversais dois a dois e não possuem ponto em comum.



Figura 5.10: Dois planos coincidentes e um diferente e paralelo aos outros.

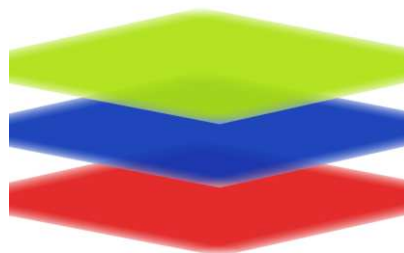


Figura 5.11: Planos distintos e paralelos entre si.



Figura 5.12: Dois planos coincidentes e um diferente e paralelo aos outros.

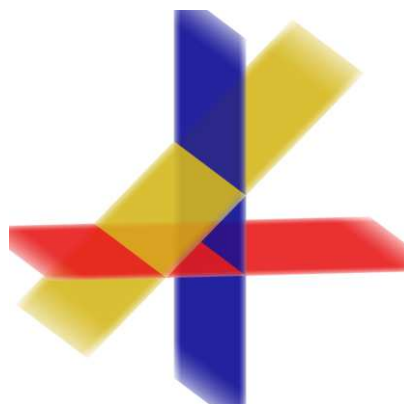


Figura 5.13: Planos distintos e paralelos entre si.

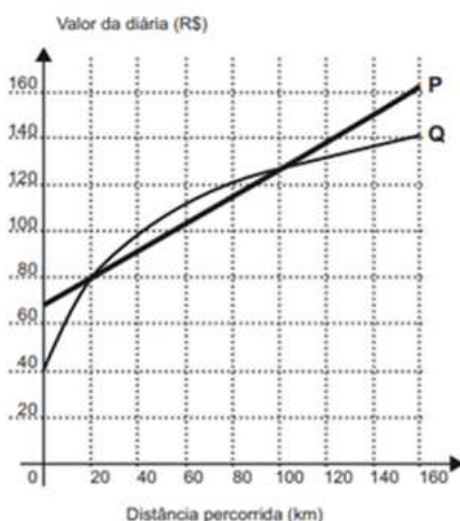
EXPLORANDO INEQUAÇÕES EM UMA INCÓGNITA

Nesta seção, estudaremos as *inequações* que é um conceito matemático utilizado para representar algebricamente um problema que envolve uma desigualdade. Você muito provavelmente já estudou alguns tipos de inequação no Ensino Fundamental. Assim como no caso de sistemas lineares, as noções de funções afim e quadrática permitirá que aprimoremos o nosso conhecimento sobre inequações e de como resolvê-las.

Locadora de carros (Adaptada do ENEM 2015)

Atividade 17

Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras *Possante* (P) e *Qualicarro* (Q), o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida em km, conforme o gráfico abaixo:



- Suponha que uma pessoa resolveu alugar um carro pela locadora Q e pagou menos que 100 reais pelo valor da diária. Quais os valores possíveis para a distância que essa pessoa percorreu com o carro?
- Se um outro cliente alugar um carro, agora na locadora P e pagar no mínimo 80 e no máximo 140 reais na diária do veículo, quais os possíveis valores para a distância percorrida com ele?
- Qual a locadora mais vantajosa, em termos de custo do aluguel, para uma pessoa que deseja alugar um carro para percorrer uma distância total de 80km ?
- Para quais valores da distância a ser percorrida de carro por uma pessoa, o custo do aluguel será o mesmo tanto para a locadora P quanto para a Q ?
- Para quais valores da distância a ser percorrida de carro por uma pessoa, fica mais barato alugar o carro pela locadora P . E pela locadora Q ?

ORGANIZANDO INEQUAÇÕES EM UMA INCÓGNITA

O conceito de inequação em Matemática é motivado pelo estudo de *desigualdades* entre duas ou mais grandezas. Problemas com desigualdades surgem naturalmente no dia a dia e costumam envolver as expressões "mais", "menos", "maior do que" ou "menor do que". Por exemplo: quais os dias de 2019 em que a temperatura máxima no Rio de Janeiro foi maior que em Salvador? O desmatamento da Amazônia em 2018 foi menor que em 2020? Quais os dias do ano em que o preço da passagem do ônibus esteve mais barata que o preço do trem? Quais os meses do ano que a sua conta de luz custou mais que 150 reais?

Em Matemática, os símbolos « $>$ » e « $<$ » são usados para representar, respectivamente, os termos "menor do que" ou "maior do que". Dessa forma, quando escrevemos $3 < 5$ devemos ler: *3 é menor do que 5*. Quando escrevemos $8 > 1$, lemos: *8 é maior do que 1*.

Os símbolos « $\leq$ » (menor do que ou igual a) e « $\geq$ » (maior do que ou igual a) também são utilizados em problemas matemáticos envolvendo desigualdades.

Uma *inequação*, assim como uma equação, também envolve duas expressões matemáticas envolvendo uma ou mais incógnitas, porém, essas expressões não se relacionam através de uma igualdade e sim através dos dos símbolos $>$, $<$, $\leq$, ou $\geq$. Por exemplo:

a) $x^2 + 2x < 5 - x$;

b) $a^2 \geq b^2 + c^2$;

c) $\sqrt{mn} \leq \frac{m+n}{2}$.

Quando atribuímos valores às incógnitas de uma inequação e obtemos uma desigualdade verdadeira, dizemos que esses valores compõem uma *solução da inequação*. Na inequação a) acima, $x = 1$ é uma solução, pois quando substituímos x por 1, obtemos $2 < 4$ (2 é menor do que 4) o que é uma desigualdade verdadeira. Já $x = 2$ não é uma solução, pois substituímos x por 2 obtemos $8 < 3$ (8 é menor do que 3), o que claramente é falso. Na inequação do item b), o terno de valores $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$ é uma solução, pois é verdade que $16 \geq 10$ (16 é maior do que ou igual a 10). O mesmo vale para o terno $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$, visto que $25 \geq 25$ (25 é maior do que ou igual a 25).

Neste capítulo, vamos nos restringir ao estudo das inequações em uma única incógnita. O conjunto solução de uma inequação em uma incógnita x é o total de valores do conjunto universo (onde se considera previamente onde incógnita pode assumir valores) que ao serem atribuídos a x , resultam numa desigualdade verdadeira.

Apesar de terem nomes parecidos, equações e inequações têm estratégias bem diferentes de resolução. Quando resolvemos a equação $x^2 = 25$, sabemos que há duas soluções: uma é a raiz quadrada de 25 e a outra, é o seu simétrico, pois dois números opostos sempre têm o mesmo quadrado. Logo,

$$x = \pm\sqrt{25} \quad \therefore x = 5 \text{ ou } x = -5.$$

Já na inequação $x^2 < 25$, se tentássemos proceder de forma parecida ao exemplo de equação e simplesmente "passar a raiz quadrada", chegaríamos a $x < \pm\sqrt{25}$, e poderíamos imaginar que $x < 5$ ou $x < -5$. Como todo número menor do que -5 evidentemente é menor do que 5, poderíamos escrever apenas que $x < 5$ e achar que o conjunto solução da inequação $x^2 < 25$ era dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\},$$

porém, repare que $-6 < -5$, mas -6 não é uma solução da inequação $x^2 < 25$, pois $(-6)^2 = 36$ é maior que 25! Assim, não podemos simplesmente replicar para as inequações os mesmos procedimentos algébricos usados para resolver equações, pois eles podem levar a conclusões erradas!

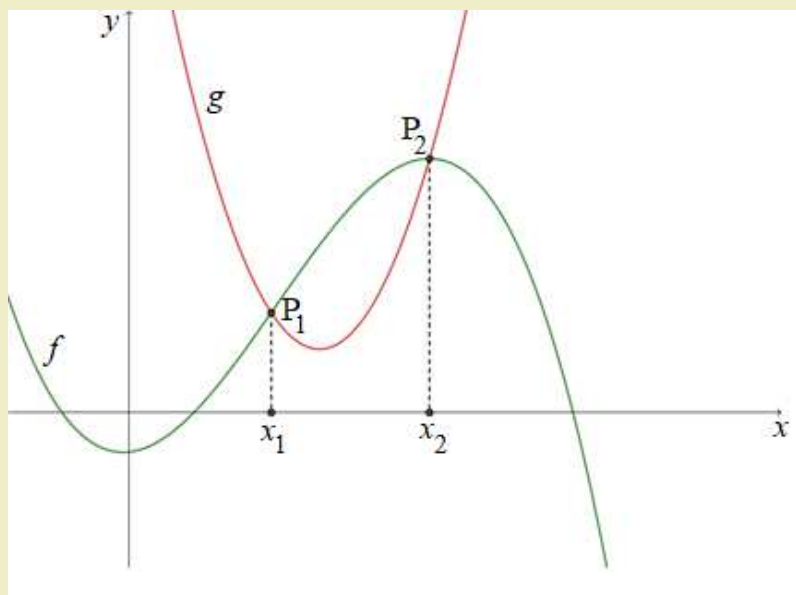
Como fazer então para resolver inequações corretamente? Na atividade *Locadora de Carros* você comparou os valores dos preços oferecidos no aluguel de carros por duas locadoras. Ambos os preços variavam com o valor x da distância percorrida pelo cliente. Assim, o preço do aluguel do carro da primeira locadora era dado por uma função f e o da segunda, por uma função g , ambas dependentes da variável x . No item e) daquela atividade, você determinou quais os valores de x para os quais a primeira locadora é mais barata, o que se traduz matematicamente na seguinte inequação:

$$f(x) < g(x).$$

Portanto, você foi capaz de resolver essa inequação analisando os gráficos dessas duas funções!

Resolvendo Inequações Graficamente

Considere, na imagem a seguir, as funções f e g e que P_1 e P_2 são os únicos pontos de interseção entre os seus gráficos.



- a) Resolver a equação $f(x) = g(x)$, geometricamente, significa buscar os valores de x (abscissas) dos pontos que pertençam, simultaneamente, aos gráficos das duas funções f e g . Na figura acima, esses pontos são P_1 e P_2 e os valores de x a eles associados são $x = x_1$ e $x = x_2$. Logo, o conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ é $S = \{x_1, x_2\}$.
- b) Resolver a inequação $f(x) > g(x)$, geometricamente, significa buscar as abscissas dos pontos para os quais o valor da função f seja maior do que o da função g . Graficamente, em um valor a fixado tem-se $f(a) > g(a)$ quando o ponto do gráfico de f correspondente a a está **acima** do ponto do gráfico de g correspondente a a . Assim, a solução da inequação $f(x) > g(x)$ corresponde aos intervalos do eixo x para os quais o gráfico de f está **acima** do gráfico de g . Na figura acima, a solução consiste exatamente no intervalo aberto $]x_1, x_2[$. Note que os pontos x_1 e x_2 não são soluções

pois neles, as duas funções coincidem. Também poderíamos denotar esse conjunto solução por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\}$.

- c) Resolver a inequação $f(x) < g(x)$, geometricamente, significa buscar as abscissas dos pontos para os quais o valor da função f seja menor do que o da função g . Gráficamente, em um valor a fixado tem-se $f(a) < g(a)$ quando o ponto do gráfico de f correspondente a a está **abaixo** do ponto do gráfico de g correspondente a a . Assim, a solução da inequação $f(x) < g(x)$ corresponde aos intervalos do eixo x para os quais o gráfico de f está **abaixo** do gráfico de g . Na figura acima, a solução consiste exatamente aos números reais que pertencem ao intervalo aberto $] -\infty, x_1[$ ou ao intervalo $]x_2, +\infty[$. Note que os pontos x_1 e x_2 não são soluções pois neles, as duas funções coincidem. Também poderíamos denotar esse conjunto solução por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\}$.
- d) O conjunto solução S da inequação $f(x) \leq g(x)$ equivale unir os conjuntos soluções da inequação $f(x) < g(x)$ e da equação $f(x) = g(x)$. Logo, S é o intervalo fechado $[x_1, x_2]$. Também podemos escrever $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$. O mesmo raciocínio vale para determinar o conjunto solução da inequação $f(x) \leq g(x)$.
- e) Resolver a inequação $f(x) < 0$ significa buscar os valores de x nos quais a função f é menor que zero, ou seja, é negativa. Note que nessa inequação, estamos comparando duas funções também, a saber, a função f e uma função $h(x) = 0$, cujo gráfico é o eixo dos x . Assim, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ estão nos intervalos do eixo x para os quais o gráfico de f está **abaixo** desse eixo (desconsiderando os valores de x nos quais o gráfico está exatamente sobre o eixo x !). O raciocínio para o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$ é o mesmo, considerando agora os valores de x para os quais o gráfico de f está **acima** do eixo x .

PRATICANDO INEQUAÇÕES EM UMA INCÓGNITA

Potência de uma Lâmpada

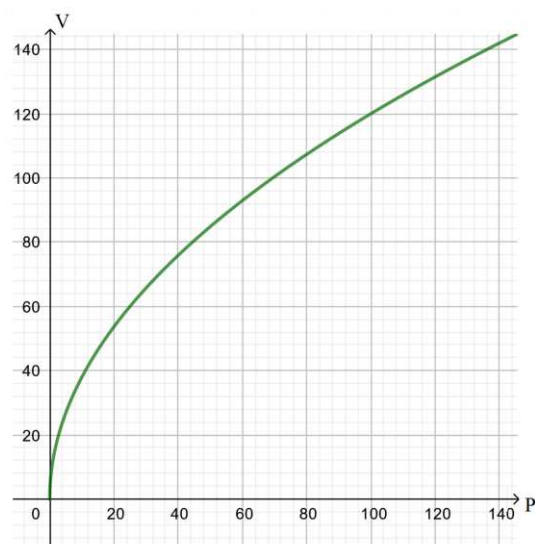
Atividade 18

As redes elétricas de alguns estados do Brasil são projetadas para receberem uma tensão de 127V (Volts), porém existe uma variação natural nesse valor. As concessionárias estipulam uma variação máxima entre 116V e 133V e todos equipamentos fabricados no país são testados para suportar essa variação de tensão. Oscilações maiores na rede elétrica podem comprometer a potência dos eletrodomésticos e até mesmo avariá-los.

A potência de uma lâmpada está relacionada à tensão da rede elétrica e à resistência da lâmpada. Em Física, verifica-se que essa relação se dá através da seguinte fórmula:

$$V = \sqrt{P \cdot R},$$

onde P representa a potência da lâmpada, medida em *Watts* (W), V é a tensão da rede medida em *Volts* (V) e R é a resistência da lâmpada medida em *Ohms* (Ω). Suponha que uma lâmpada de quintal tenha uma resistência de 144Ω . O gráfico de V em função P é dado na figura abaixo:



- a) Desenhe no eixo vertical o segmento que corresponde ao intervalo de variação de valores da tensão da rede estipuladas pelas concessionárias brasileiras.
- b) Desenhe no eixo horizontal, o segmento que corresponde ao intervalo de variação da potência da lâmpada, sabendo-se que a tensão V oscila no intervalo $116 \leq V \leq 133$. Em seguida, calcule o valor mínimo e máximo atingidos pela potência desta lâmpada.

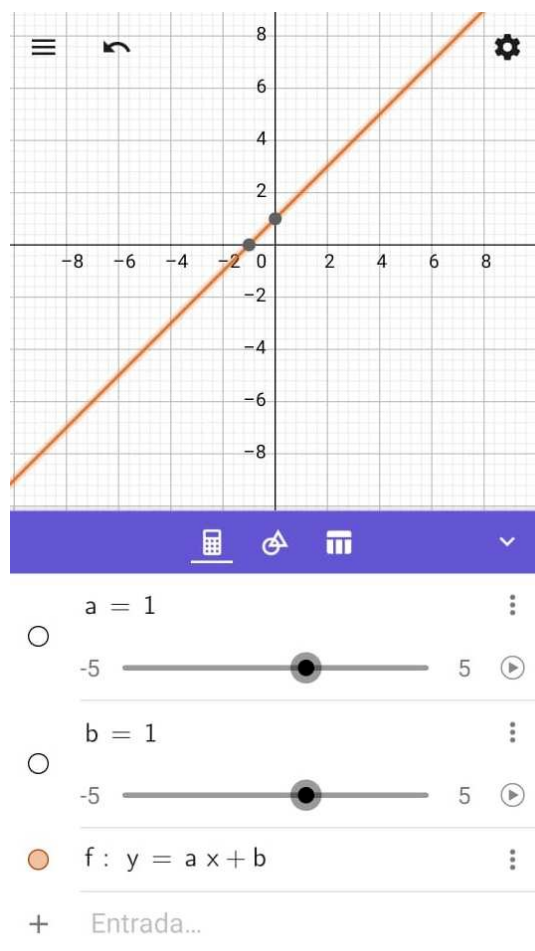
EXPLORANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 1

Estudando o sinal de uma função afim com o GeoGebra

Atividade 19

Vamos fazer uma construção usando o GeoGebra. Siga os seguintes passos:

- (1) Abra a janela gráfica e escreva $y = ax + b$ no campo de entrada e tecle ENTER



Observe que o GeoGebra denominou por f a função que associa x e y por meio da expressão analítica $y = ax + b$ e gerou, automaticamente, dois controles deslizantes para os valores de a e b , variando de -5 a 5 . Movimente os controles deslizantes e verifique o que ocorre com a função.

- (2) Toque em  e em seguida em . Toque no eixo x ; assim, você criou um ponto (A) que se movimenta livremente sobre a reta.
- (3) Digite $(x(A), f(x(A)))$ no campo Entrada. Essas são as coordenadas de um ponto B que está na reta que representa a função f . Movimente o ponto A e observe como B se movimenta.
- (4) Toque novamente em  e, em seguida, em . Toque sequencialmente em A e B.
- (5) Ainda no menu , toque em  e, em seguida, na reta que representa a função f .

Agora vamos explorar um pouco a sua construção?

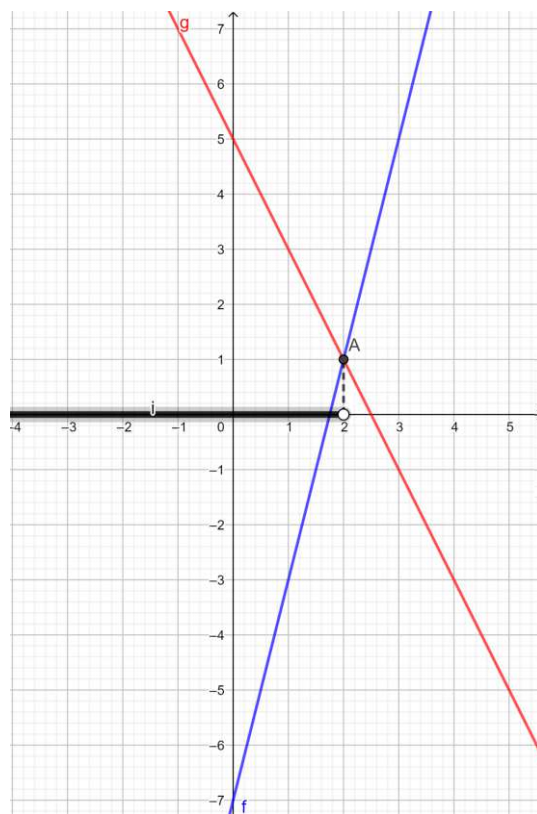
- Ajuste o controle deslizante a para um valor maior que zero. A função f exibida é crescente ou decrescente?
- Ainda com o mesmo valor usado em **a)**, movimente o ponto A pelo eixo x , deslocando-o inicialmente para os valores mais negativos de x que você consiga visualizar em sua tela. Agora, movimente lentamente o ponto A para a direita, no sentido positivo do eixo x . o que você observa sobre o vetor AB ?
- Retorne o ponto A para a esquerda do eixo x . Movimente o controle deslizante a de forma que ele assuma um valor menor que zero. A função f agora é crescente ou decrescente?
- Mantendo o mesmo valor para a usado no item **c)**, movimente lentamente o ponto A no sentido positivo do eixo x . O que você observa em relação ao vetor AB ?
- Como você pode relacionar a raiz da função (abscissa do ponto C) com o que você observou sobre o vetor AB nos itens **b)** e **d)**?

ORGANIZANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 1

Inequações cujas expressões envolvem somas e diferenças de constantes ou de múltiplos constantes da incógnita x são chamadas de *Inequações Polinomiais de 1º grau*. Abaixo temos alguns exemplos de inequações polinomiais de 1º grau:

- a) $2x + 5 \geq 0$;
- b) $4x - 7 < 5 - 2x$;
- c) $13x + 8 \geq -6x$.

Repare que as expressões que aparecem à esquerda ou à direita do sinal de desigualdade são dadas por funções afins ou funções constantes. Utilizando o que aprendemos na seção anterior, já é possível encontrar as soluções de todas essas inequações. Por exemplo, para resolver a inequação do item **b)**, basta esboçarmos os gráficos das funções $f(x) = 4x - 7$ e $g(x) = 5 - 2x$ e observarmos os valores de x para os quais o gráfico de f fica abaixo do gráfico de g :



Para encontrar a abscissa do ponto de interseção dos gráficos, basta resolver a equação $f(x) = g(x)$. Temos:

$$f(x) = g(x) \iff 4x - 7 = 5 - 2x \iff 4x + 2x = 5 + 7 \iff 6x = 12 \therefore x = 2.$$

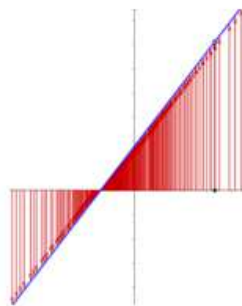
Assim, os pontos do gráfico de f estão abaixo dos de g sempre que $x < 2$. Portanto, o conjunto solução desta inequação é o intervalo $] -\infty, -2[$.

Estudaremos nessa seção uma maneira alternativa de se resolver inequações do 1º grau, que se resume a analisar o sinal da imagem de uma função afim. Consideremos uma função afim

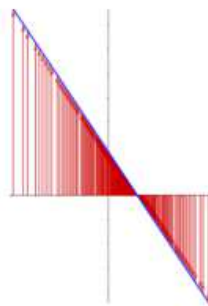
$f(x) = ax + b$. Estudar a variação do sinal dessa função significa indicar para que valores de x a função f é positiva, para que valores é negativa e para que valor ela se anula. A resposta a essa questão vem a partir do estudo do seu gráfico, mas pode ser resumido a partir da análise da variação do crescimento da função e do valor de x no qual ela se anula (**zero** da função f).

Lembre-se que a função afim $f(x) = ax + b$ se anula em um único valor, a saber, na solução da equação $ax + b = 0$, ou seja $x = -\frac{b}{a}$. Portanto, $(-\frac{b}{a}, 0)$ é ponto do gráfico de f , localizado sobre o eixo x . Como o gráfico da função afim é uma reta, esta irá intersectar o eixo x precisamente no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Vamos esboçar o gráfico dessa função, mas de maneira resumida, sintética - quase uma caricatura da função, focados em analisar o comportamento do sinal da imagem de f . Temos duas possibilidades: essa função pode ser crescente, se tivermos $a > 0$, ou decrescente, se tivermos $a < 0$.



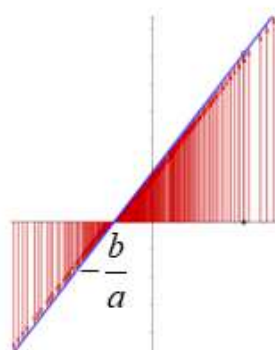
f é crescente
 $a > 0$



f é decrescente
 $a < 0$

Observe que quando f é crescente, os valores de x que se localizam à esquerda do zero da função (ou seja, $x < -\frac{b}{a}$) correspondem a pontos da reta que se localizam abaixo do eixo x , para os quais os valores das imagens $f(x)$ são negativos. Por outro lado, os valores de x que se localizam à direita do zero da função (ou seja, $x > -\frac{b}{a}$) correspondem a pontos da reta que se localizam acima do eixo x , para os quais os valores $f(x)$ das imagens são positivos.

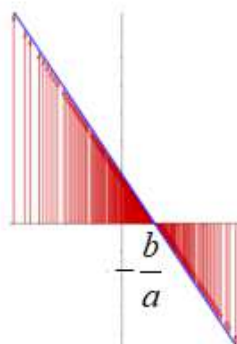
De modo similar, quando f é decrescente, os valores de x que se localizam à esquerda do zero da função (ou seja, $x < -\frac{b}{a}$) correspondem a pontos da reta que se localizam acima do eixo x , para os quais os valores das imagens $f(x)$ são positivos. Por outro lado, os valores de x que se localizam à direita do zero da função (ou seja, $x > -\frac{b}{a}$) correspondem a pontos da reta que se localizam abaixo do eixo x , para os quais os valores $f(x)$ das imagens são negativos.



$$x = -b/a \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x < -b/a \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x > -b/a \Rightarrow f(x) > 0$$



$$x = -b/a \Rightarrow f(x) = 0$$

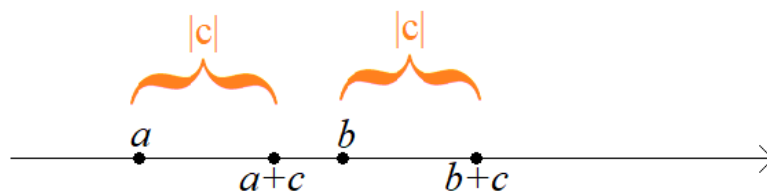
$$x < -b/a \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x > -b/a \Rightarrow f(x) < 0$$

Uma propriedade que as desigualdades possuem, similar à da igualdade, é que ela se preserva quando somamos ou subtraímos um mesmo número real nas expressões à esquerda e à direita que a compõem, isto é:

$$a < b \iff a + c < b + c.$$

Podemos nos convencer sobre esta propriedade interpretando-a na reta numérica: se $a < b$ então a aparece na reta numérica à esquerda de b . Se somarmos um número c ao número a , o efeito geométrico na reta será de uma translação de $|c|$ unidades do ponto a para o ponto $a + c$, que será para a direita quando $c > 0$ e que será para a esquerda quando $c < 0$.



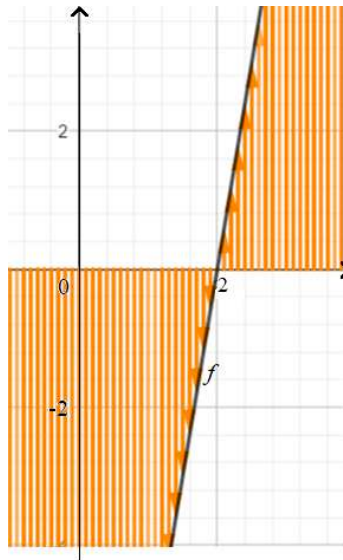
Vamos retomar o exemplo da inequação $4x - 7 < 5 - 2x$. Subtraindo o número real 5 nos dois termos da desigualdade, obtemos:

$$4x - 7 < 5 - 2x \iff 4x - 7 - 5 < 5 - 2x - 5 \iff 4x - 12 < -2x,$$

e agora, somando o número $2x$ em ambos os termos, concluímos que:

$$4x - 7 < 5 - 2x \iff 6x - 12 < 0,$$

ou seja, a desigualdade dada pela inequação $4x - 7 < 5 - 2x$ é equivalente à desigualdade $6x - 12 < 0$. Portanto, os valores de x que são soluções da inequação $4x - 7 < 5 - 2x$ são exatamente os mesmos que estão no conjunto solução de $6x - 12 < 0$. Dessa forma, **resolver a primeira inequação equivale a resolver a segunda**. Por sua vez, $6x - 12 < 0$ pode ser resolvida usando o estudo da variação do sinal da função afim $f(x) = 6x - 12$. O zero de f é dado pela solução da equação $6x - 12 = 0$, logo $x = 2$. Como f é crescente, o gráfico de f fica:



Como queremos $f(x) < 0$, a parte do gráfico que fica abaixo do eixo x é exatamente aquele que fica sobre o intervalo $] -\infty, 2[$, portanto esse é o conjunto solução da inequação.

Com base no que fizemos, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema: Toda inequação polinomial do 1º grau pode ser reduzida a uma inequação da forma $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$, onde f é uma função constante ou uma função afim.

Vamos fazer mais um exemplo: resolveremos a inequação polinomial do 1º grau abaixo:

$$x + 8(3x - 2) \leq 4 + \frac{5x}{3}.$$

Primeiro vamos resolver a distributiva e reduzir a expressão à esquerda do sinal de desigualdade:

$$x + 24x - 16 \leq 4 + \frac{5x}{3} \iff 25x - 16 \leq 4 + \frac{5x}{3}.$$

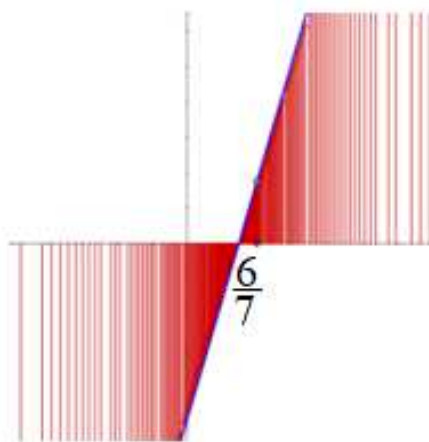
Agora, vamos obter uma inequação equivalente cujo termo à direita do sinal de desigualdade seja zero. Para isso, basta subtrair das duas expressões o número $4 + \frac{5x}{3}$:

$$\begin{aligned} 25x - 16 \leq 4 + \frac{5x}{3} &\iff 25x - 16 - \left(4 + \frac{5x}{3}\right) \leq 4 + \frac{5x}{3} - \left(4 + \frac{5x}{3}\right) \\ &\iff 25x - 16 - 4 - \frac{5x}{3} < 0 \\ &\iff \frac{70x}{3} - 20 < 0. \end{aligned}$$

Basta analisar o sinal da função afim $f(x) = \frac{70x}{3} - 20$. Primeiro encontramos o zero dessa função:

$$f(x) = 0 \iff \frac{70x}{3} - 20 = 0 \iff \frac{70x}{3} = 20 \iff 70x = 60 \iff x = \frac{6}{7}.$$

Como queremos resolver $f(x) \leq 0$, a solução inclui tanto os valores de x que anulam a função (ou seja, $x = \frac{6}{7}$) como aqueles que correspondem à parte do gráfico que fica abaixo do eixo x ($x < \frac{6}{7}$).



Portanto, a solução a inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{6}{7}\}$ ou então, usando a notação de intervalo, $S =]-\infty, \frac{6}{7}]$.

PRATICANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 1

Comparando preços em *Lan Houses*

Atividade 20

Em alguns lugares onde há baixo acesso à internet, ainda existem as *Lan Houses*, que são estabelecimentos comerciais que ofertam serviço de internet para seus clientes usarem durante um certo período de tempo. A *Lan house* Net-Ágil cobra 5 reais por acesso e mais 1 real por hora utilizada. Já na *Lan House* Mega-Conexão, a cobrança é de 2 reais por hora. Ambas as *Lan Houses* cobram por frações de hora.

- Se um cliente permanecer na *Lan House* Net-Ágil por 3h15min, qual será o valor a ser pago? E se escolher a *Lan House* Mega-Conexão, quanto deverá pagar ao final desse período?
- Para usar os computadores e internet por 6h10min, qual das duas *Lan House* seria a melhor escolha?
- Escreva a expressão algébrica que define a função f e que retorna a cada tempo x em horas o valor a ser pago em reais na *Lan House* Net-Ágil.
- Escreva a expressão algébrica que define a função g e que retorna a cada tempo x em horas o valor a ser pago em reais na *Lan House* Mega-Conexão.
- Suponha que as duas *Lan Houses* funcionam das 8h às 20h. Para que valores de x a *Lan House* Mega-Conexão é mais vantajosa?

Elaborando um problema de inequações**Atividade 21**

Elabore problemas do seu cotidiano que sejam representados pelas inequações abaixo. Em seguida, resolva as inequações.

a) $2x - 3 > 0$

b) $4 - x < 1 + 8x$.

EXPLORANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 2

Variação do Dólar

Atividade 22

A cotação cambial do Dólar é um importante atributo para qualquer país e impacta vários indicadores econômicos, como inflação, balança comercial, dívida externa entre outros.



Suponha que em um determinado dia, a variação percentual y do Dólar, frente o Real, tenha sido descrita pela seguinte função:

$$y = -0,02t^2 + 0,3t, \quad 9 \leq t \leq 17,$$

onde t é medido em horas. Quando a variação percentual do Dólar é positiva, a moeda americana está se valorizando em relação ao Real, enquanto que quando esta variação é negativa, o dólar está se desvalorizando em relação ao Real.

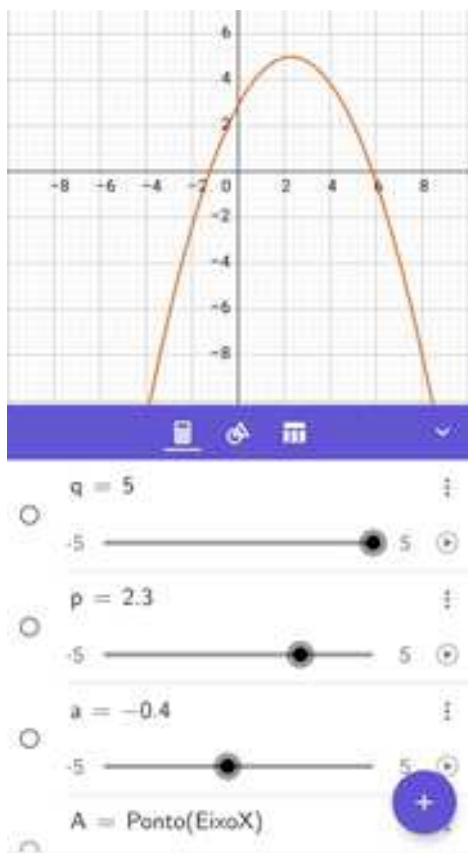
- a) Faça um esboço do gráfico da função $y = f(t)$ que descreve a variação percentual do dólar em função do tempo, no dia informado no enunciado;
- b) Em qual período desse dia o dólar se valoriza em relação à nossa moeda?
- c) Em qual período desse dia o dólar se desvaloriza em relação ao Real?
- d) Escreva algebricamente as perguntas dos itens b) e c);

Estudando o sinal de uma função quadrática com o GeoGebra

Atividade 23

Vamos fazer uma construção usando o GeoGebra. Siga os seguintes passos:

1- Abra a janela gráfica e escreva $y = a(x - p)^2 + q$ no campo de entrada e tecle ENTER;



Observe que o GeoGebra denominou por f à função que associa x e y por meio da lei algébrica $y = a(x - p)^2 + q$ e gerou, automaticamente, três controles deslizantes para os valores de a , p e q , variando de -5 a 5 . Movimente os controles deslizantes e verifique o que ocorre com a função. Quais os significados geométricos, na parábola, dos parâmetros a , p e q ?

- 2- Toque em  e em seguida em . Toque no eixo x ; assim, você criou um ponto (A) que se movimenta livremente sobre a reta.
- 3- Digite $(x(A), f(x(A)))$ no campo Entrada. Essas são as coordenadas de um ponto B que está na parábola que representa a função f . Movimente o ponto A e observe como B se movimenta.
- 4- Toque novamente em  e, em seguida, em . Toque sequencialmente em A e B.
- 5- Ainda no menu , toque em  e, em seguida, na parábola que representa a função f .

Agora vamos explorar um pouco a sua construção?

- Ajuste o controle deslizante a para um valor maior que zero. Como está a concavidade da função f ?
- Mantenha o controle deslizante a fixo com o valor usado no item a). Arraste o ponto A para o canto mais esquerdo do eixo x e ajuste os controles p e q de forma que tenhamos duas raízes para a função f . Qual o sinal do discriminante Δ ?
- Movimente lentamente o ponto A no sentido positivo do eixo x . O que você observa sobre o vetor $\vec{AB}$? Descreva a posição desse vetor de acordo com as raízes da função f .

ORGANIZANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 2

Nesta seção, estamos estudando as chamadas *inequações polinomiais de grau 2*. Tais inequações são aquelas cujas expressões algébricas envolvem somas de constantes ou de múltiplos constantes da incógnita ou do seu quadrado. Abaixo temos alguns exemplos de inequações polinomiais de 2º grau:

- $2x^2 + 4x \leq 5 - 4x$;
- $4 - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} \geq -x^2$;
- $5x - 2x^2 > 1$.

Utilizando o argumento, visto na seção anterior, de somar um mesmo número real nas duas expressões de uma desigualdade, podemos concluir o seguinte resultado:

Teorema: Toda inequação polinomial do 2º grau pode ser reduzida a uma inequação da forma $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$, onde f é uma função constante, afim ou quadrática.

Para resolver qualquer inequação polinomial do 2º grau, aprenderemos a fazer o estudo do sinal de uma função quadrática.

Vamos considerar uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ cujos zeros podem ser determinados por meio da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

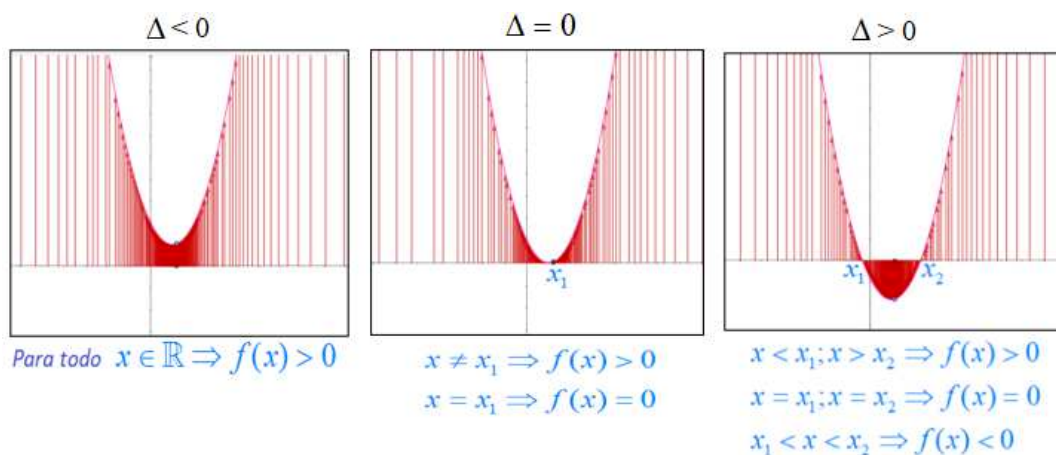
Como vimos nos Capítulo de Função Quadrática, quando:

- $\Delta > 0 \Rightarrow f$ tem exatamente dois zeros distintos;
- $\Delta = 0 \Rightarrow f$ tem um único zero;
- $\Delta < 0 \Rightarrow f$ não possui zeros.

Além disso, a concavidade do gráfico (parábola) é determinada pelo valor do coeficiente a : se $a > 0$, então a parábola apresenta concavidade voltada para cima; se $a < 0$, então a parábola tem concavidade voltada para baixo.

O estudo da variação do sinal de uma função quadrática é feito a partir do esboço de seu gráfico, considerando a posição da parábola que a representa em relação ao eixo x . Vamos ver alguns casos?

1º caso:) Se $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima, e daí temos três possibilidades: ou a parábola está localizada totalmente acima do eixo x , ou ela intersecta o eixo x em exatamente um ponto ou então intersecta o eixo dos x em dois pontos. Lembramos que, no primeiro caso temos $\Delta < 0$, no segundo $\Delta = 0$ e no terceiro, $\Delta > 0$. Portanto, no primeiro caso, os valores da função f são positivos para todo x ; no segundo caso, f é positiva para todos os valores de x , exceto no seu zero (que corresponde ao ponto onde a parábola "toca" o eixo x) e no terceiro caso, se x_1 e x_2 são os seus zeros, $x_1 < x_2$, então f se anula nesses dois valores, $f(x)$ é negativa para $x_1 < x < x_2$ (sobre esse intervalo a parábola fica abaixo do eixo x) e $f(x)$ é positiva para $x < x_1$ e $x > x_2$ (sobre esses intervalos a parábola fica acima do eixo s).



(2º caso) Se $a < 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, e daí temos três possibilidades: ou a parábola está localizada totalmente abaixo do eixo x , ou ela intersecta o eixo x em exatamente um ponto ou então intersecta o eixo x em dois pontos. No primeiro caso, os valores da função f são negativos para todo x ; no segundo caso, f é negativa para todos os valores de x , exceto no seu zero (que corresponde ao ponto onde a parábola "toca" o eixo x) e no terceiro caso, se x_1 e x_2 são os seus zeros, $x_1 < x_2$, então f se anula nesses dois valores, $f(x)$ é positiva para $x_1 < x < x_2$ (sobre esse intervalo a parábola fica acima do eixo x) e $f(x)$ é negativa para $x < x_1$ e $x > x_2$ (sobre esses intervalos a parábola fica abaixo do eixo x). Construa as posições dos gráficos correspondentes a esse caso!

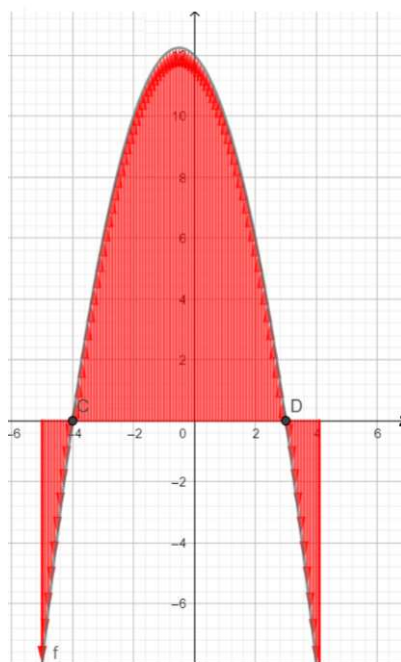
Vamos agora aplicar o estudo do sinal da função quadrática para resolver algumas inequações:

Exemplo 1: Resolva a inequação $-x^2 \leq x - 12$.

Primeiramente, vamos obter uma desigualdade equivalente onde o termo à direita do sinal " $\leq$ " seja igual a zero. Para isso, basta somar $(-x + 12)$ nos dois lados da inequação:

$$-x^2 + (-x + 12) \leq x - 12 + (-x + 12) \iff -x^2 - x + 12 \leq 0.$$

Basta então resolver a inequação $-x^2 - x + 12 \leq 0$. Para isso, analisaremos o sinal da função quadrática $f(x) = -x^2 - x + 12$. Ela tem dois zeros, a saber, $x_1 = -4$ e $x_2 = 3$ e a concavidade de seu gráfico é voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Agora, podemos organizar o desenho da análise do sinal de f :



Como queremos resolver $f(x) \leq 0$ as soluções são dadas tanto pelos valores de x que anulam f como também por aqueles que correspondem aos pontos do gráfico que ficam abaixo do eixo x . Portanto, esses valores são exatamente aqueles que estão à esquerda de -4 ou à direita de 3 , incluindo esses dois números. Logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

Repare que o conjunto solução é dado por uma união de intervalos. Podemos escrever

$$S =]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[.$$

Exemplo 2: Resolva a inequação $(x - 2)^2 + 4 > 2(x - \frac{1}{2})$.

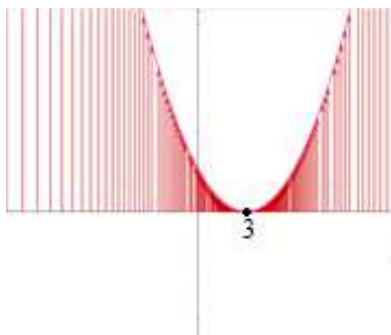
Vamos desenvolver as expressões nos dois lados da inequação:

$$(x - 2)^2 + 4 > 2(x - \frac{1}{2}) \text{ iff } x^2 - 4x + 4 + 4 > 2x - 1 \iff x^2 - 4x + 8 > 2x - 1.$$

Somando $-2x + 1$ nas duas expressões da inequação, conseguimos reduzi-la a:

$$x^2 - 4x + 8 + (-2x + 1) > 2x - 1 + (-2x + 1) \iff x^2 - 6x + 9 > 0.$$

Escrevendo $f(x) = x^2 - 6x + 9$, devemos resolver a inequação $f(x) > 0$. Para isso, analisamos o sinal de f . Esta função possui apenas $x = 3$ como zero e a concavidade do seu gráfico é voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, o desenho da análise de sinal de f é:



O conjunto solução da inequação $f(x) > 0$, consiste em todos os valores de x sobre os quais o gráfico de f fica acima do eixo x , o que ocorre para qualquer número real exceto $x = 3$, onde o gráfico intersecta o eixo x (isto é, f se anula em $x = 3$). Portanto, o conjunto solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}.$$

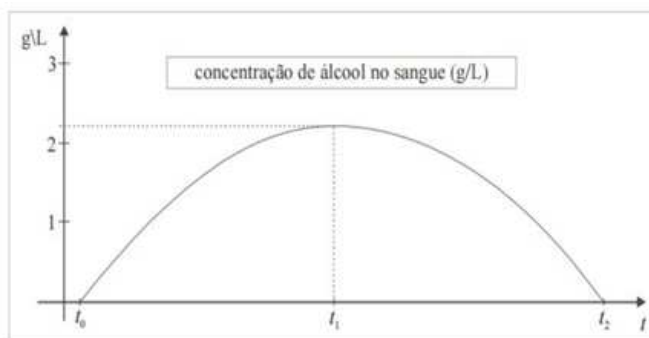
PRATICANDO INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 2

Concentração de álcool no sangue

Atividade 24

(Adaptada de Cespe - PRF)

Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L , de uma pessoa, em função do tempo t , em horas, seja expresso por $N = -0,008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ ($N(t_0) = 0$), partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em $t = t_1$, voltando a ficar sóbria em $t = t_2$. Considere, por fim, a figura a seguir, que apresenta o gráfico da função $N(t)$ para $t \in [t_0, t_2]$.



Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, analise a afirmativa a seguir:

“O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a $1g/L$ por pelo menos 23 horas.”

EXPLORANDO INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Inequações produto ou quociente de funções de grau 1

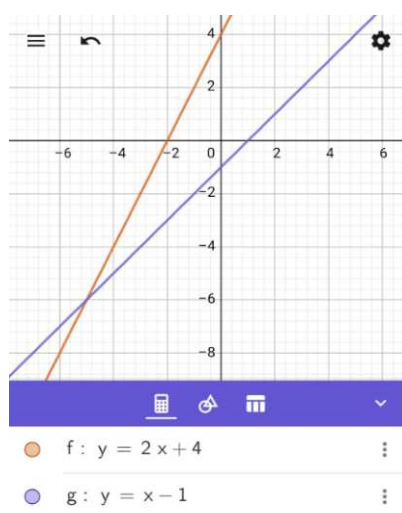
Atividade 25

Usando o GeoGebra, vamos plotar o gráfico das seguintes funções:

i) $y = 2x + 4$

ii) $y = x - 1$

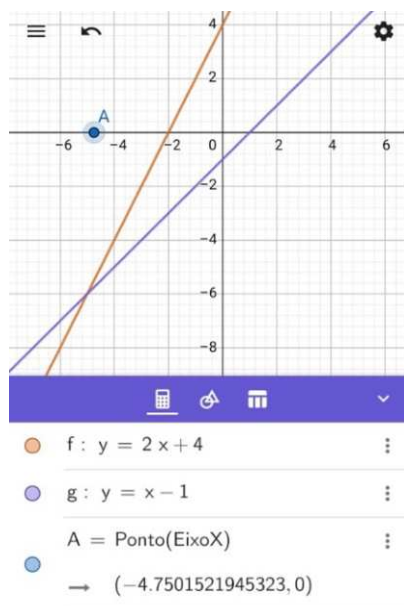
O GeoGebra denominará automaticamente essas duas funções por f e g , respectivamente.



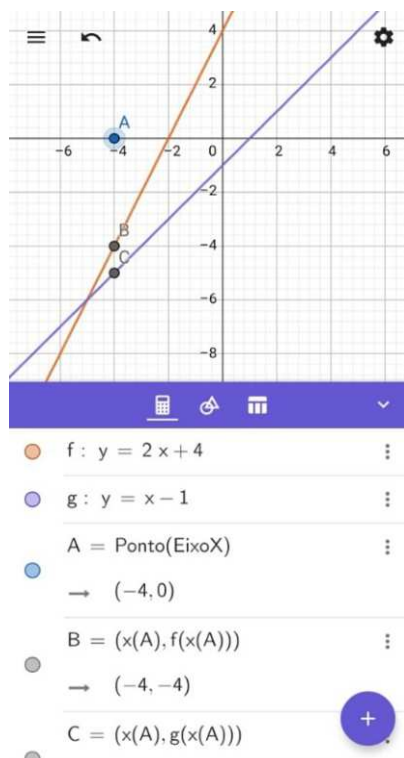
- a) Quais são as raízes de f e de g ?
- b) Descreva a variação do *sinal* dessas duas funções.

Toque em  e em seguida em . Toque no eixo x , assim, você criou um ponto (A) que se movimenta livremente sobre o eixo x .

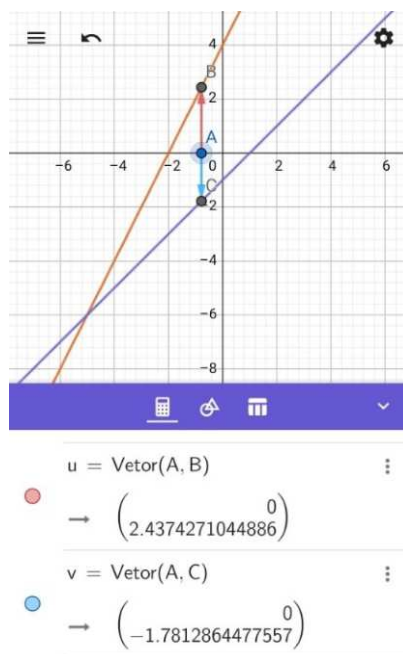
Digite no campo entrada $(x(A), f(x(A)))$ e $(x(A), g(x(A)))$. O GeoGebra nomeará, automaticamente, esses pontos como B e C .



Toque novamente em  e, em seguida, em . Toque sequencialmente em A e B e, em seguida, em A e C, criando os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Em seguida, ainda no menu , toque em  e, em seguida, em cada uma das duas retas que representam as funções f e g , nessa ordem. Na tela você verá os pontos E e F, raízes das funções f e g , respectivamente.



- c) Movimente o ponto A e descreva as possíveis posições relativas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$
- d) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão ambos abaixo do eixo x (ou seja, para que valores de x as funções f e g são negativas)?
- e) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão ambos acima do eixo x (ou seja, para que valores de x as funções f e g são negativas)?
- f) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão em sentidos opostos (ou seja, uma é positiva e outra é negativa)?
- g) Vamos considerar agora a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Qual será o sinal de $h(x)$ quando $x < -2$? E quando $x > 1$? E quando $-2 < x < 1$? E quando $x = -2$ ou $x = 1$?
- h) Faça o mesmo tipo de análise conduzida no item anterior para a função $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
- i) A partir do que você percebeu acima (e sem desenvolver o produto), responda: qual a solução da inequação $f(x) \cdot g(x) < 0$?
- j) E qual a solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$? Os valores $x = -2$ e $x = 1$ estão no conjunto solução dessa inequação? Justifique sua resposta.

ORGANIZANDO INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Vamos considerar duas funções f e g quaisquer na variável x . As inequações $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ ou $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ são denominadas *inequações-produto*. Da mesma forma, as inequações $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ ou $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ são denominadas *inequações-quociente*.

A resolução de uma inequação-produto ou de uma inequação quociente pode ser determinada a partir do estudo conjunto da variação do sinal dos termos envolvidos no produto ou no quociente em questão, tomando como parâmetros de análise as raízes dessas funções.

Vamos ver alguns exemplos?

EXEMPLO 6 Resolver a inequação $(4 - 3x)(2x + 3) \geq 0$

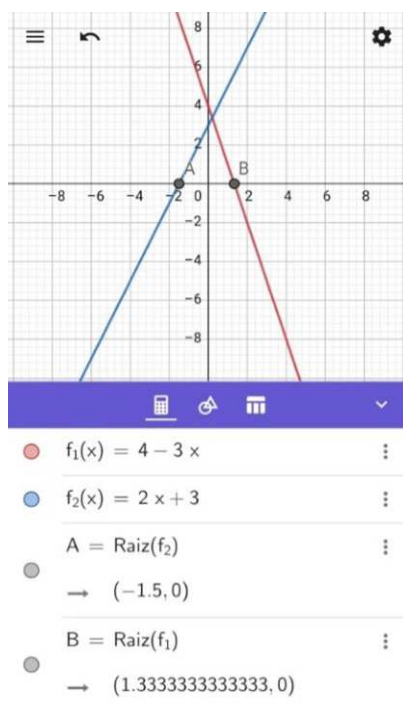
Vamos considerar as funções $f_1(x) = 4 - 3x$ e $f_2(x) = 2x + 3$. Esboçando os gráficos dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos e assinalando as raízes de cada uma delas, obtemos:

Raiz de f_1 :

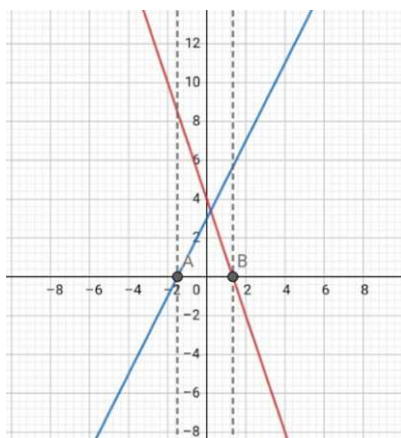
$$4 - 3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}$$

Raiz de f_2 :

$$2x + 3x = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$$

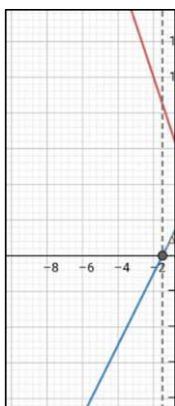


Podemos verificar que f_1 é positiva até a sua raiz $\frac{4}{3}$ e que se torna negativa depois, enquanto f_2 é negativa até a sua raiz $-\frac{3}{2}$, tornando-se positiva depois. Temos então, como parâmetros para estudar a variação do sinal do produto dessas duas funções, os valores $x = \frac{4}{3}$ e $x = -\frac{3}{2}$. Vamos, para facilitar essa análise, setorizar esse gráfico, traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas por esses parâmetros.



- $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é negativa, logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa.
- $-\frac{3}{2} < x < \frac{4}{3} \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é positiva; logo, $f_1 \cdot f_2$ é positiva.
- $x > \frac{4}{3} \Rightarrow f_1$ é negativa e f_2 é positiva; logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa

Veja esses intervalos associados às regiões do gráfico:



$$\begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ f_1 > 0 \\ f_2 < 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} < x < \frac{4}{3} \\ f_1 > 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

Retomando a inequação $(4 - 3x)(2x + 3) \geq 0$, observamos que são pedidos os valores que são maiores ou iguais a zero, logo, são os intervalos positivos incluindo os pontos em que se tem o produto f_1 por f_2 nulo. Temos então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{4}{3} \right\}$$

Note que precisamos usar o sinal $\leq$ para que pudéssemos indicar no conjunto solução que os valores $x = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{4}{3}$ também satisfazem à inequação, ou seja, que quando temos $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{4}{3}$, o produto $f_1 \cdot f_2$ é nulo e que, portanto, atendem à desigualdade $(4 - 3x)(2x + 3) \geq 0$.

O mesmo tipo de análise que realizamos para resolver o exemplo 1 pode ser usado para situações que envolvem produto ou quociente com funções polinomiais do 2º grau. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 7 Resolver a inequação $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$

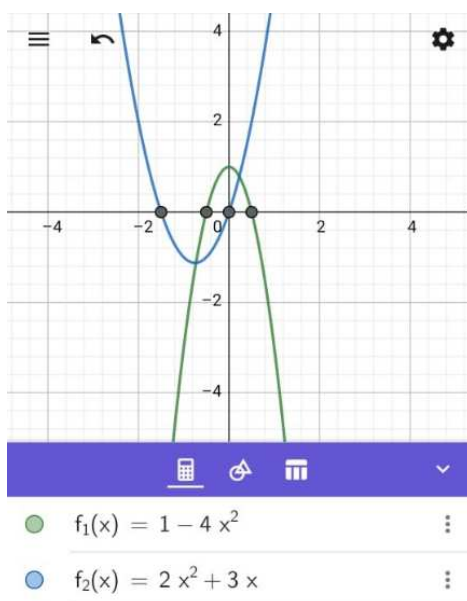
Vamos considerar as funções $f_1(x) = 1 - 4x^2$ e $2x^2 + 3x$. Esboçando os gráficos dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos e assinalando as raízes de cada uma delas, obtemos:

Raiz de f_1 :

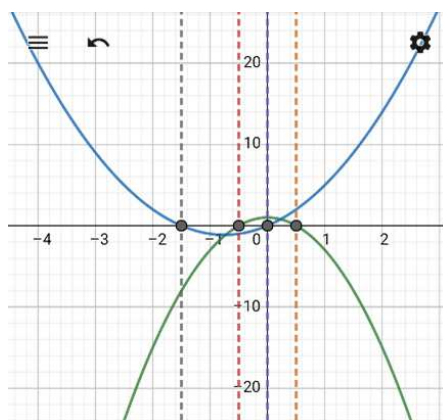
$$1 - 4x^2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{2}$$

Raiz de f_2 :

$$2x^2 + 3x = 0 \iff x = 0; x = -\frac{3}{2}$$

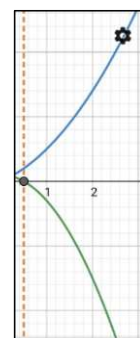


Podemos verificar que f_1 é negativa para valores de x menores que $-\frac{1}{2}$ e maiores que $\frac{1}{2}$ e é positiva para valores de x entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Por outro lado, f_2 é positiva para valores de x menores que $-\frac{3}{2}$ e maiores que zero e negativa para valores de x entre $-\frac{3}{2}$ e zero. Temos então, como parâmetros para estudar a variação do sinal do produto dessas duas funções, os valores (ordenados) $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $\frac{1}{2}$. Vamos, para facilitar essa análise, setorizar esse gráfico, traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas por esses parâmetros.



São então 5 intervalos a considerar:

- $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f_1$ é negativa e f_2 é positiva; logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa
- $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f_1$ é negativa e f_2 é negativa; logo, $f_1 \cdot f_2$ é positiva
- $-\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é negativa; logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa
- $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é positiva; logo, $f_1 \cdot f_2$ é positiva
- $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f_1$ é negativa e f_2 é positiva; logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa



$$\begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 < 0 \\ f_1 \cdot f_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 \\ f_1 > 0 \\ f_2 < 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ f_1 > 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

Além disso, vamos analisar como se comporta esse produto nos valores que são raízes das funções:

- $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f_1(-\frac{1}{2}) = 0$, logo $f_1 \cdot f_2$ é zero.
- $x = 0 \Rightarrow f_2(0) = 0$, logo $f_1 \cdot f_2$ é zero.
- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f_1(\frac{1}{2}) = 0$, logo $f_1 \cdot f_2$ é zero.

Retomando a inequação, observamos que são pedidos os valores que são maiores que zero, logo, são os intervalos estritamente positivos para o produto f_1 por f_2 que satisfazem à inequação. Temos então

$$\left\{ x \in \mathbb{R}; -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$$

Note que precisamos usar o sinal $\leq$ para que pudéssemos indicar no conjunto solução que os valores $x = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{4}{3}$ também satisfazem à inequação, ou seja, que quando temos $x = -3/2$ ou $x = 4/3$, o produto $f_1 \cdot f_2$ é nulo e que, portanto, atendem à desigualdade $(4 - 3x)(2x + 3) \geq 0$.

Se a inequação que está sendo resolvida é um quociente, o processo é análogo. Precisamos apenas estar muito atentos à questão de que em um quociente não se pode anular o denominador, o que implica que raízes associadas às funções que estiverem como divisores não podem fazer parte do conjunto solução da inequação. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 8 Resolver a inequação $(2 - 3x)/(2x^2 + 3x - 2) \leq 0$

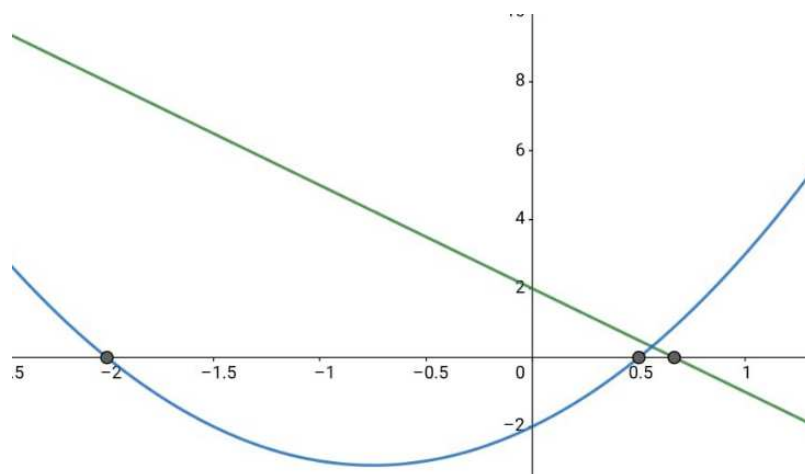
Vamos considerar as funções $f_1(x) = 2 - 3x$ e $f_2(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Esboçando os gráficos dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos e assinalando as raízes de cada uma delas, obtemos:

Raiz de f_1 :

$$2 - 3x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

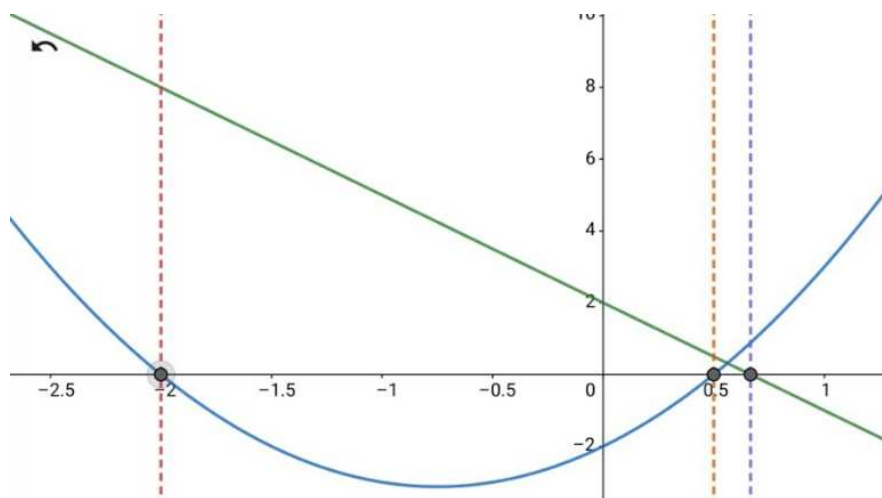
Raiz de f_2 :

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x = -2; x = \frac{1}{2}$$



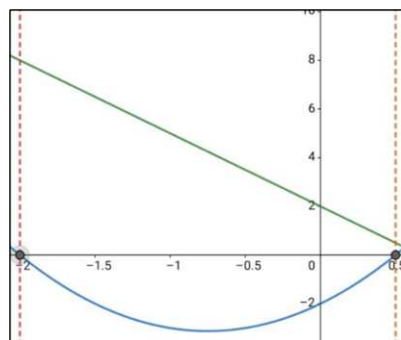
Podemos verificar que f_1 é positiva para valores de x menores que $\frac{2}{3}$ e negativa para valores de x maiores que $\frac{2}{3}$. Por outro lado, f_2 é positiva para valores de x menores que -2 e maiores que $\frac{1}{2}$ e é negativa para valores de x entre -2 e $\frac{1}{2}$. Temos então, como parâmetros para estudar a variação do sinal do produto dessas duas funções, os valores (ordenados) $x = -2$,

$x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{2}{3}$. Vamos, para facilitar essa análise, setorizar esse gráfico, traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas por esses parâmetros.



São então 4 intervalos a considerar:

- $x < -2 \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é positiva; logo, $\frac{f_1}{f_2}$ é positiva
- $-2 < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é negativa; logo, $\frac{f_1}{f_2}$ é negativa
- $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \Rightarrow f_1$ é positiva e f_2 é positiva; logo, $\frac{f_1}{f_2}$ é positiva
- $x > \frac{2}{3} \Rightarrow f_1$ é negativa e f_2 é positiva; logo, $\frac{f_1}{f_2}$ é negativa



$$\begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 < 0 \\ f_1 \cdot f_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 \\ f_1 > 0 \\ f_2 < 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_1 \cdot f_2 < 0 \end{cases}$$

Além disso, vamos analisar como se comporta esse quociente nos valores que são raízes das funções:

- $x = -2 \Rightarrow f_2(-2) = 0$, logo, $\frac{f_1}{f_2}$ não existe nos reais quando $x = -2$

■ $x = \frac{1}{2} \implies f_2(\frac{1}{2})$, logo, $\frac{f_1}{f_2}$ não existe nos reais quando $x = \frac{1}{2}$

■ $x = \frac{1}{2} \implies f_2(0) = 0$, logo, $\frac{f_1}{f_2}$ é zero quando $x = \frac{2}{3}$

Retomando a inequação $\frac{2-3x}{2x^2+3x-2} \leq 0$ observamos que são pedidos os valores que são menores ou iguais a zero, logo, são os intervalos estritamente negativos para o quociente f_1 por f_2 , além dos valores para x que tornam esse quociente nulo. Temos então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Note que precisamos usar o sinal para que pudéssemos indicar no conjunto solução que o valor $x = \frac{1}{2}$ também satisfaz à inequação, mas já para os valores $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, usamos apenas a desigualdade, sem o igual, pois em $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$ a função quociente não está definida.

Vamos ver um último exemplo? Quando trabalhamos com inequações produto ou quociente, podemos trabalhar com várias funções, não somente com duas. Vejamos agora um exemplo com 3 funções.

EXEMPLO 9 Resolver a inequação $(x-1)(x-2)/(x^2+7x+12) \leq 0$

Vamos considerar as funções $f_1(x) = x-1$ e $f_2(x) = x-2$ e $f_3 = x^2+7x+12$. Esboçando os gráficos dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos e assinalando as raízes de cada uma delas, obtemos:

Raiz de f_1 :

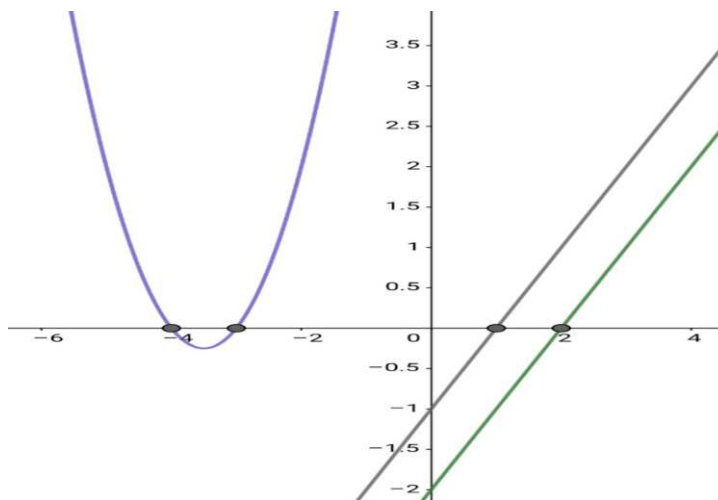
Raiz de f_2 :

Raiz de f_3 :

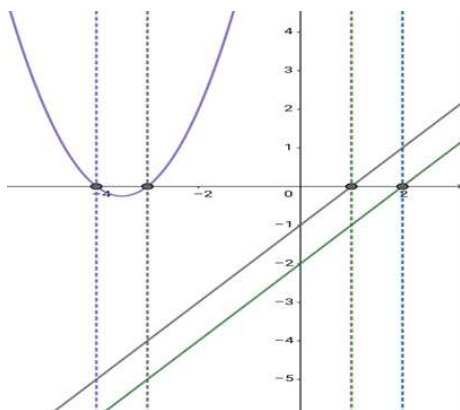
$$x-1=0 \iff x=1$$

$$x-2=0 \iff x=2$$

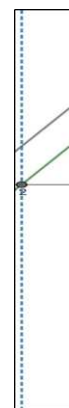
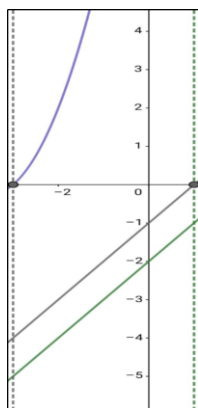
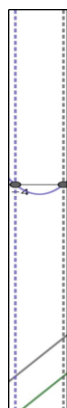
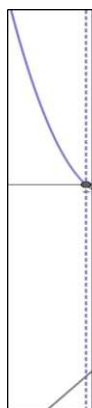
$$x^2+7x+12=0 \iff x=-3; x=-4$$



Podemos verificar que f_1 é negativa para valores de x menores que 1 e positiva para valores de x maiores que 1. Da mesma forma, f_2 é negativa para valores de x menores que 2 e positiva para valores de x maiores que 2. Já f_3 é positiva para valores de x menores que -4 e maiores que -3 e negativa entre $x = -4$ e $x = -3$. Temos então, como parâmetros para estudar a variação do sinal do produto dessas duas funções, os valores (ordenados) $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$ e $x = 2$. Vamos, para facilitar essa análise, setorizar esse gráfico, traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas por esses parâmetros.



- $x < -4 \Rightarrow f_1$ e f_2 são negativas e f_3 é positiva; logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é negativa
- $-4 < x < -3 \Rightarrow f_1, f_2$ e f_3 são negativas; logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é positiva
- $-3 < x < 1 \Rightarrow f_1$ e f_2 são negativas e f_3 é positiva; logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é negativa
- $1 < x < 2 \Rightarrow f_1$ e f_2 são positivas e f_3 é negativa; logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é positiva
- $x > 2 \Rightarrow f_1, f_2$ e f_3 são positivas; logo, $f_1 \cdot f_2$ é negativa



$$\begin{cases} x < -4 \\ f_1 < 0 \\ f_2 < 0 \\ f_3 > 0 \\ \frac{f_1 \cdot f_2}{f_3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < x < -3 \\ f_1 < 0 \\ f_2 < 0 \\ f_3 < 0 \\ \frac{f_1 \cdot f_2}{f_3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < x < 1 \\ f_1 < 0 \\ f_2 < 0 \\ f_3 > 0 \\ \frac{f_1 \cdot f_2}{f_3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ f_1 < 0 \\ f_2 > 0 \\ f_3 > 0 \\ \frac{f_1 \cdot f_2}{f_3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ f_1 > 0 \\ f_2 > 0 \\ f_3 > 0 \\ \frac{f_1 \cdot f_2}{f_3} > 0 \end{cases}$$

Além disso, vamos analisar como se comporta esse quociente nos valores que são raízes das funções:

■ $x = -4 \implies f_3(-4) = 0$, logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ não existe nos reais quando $x = -4$.

■ $x = -3 \implies f_3(-3) = 0$, logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ não existe nos reais quando $x = -3$.

■ $x = 1 \implies f_1(1) = 0$, logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é zero quando $x = 1$.

■ $x = 2 \implies f_2(2) = 0$, logo, $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$ é zero quando $x = 2$.

Retomando a inequação $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+7x+12} \leq 0$, observamos que são pedidos os valores que são menores ou iguais a zero, logo, são os intervalos estritamente negativos para $\frac{f_1 \cdot f_2}{f_3}$, além dos valores para x que tornam esse quociente nulo. Temos então

$$S = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x < -3 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\}$$

Note que precisamos usar o sinal $\leq$ para que pudéssemos indicar no conjunto solução que o valor $x = 1$ e $x = 2$ também satisfazem à inequação, mas já para os valores $x = -4$ e $x = -3$, usamos apenas a desigualdade, sem o igual, pois em $x = -4$ e $x = -3$ a função quociente não está definida.

EXERCÍCIOS

1 Resolva as inequações a seguir:

a) $(x+2)(x^2-9) \geq 0$

b) $\frac{4-x}{x^2+3x-4} \leq 0$

c) $\frac{(x-3)(x^2+1)(-x^2+3x)}{-x^2} > 0$

d) $\frac{(-x^2+4x-4)(x-2)}{(x-1)(x^2-2x+3)} \geq 0$

2 Imagine que você é o professor de Matemática. Elabore um problema que possa ser associado a cada um dos sistemas a seguir apresentados. Não esqueça de verificar se as soluções são compatíveis com o contexto do problema que você formulou!

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -2x + 5y = 7900 \\ 4x - 3y = 300 \end{cases}$$

3 (FGV) Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

temos que:

- a) $x = 1, y = 0$.
- b) É impossível.
- c) É indeterminado.
- d) $x = 3, y = -1$
- e) É determinado.

4 Um usuário de um caixa eletrônico deseja fazer um saque no valor de 310 reais. Sabendo que a máquina dispõe somente de cédulas de 10, 50 e 100 reais e que ele recebeu 9 cédulas no saque, pode-se afirmar (Verdadeiro ou Falso)

- () a máquina pagou apenas 2 cédulas de 100 reais;
- () a máquina pagou com 6 cédulas de 10 reais;
- () para fazer tal pagamento (com 9 cédulas), só é possível fazê-lo de uma única forma;
- () considerando soluções com números reais, o sistema gerado pelo problema é do tipo SPD;
- () uma das equações do sistema em questão é $10x + 50y + 100z + 310 = 0$, sendo x, y e z o número de cédulas de 10, 50 e 100, respectivamente;

5 (Unicamp) Um copo cheio de água pesa 385 g; com $\frac{2}{3}$ de água, pesa 310 g. pergunta-se:

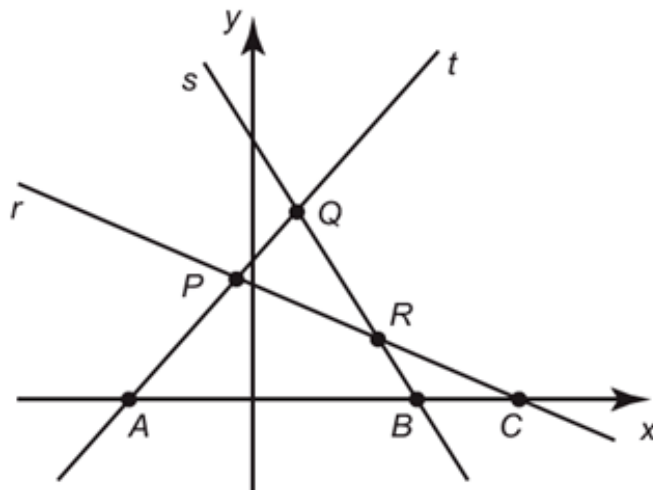
- a) Qual é o peso do copo vazio?
- b) Qual é o peso do copo com $\frac{3}{5}$ de água?

6 (FUVEST-SP) Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg
- Carlos e Andréia pesam juntos 123 kg
- Andréia e Bidu pesam juntos 66 kg

Nessas condições, determine o peso de cada um deles.

- 7 (Enem 2016) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P , Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A , B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x .



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

- a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P , Q e R , pois eles indicam onde as retas se intersectam.
 - b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A , B e C , pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.
 - c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.
 - d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.
 - e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.
- 8 (Enem 2017) Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores. O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é
- a) 200.
 - b) 209.
 - c) 270.
 - d) 340.
 - e) 475.

9 (Enem 2017) Uma escola organizou uma corrida de revezamento 4×400 metros, que consiste em uma prova esportiva na qual os atletas correm 400 metros cada um deles, segurando um bastão, repassando-o de um atleta para outro da mesma equipe, realizando três trocas ao longo do percurso, até o quarto atleta, que cruzará a linha de chegada com o bastão. A equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos. O segundo corredor da equipe ganhadora correu seus 400 metros 15 segundos mais rápido do que o primeiro; já o terceiro realizou seus 400 metros 5 segundos mais rápido que o segundo corredor, e o último realizou seu percurso em $\frac{3}{4}$ do tempo realizado pelo primeiro. Qual foi o tempo, em segundo, em que o último atleta da equipe ganhadora realizou seu percurso de 400 metros?

- a) 58
- b) 61
- c) 69
- d) 72
- e) 96

10 Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R\$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R\$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- a) 20
- b) 24
- c) 29
- d) 40
- e) 58

11 (Enem 2018) Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R\$ 3.800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R\$ 3.400,00. A televisão mais a estante sairiam por R\$ 4.200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista. O valor total, em real, pago pelo cliente foi de

- a) 3.610,00.
- b) 5.035,00.
- c) 5.415,00.
- d) 5.795,00.
- e) 6.100,00.

- 12 (PM Ceará). O batalhão de polícia militar de uma cidade constituída dos bairros B_1 , B_2 e B_3 será dividido em três pelotões distintos de modo que cada um fique responsável pelo policiamento ostensivo de um desses bairros. As populações dos bairros B_1 , B_2 e B_3 são, respectivamente, iguais a 60.000, 66.000 e 74.000 pessoas; o batalhão possui um efetivo de 4.000 militares dos quais 300 trabalham exclusivamente em uma central única de comunicação e inteligência, não caracterizando atividade policial ostensiva; e todos os militares do batalhão residem na cidade. Com base nessa situação hipotética, julgue a afirmação a seguir:

"Se as quantidades de policiais do sexo feminino em cada um dos três pelotões são números que satisfazem à inequação $x^2 - 520x + 64.000 < 0$, então, no batalhão, há mais de 600 policiais do sexo feminino."

- 13 (BB - Cesgranrio). A proposição funcional "Para todo e qualquer valor de n , tem-se $6n < n^2 + 8$ " será verdadeira, se n for um número real

- a) menor que 8.
- b) menor que 4.
- c) menor que 2.
- d) maior que 2.
- e) maior que 3.

- 14 (RFB - Esaf). Considere as inequações dadas por:

■ $f(x) = x^2 - 2x + 1 \leq 0$

■ $g(x) = -2x \leq +3x + 2 \leq 0$

Sabendo-se que A é o conjunto solução de $f(x)$ e B o conjunto solução de $g(x)$, então o conjunto $Y = A \cap B$ é igual a:

- a) $Y = \{x \in \mathbb{R}; -1/2 < x \leq 2\}$
- b) $Y = \{x \in \mathbb{R}; -1/2 \leq x \leq 2\}$
- c) $Y = \{x \in \mathbb{R}; x = 1\}$
- d) $Y = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$
- e) $Y = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$

- 15 (BASA - Cesgranrio). No conjunto dos números reais, considere as seguintes duas inequações:

■ Inequação 1: $5x - 7 > x^2 - x + 1$

■ Inequação 2: $x + 6 > -x + 10$

Um número real x , que é solução da inequação 2, também será solução da inequação 1, se, e somente se, for solução da inequação

- a) $x^2 - 16 > 0$
- b) $1/x < 1/4$
- c) $-x < -4$
- d) $4x - 16 < 0$

e) $x + 1 > x + 9$

- 16** (PM ES - AOCF). Resolvendo-se a inequação do segundo grau $2x^2 + 13x - 7 < 0$, no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, obtém-se o conjunto solução S igual a

a) $S = \{x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{7} < x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{7} < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R}; -7 < x < 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{7}\}$

- 17** Considere as funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 5x$

a) Resolva a equação $g(x) = h(x)$

b) Determine todos os valores reais de x para os quais se tem $g(x) > 0$

c) Determine todos os valores reais de x para os quais se tem $h(x) < 0$

d) Resolva a inequação $\frac{g(x)}{h(x)} \geq 0$

- 18** Considere a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$

a) Calcule $f(3, 5); f(0); f(1); f(2); f(-1); f(-2); f(4)$ e $f(5)$

b) Denomina-se domínio de uma função o maior conjunto de valores que podem ser atribuídos à variável independente. Determine o domínio A da função f .

- 19** Considere a função $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $w(x) = 3x$ e $z(x) = x^2 - 1$

a) Calcule $w(-2), w(-1), w(0)$ e $w(2)$.

b) Determine $z(-2), z(0)$ e $z(2)$

c) Resolva a inequação $\frac{z(x)}{w(x)} \leq 0$

d) Resolva a inequação $w(x) \cdot [z(x)]^2 > 0$

- 20** (Adaptado de [Conceição Junior \(2011\)](#)) Escreva uma inequação produto e uma inequação quociente cujo conjunto solução seja o intervalo $] - 2; 5] \cup] 8; +\infty[$

- 21** (CEFET-CE 2006) Considere a inequação $(x - 1)(x - 4) \leq 0$. Considerando os números inteiros que a satisfazem, é correto concluir que:

a) Só dois deles são positivos.

b) A soma de todos eles é dez.

c) O maior deles é múltiplo de 3.

d) O produto de todos eles é zero.

e) O produto de todos é um número negativo.

- 22 (CEFET-MG 2005) O número de soluções inteiras da inequação $(1-x)(x-8)^2(x+4)^3 > 0$ é
- a) 0
 - b) 2
 - c) 4
 - d) 6
- 23 (UFMG 2004) Considere a função $f(x) = \frac{(2x+2)}{(x-3)}$. O conjunto dos valores de x para os quais $f(x) \in \{y \in \mathbb{R}; 0 < y \leq 4\}$ é:
- a) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 7\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R}; x < -1 \text{ ou } x \geq 7\}$
 - c) $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 7\}$
 - d) $\{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$
- 24 (UFMG 2002) O número real x satisfaz $(4x-3)/(x+1) > 2$. Assinale a alternativa em que estão incluídas TODAS as possibilidades para x .
- a) $-1 < x < \frac{5}{2}$
 - b) $x < -1 \text{ ou } x > \frac{5}{2}$
 - c) $x > \frac{5}{2}$
 - d) $x < -1$
- 25 (FGV 2001) Quantos números reais não satisfazem à inequação $\frac{(x-5)}{(5-x)} < 1$?
- a) 0
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 3
 - e) infinitos
- 26 (MACKENZIE 1996) Os valores inteiros de k que satisfazem à inequação $\frac{(2k-3)}{(3-k)} > 1$ são em número de:
- a) 0
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 3
 - e) 4

Referências Bibliográficas

- Bazzini, L. e Boero, P. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. Em *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - Issues for*, volume 1, páginas 139–142, Bergen, Noruega. International Group of Psychology of Mathematics Education.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.
- Conceição Junior, F. d. S. (2011). Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(2).
- Delgado, C. J. B. (2010). O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado, Universidade do Grande Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Dreyfus, T. e Hoch, M. (2004). Equations - a structural approach. Em *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - Research Forum on Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching*, volume 1, páginas 152–155, Bergen, Noruega. International Group of Psychology of Mathematics Education.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Berne, Suíça.
- Henriques, A. e Almouloud, S. A. (2016). Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. *Ciência & Educação (Bauru)*, 22:465 – 487.
- Kieran, C. (2004). Equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situation. Em *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - Research Forum on Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching*, volume 1, páginas 143–147, Bergen, Noruega. International Group of Psychology of Mathematics Education.
- Lourenço, N. G. (2018). Inequações: uma abordagem funcional gráfica para o ensino fundamental ii. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Tsamir, P. e Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4):513–524.



Função Exponencial

O QUÊ?

Crescimento e decaimento exponenciais, função exponencial, juros compostos, progressão geométrica, expoentes racionais e irracionais.

POR QUÊ?

Dizemos que estamos diante de um crescimento exponencial sempre que o aumento percentual de determinada quantidade por unidade de tempo é constante. Este é o caso das medições econômicas, financeiras e políticas de crescimento - de vendas, lucros, preços de ações, produto interno bruto, inflação, taxas de juros. Assim, compreender bem o crescimento exponencial é crucial para compreender o mundo.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título: Função Exponencial

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Gladson Antunes (UNIRIO)
Michel Cambrainha (UNIRIO)

Revisão: Wanderley Rezende

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

Ilustrações: Miller Guglielmo

Gráficos: Tarso Caldas

Capa: Foto de Gustavo Fring no Pexels
<https://www.pexels.com/photo/woman-in-white-long-sleeve-shirt-wearing-white-goggles-3985155/>

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



EXPLORANDO CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAIS

A pandemia de COVID-19, uma doença respiratória aguda provocada pelo coronavírus SARS-CoV-2, chamou atenção do mundo todo em 2020 para o que chamamos de crescimento exponencial. Vimos diversos especialistas em diferentes meios de comunicação comentando sobre o crescimento exponencial da epidemia. Mas afinal, o que caracteriza este tipo de crescimento?



Sabemos que funções matemáticas podem ser usadas para fazermos previsões de um determinado fenômeno. A função exponencial fornece um modelo matemático simples para calcular a propagação de uma doença altamente contagiosa. Para além disso, o gráfico de uma função exponencial permite o estudo de situações que se caracterizam por uma curva de crescimento ou decréscimo acentuado. Neste capítulo você irá aprender a identificar, elaborar e resolver problemas que envolvem funções exponenciais. Além da modelagem de epidemias, serão apresentadas situações que envolvem decaimento radioativo, meia-vida de medicamentos, pressão atmosférica, divisão celular, dentre outras aplicações interessantes.

A epidemia

Atividade 1

Vamos simular três situações de epidemia. O professor irá distribuir envelopes contendo um número para cada estudante que deverá mantê-lo em segredo. Os primeiros infectados serão escolhidos ao acaso pelo professor. Cada vez que alguém for infectado pela doença, coloca-se de pé e permanece até o fim da dinâmica, que seguirá da seguinte maneira:



Epidemia 1

- RODADA 0: O professor escolhe dois números para serem os primeiros infectados, diz seus números e apaga-os da lista que está escrita na lousa. Os infectados ficam de pé. O pesquisador anota o número de infectados.
- RODADA 1: Cada um dos infectados escolhe um número que não tenha sido sorteado para “infectar”; os números são apagados na lousa e somente depois de todos terem escolhido suas vítimas, os novos infectados se colocam de pé. O pesquisador anota o número total de infectados.
- RODADA 2: Semelhante à rodada 1.
- As rodadas seguem até que todos tenham sido infectados.

Epidemia 2

- A mesma dinâmica anterior, porém começando com três infectados na rodada 0.

Epidemia 3

- Apenas um infectado na rodada 0 e cada infectado agora escolhe dois números para infectar a cada rodada.

Responda às seguintes perguntas:

- a) Anote os dados das três epidemias em tabelas e faça previsões para 4 rodadas além das que efetivamente ocorreram na sua turma.
 - b) Represente os dados graficamente.
 - c) Que critérios você usou no item (a) para fazer suas previsões? Qual a relação deles com os dados específicos de cada uma das epidemias.
 - d) Quantas rodadas aproximadamente demoraria para cada epidemia infectar todos os estudantes da sua escola? Primeiro faça um “chute” e somente depois faça as contas.
 - e) Responda a mesma pergunta anterior considerando a sua cidade, seu estado e o todo o país.
-

Contando quadrados

Atividade 2

Em uma caixa há 240 quadradinhos de papel cartão dupla face, verde de um lado e marrom do outro. Eles são lançados sobre a mesa e os quadrados com lado marrom para cima são retirados, restando apenas 126 quadradinhos (verdes).

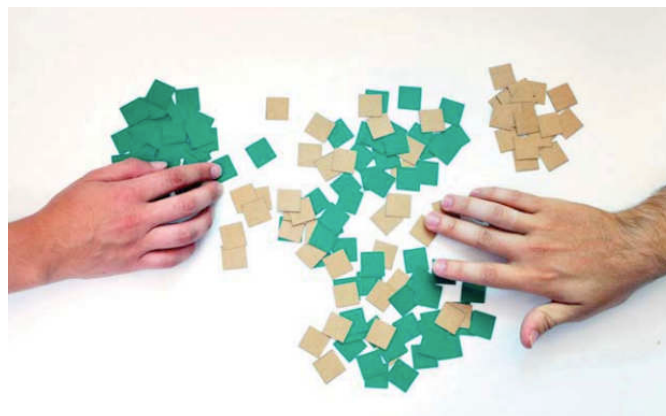


Figura 6.1: Imagem retirada do experimento *Eliminando Quadrados*, da coleção Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1008>

Um novo lançamento é feito e depois de retirados os marrons, sobram 68 verdes. Os lançamentos seguintes apresentam as seguintes quantidades de quadradinhos verdes:

Lançamento	# verdes
0	240
1	126
2	68
3	34
4	13
5	5
6	2
7	0

- Represente em um sistema de coordenadas os dados da tabela acima.
- Observando os dados da tabela é possível conjecturar que eles obedecem a algum padrão?
- Acrescente uma terceira coluna à tabela contendo os quocientes entre as quantidades de um lançamento pela quantidade do lançamento anterior.

Lançamento	# verdes	quocientes
0	240	---
1	126	$\frac{126}{240} = 0,525$
2	68	
3	34	
4	13	
5	5	
6	2	
7	0	

- d) Considerando outros resultados possíveis para o mesmo experimento, o que podemos esperar dos valores na terceira coluna da tabela? Que tipo de propriedades matemáticas esses números sempre terão? Que tipo de propriedade eles provavelmente terão?
- e) Um experimento como este descrito no item (a) pode ser simulado computacionalmente. Ao executar esta simulação 4 vezes, os seguintes resultados foram obtidos.
- 240, 113, 55, 28, 13, 7, 3, 0
- 240, 124, 66, 27, 16, 7, 3, 2, 2, 2, 0
- 240, 106, 57, 19, 9, 5, 1, 0
- 240, 124, 62, 29, 11, 5, 2, 1, 1, 0
- f) Verifique se suas conjecturas se aplicam aos dados acima.
- g) Deduza uma expressão matemática que forneça, aproximadamente, a quantidade de quadradinhos verdes em função da ordem de lançamento.

Populações

Atividade 3

Um grupo de biólogos está estudando uma espécie animal cuja população vem diminuindo ao longo dos anos. Depois de reunirem os dados percebem que a cada ano a quantidade de indivíduos reduz para aproximadamente $\frac{1}{3}$ da quantidade do ano anterior.

- a) Escreva uma expressão matemática que relaciona o número de indivíduos dessa população ao longo dos anos, sabendo que no início das medições os cientistas tenham encontrado 300 mil indivíduos.
- b) Admitindo que esse padrão se repita ao longo dos anos, em quanto tempo a população entrará em extinção?
- c) Como consequência, a população da espécie que é a principal presa da espécie estudada apresentou um crescimento que duplicava a cada 6 meses. Escreva uma expressão matemática que represente a variação anual do número de indivíduos dessa população de presas, que no início das medições contava com 5×10^5 indivíduos.

ORGANIZANDO CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAIS

Há diversas situações bastante comuns na natureza que não são bem modeladas pelas funções que estudamos até agora: as lineares, afins e quadráticas. As três atividades vistas do início deste capítulo exemplificam algumas delas. Uma característica que todas têm em comum é que os valores da variável dependente crescem ou decrescem muito rápido. Essa característica em uma situação real pode indicar que provavelmente estamos diante de uma situação de crescimento (ou decaimento) exponencial. Veja o gráfico abaixo com o número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil de março até agosto de 2020. Perceba o tempo aproximado que levamos para alcançar 200.000 casos (≈ 3 meses) e o tempo para os novos 200.000 casos (menos de 15 dias).



Figura 6.2: Fonte: [Wikipedia](#)

Como, afinal identificamos o crescimento (ou decaimento) exponencial? Em todos os casos analisados nas atividades da seção anterior, observamos dois ingredientes fundamentais: um **valor inicial** para a variável dependente, decorrente da primeira medição, e um **valor constante positivo** que servia como **fator de multiplicação** para se obter os valores seguintes.

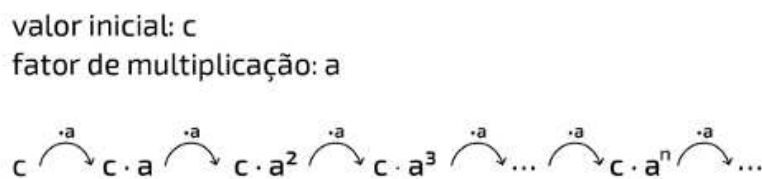


Figura 6.3: Crescimento/decrescimento exponenciais.

A expressão $f(x) = c \cdot a^x$, em que a e $c > 0$ são constantes e a é a que usamos para modelar as situações em que há crescimento/decaimento exponencial.

Quando este fenômeno ocorre estamos diante do **crescimento exponencial**, caso o fator de multiplicação seja maior que 1

$$a > 1 \iff a^2 > a \iff a^3 > a^2 \iff \dots,$$

ou **decaimento exponencial** quando o fator está entre 0 e 1.

$$0 < a < 1 \iff a^2 < a \iff a^3 < a^2 \iff \dots$$

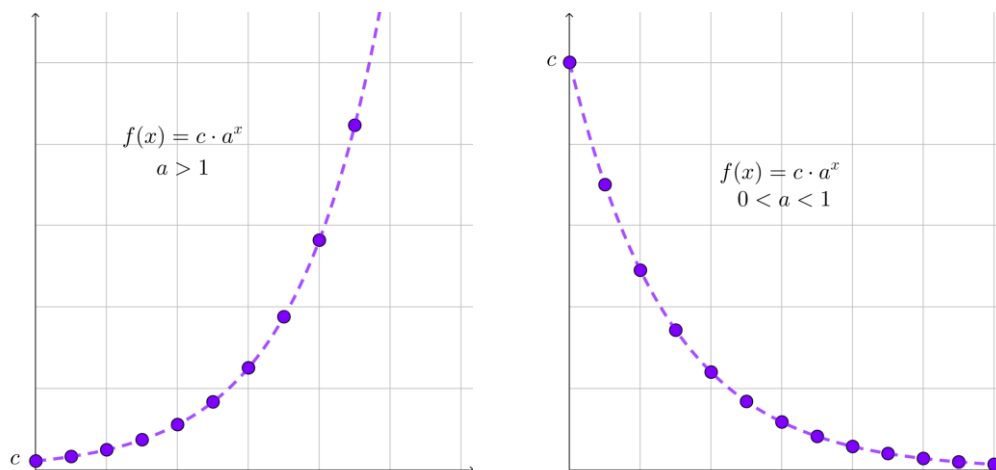


Figura 6.4: Crescimento/decrescimento exponenciais.

VOCÊ SABIA?

- O crescimento exponencial é tão rápido que com poucas multiplicações podemos alcançar valores cujas ordens de grandeza são maiores que a quantidade de átomos estimada para o universo observável (que é algo em torno de 10^{80}).



Figura 6.5: Por Pablo Carlos Budassi - Obra do próprio, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=74584500>

Você duvida? Vejamos então um exemplo! Pegue uma folha de papel sulfite (ou do seu caderno), cuja espessura é algo em torno de 0,075 milímetros. Se dobramos essa folha ao meio, temos o dobro da espessura inicial, 0,15 milímetros. Dobrando novamente, 0,30 milímetros e assim sucessivamente.

Nenhum ser humano, usando somente as mãos, consegue dobrar uma folha dessas mais que 6 vezes, pode tentar! Uma folha dobrada 7 vezes tem a espessura de um caderno de 128 páginas... E mais, se fosse possível dobrar a folha 23 vezes, a espessura seria maior que a distância da terra até a Lua.

E aí? Com quantas dobras a espessura alcançaria a ordem de grandeza o número de átomos do universo conhecido? (267 dobras)

- Nesse vídeo, um chef de cozinha chinês faz 128 noodles em apenas 10 segundos! <https://youtu.be/S2AnYEheaFM?t=120>



Figura 6.6: Imagem extraída do vídeo: <https://youtu.be/S2AnYEheaFM?t=120>

- A área de Computação parece desafiar o fato de que não é possível manter um crescimento exponencial por um longo período de tempo devido a escassez de recursos. Talvez o processo exponencial mais longo de que se tem notícia na natureza se refere ao crescimento do poder computacional disponível por 1 dólar. Este parâmetro seguiu uma exponencial crescente, de constante de tempo de aproximadamente 18 meses, desde o lançamento dos primeiros computadores comerciais em meados da década de 1950 até o início dos anos 2000. Até aquela época, houve uma duplicação do poder computacional disponível por 1 dólar 27 vezes seguidas, ou seja, uma variação de 134 milhões de vezes em 40 anos. Estes números são aproximados pois não conhecemos um estudo preciso nesta direção, nos termos descritos.



Figura 6.7: Foto de Slejven Djurakovic, Unsplash

Uma outra lei similar é conhecida como lei de Moore. Gordon Moore foi um dos fundadores da Intel, uma das maiores fabricantes mundiais de circuitos integrados. Ele enunciou a sua lei em 1965, numa época em que um microchip podia integrar algo como 4 transistores: **“o desempenho de microchips produzidos em massa vai dobrar a cada 18 meses”**. Aqui o limitante de preço é substituído pela condição de produção em massa o que dá um efeito similar, já que só é possível produzir em massa componentes suficientemente baratos para poderem ser absorvidos pelo mercado. Adaptado de <https://www.ime.usp.br/~is/infousp/imre/imre.htm>.

PRATICANDO CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAIS

A Fazenda de Árvores

Atividade 4

Uma fazenda de árvores começou a colher um lote que havia sido plantada anos atrás. A tabela abaixo mostra o número de árvores remanescentes para cada um dos 8 anos de colheita

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Árvores remanescentes	10.000	9.502	9.026	8.574	8.145	7.737	7.350	6.982	6.634

- Escreva uma expressão para função que relaciona as árvores remanescentes com o tempo decorrido.
- Analise os dados da tabela e faça uma previsão para os próximos anos mostrados na tabela a seguir.
- Os donos da fazenda querem parar a colheita quando sobrarem 15% do número inicial de árvores do lote. Quando devem parar?

Ano	10	15	20	25	30	35	40
Árvores remanescentes							

Cara ou Coroa?

Atividade 5

Na teoria das probabilidades, ao analisar as chances de um determinado evento acontecer, é comum considerarmos todas as possibilidades para assim podermos quantificar a probabilidade. O conjunto formado por todas essas possibilidades é chamado de **espaço amostral**. Você possui uma moeda, vai girá-la no ar e analisar qual face ficou voltada para cima quando ela cair. O espaço amostral desse experimento contém dois elementos: cara (C), coroa (K). Responda.

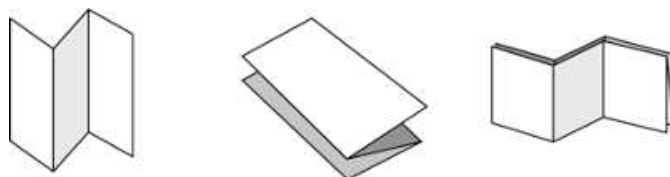
- Qual o espaço amostral para o experimento de lançar a mesma moeda 2 vezes?
- E três vezes?
- Explique a seguinte afirmação:

"O tamanho do espaço amostral do lançamento de uma moeda várias vezes ao ar aumenta exponencialmente em relação a quantidade de lançamentos"

Dobradura

Atividade 6

Uma folha de papel de área 1 é dobrada em três partes iguais, depois em mais três partes iguais, em terços novamente, e assim sucessivamente.



- a) Na tabela abaixo registre a área da menor região em cada etapa, e o número total de regiões.

Etapas	Área de cada região	Número de regiões
0	1	1
1		
2		
3		
4		
5		

- b) Descreva os padrões observados na tabela e encontre uma expressão matemática que sirva para gerá-las em função das etapas.

Duas exponenciais

Atividade 7

Construa tabelas e gráficos para comparar os valores da variável y nas duas expressões exponenciais para valores inteiros da variável x de 1 até 10.

$$y = 2 \cdot 3^x \text{ e } y = 64 \cdot (1,5)^x.$$

- a) Em qual das duas y cresce a uma taxa maior? Como você sabe?
- b) Para que valor de x , os valores de y coincidem? Como isso se reflete na representação gráfica?

PARA REFLETIR

O crescimento exponencial pressupõe recursos ilimitados e isso faz com que em muitos casos esse tipo de comportamento seja observado apenas em certos períodos de tempo. Isso pode ser visto, por exemplo, na forma como crescem as populações. Com pouco ou sem nenhuma limitação de recursos as populações podem apresentar um crescimento exponencial. No entanto, na prática sabemos que há uma série de limitações - espaço, existência

de predadores, escassez de alimentos, etc. - é o que os pesquisadores costumam chamar de **Resistência Ambiental**. Portanto, após experimentar um período de crescimento exponencial, o que observamos é que a população tende a se estabilizar. Esse comportamento é chamado de **crescimento logístico**.

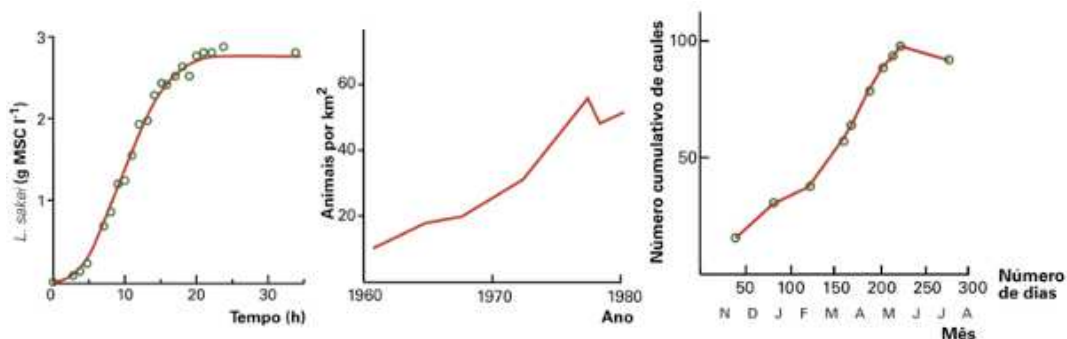


Figura 6.8: Exemplos reais de um aumento populacional como descrito acima. (a) a Bactéria *Lactobacillus sakei* crescendo em um meio de cultura. (b) A população de gnu, na região do Serengeti na Tanzânia. (c) População de juncácea anual, *Juncus gerardi*. Fonte: CEPA

EXPLORANDO VARIAÇÃO PERCENTUAL

Tá caro!

Atividade 8

Você está precisando comprar um tênis novo e vem pesquisando os preços. Na sua última consulta o modelo que você deseja estava custando 160 reais. Ao fazer uma nova consulta, você verifica que agora ele custa 240 reais, e resolve não comprar até o preço baixar um pouco.

- Qual foi o valor do aumento de preço observado e que valor ele representa em termos percentuais? Explique seu cálculo.
- Levando em consideração que houve um aumento geral nos preços, você estava esperando um aumento de no máximo 10% no valor do tênis. Que valor máximo deveria estar custando o tênis para que você o comprasse.
- Construa uma narrativa de outra situação em que o mesmo aumento de preço de 80 reais esteja dentro da margem de 10% esperada.

As colônias

Atividade 9

Analise cada uma das situações abaixo e em seguida responda as perguntas para cada uma delas.

(A) Uma população de 100 coelhos é introduzida em uma reserva ecológica. Após um período de observação de 12 meses, os biólogos concluíram que essa colônia cresceu ao longo do ano seguindo uma taxa percentual aproximada de 6% ao mês, isto é, a cada mês a população de coelhos na colônia estava aproximadamente 6% maior em relação ao registro do mês anterior.

(B) Um laboratório está pesquisando a eficácia de um antibiótico e uma equipe de biomédicos o adiciona em uma colônia de bactérias com uma população de 950.000 indivíduos. As células então começam a morrer de maneira que ao final de 12 horas, os pesquisadores afirmam que população da colônia diminuiu a uma taxa percentual de 10% a cada hora.

- Elabore uma tabela com os possíveis dados observados pelos pesquisadores em cada uma das situações.
- Descreva como você obteve os dados das tabelas anteriores.
- Pode-se afirmar que os dados tabelas apresentam crescimento e decaimento exponenciais? Em caso afirmativo, quais são os fatores em cada situação?
- Qual a relação do fator de crescimento/decaimento com a taxa percentual?
- Escreva uma expressão matemática para cada uma das situações que relacione o número de indivíduos nas colônias com o número de meses (ou horas) decorridos desde o início das observações.

- f) Com a ajuda de uma calculadora compare os valores gerados pela expressão matemática com as que você calculou no item a).
- g) Denotando por $P(t)$ a população no tempo t , P_0 seu valor inicial e r a taxa percentual observada, generalize as expressões obtidas no item anterior.

Juros

Atividade 10

Você acabou de adquirir um produto de R\$ 200 e o pagamento proposto pela loja é da seguinte maneira: uma entrada de R\$ 100 paga no ato da compra e mais uma parcela de R\$ 110,25 após 2 meses.

- a) Considerando que a taxa percentual mensal de acréscimo será a mesma nos dois meses, qual é o valor dessa taxa na transação proposta?
- b) Com base na taxa percentual que você encontrou no item anterior, que valor deveria ser pago se a segunda parcela fosse apenas 1 mês depois da compra?
- c) E se a segunda parcela fosse paga com 3 meses de intervalo, qual seria o valor a pagar?

ORGANIZANDO VARIAÇÃO PERCENTUAL

Em diversas situações as variações das quantidades no tempo são expressas em termos percentuais: o preço da gasolina subiu 10%, o número de desempregados aumentou 50%, o PIB do Brasil encolheu 2,5%, o número de pessoas infectadas pelo vírus aumentou 300%, etc. Isso geralmente ocorre quando se quer evidenciar que fração do último registro aquela variação representa. Dizer que o número de infectados por um vírus aumentou 300% significa que se a quantidade de infectados era I_0 e passou a ser I_1 , então

$$\frac{I_1 - I_0}{I_0} = 300\% \iff I_1 - I_0 = 3I_0 \iff I_1 = 4I_0.$$

De maneira mais geral, se a taxa percentual é r (sendo positiva para crescimento e negativa para redução), então temos

$$\frac{I_1 - I_0}{I_0} = r \iff I_1 - I_0 = rI_0 \iff I_1 = I_0 + rI_0 \iff I_1 = (1 + r)I_0.$$

Quando é o caso de que taxa percentual observada permanece constante ao longo de um intervalo de tempo, então estamos diante de uma situação de crescimento (taxa positiva) ou decaimento (taxa negativa) exponencial.

Mais ainda, como podemos observar acima, uma variação com taxa percentual r corresponde a um fator de crescimento/decaimento $1 + r$, isto é, para saber o valor atual de uma determinada grandeza que aumentou segundo uma taxa percentual r , basta multiplicar o seu último registro por $1 + r$.

Taxa percentual: r	
$t = 0$	C (valor inicial)
$t = 1$	$C(1 + r)$
$t = 2$	$C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$
$t = 3$	$C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$
$\dots$	$\dots$
$t = n$	$C(1 + r)^{n-1}(1 + r) = C(1 + r)^n$

No contexto das transações financeiras o acréscimo no valor do dinheiro (dívida, investimento, crédito, débito, etc) é chamado de **juro** e a taxa percentual de variação segundo a qual calculamos o juro chama-se **taxa de juros**. Esse sistema em que o juro é calculado sobre o valor imediatamente anterior é conhecido como **capitalização composta** (também chamado de juro sobre juro) e é adotado na maior parte das transações financeiras do mundo.

O valor de um investimento de R\$ 1.000 a uma taxa de juros de 10% ao mês evolui exponencialmente da seguinte maneira:

Tempo	Valor	Juro
$t = 0$	R\$ 1.000 (capital inicial)	R\$ 0
$t = 1$	$R\$ 1.000(1 + 0,1) = R\$ 1.100$	R\$ 100
$t = 2$	$R\$ 1.100(1 + 0,1) = R\$ 1.210$	R\$ 110
$t = 3$	$R\$ 1.210(1 + 0,1) = R\$ 1.331$	R\$ 121
$t = n$	$R\$1000 \cdot (1,1)^n$	$R\$1000 \cdot (1,1)^{n-1} \cdot 0,1$

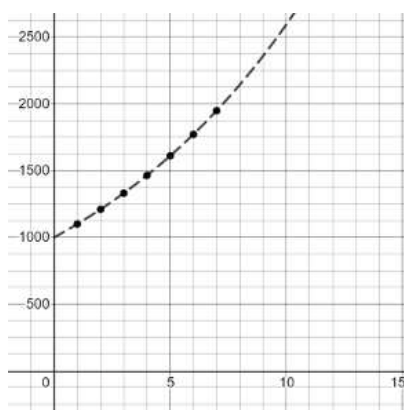


Figura 6.9: Evolução do valor de um investimento de R\$ 1000,00 capitalizado a uma taxa de juros de 10% ao mês.

PRATICANDO VARIAÇÃO PERCENTUAL

Antílopes

Atividade 11

As tabelas abaixo mostram os dados de três possíveis variações nas populações de antílopes em uma reserva. Baseando-se nos dados, responda às questões a seguir.

Ano	Antílopes
2017	1.000
2018	1.030
2019	1.061
2020	1.093

Tabela 6.1:

Ano	Antílopes
2017	1.000
2018	1.030
2019	1.060
2020	1.090

Tabela 6.2:

Ano	Antílopes
2017	1.000
2018	1.003
2019	1.006
2020	1.009

Tabela 6.3:

- Que tabela mostra a população de antílopes crescendo a uma taxa de 3% ao ano?
- Que tabela mostra a população de antílopes crescendo a uma taxa de 30 antílopes por ano?
- Descreva o crescimento da tabela remanescente.
- Alguma dessas variações é linear? E exponencial? Explique.

Fatores e taxas

Atividade 12

Classifique dentre os modelos dados abaixo os que apresentam crescimento exponencial ou decaimento exponencial. Identifique o que se pede nas colunas da tabela.

Modelo	Valor inicial	Fator	Taxa percentual	Crescimento ou decaimento?	Esboço do gráfico
$y(z) = 3(1,7)^z$					
$p(r) = 10(0,2)^r$					
$s(t) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$					
$M(x) = 5 \cdot 3^x$					
$F(y) = 0,2 \cdot 7^y$					

Juros sobre juros

Atividade 13

Resolva os seguintes problemas:

- a) Se uma pessoa deseja obter R\$ 27.500,00 em um ano, quanto deverá depositar hoje em uma alternativa de poupança que rende 1,7% de juros compostos ao mês?
- b) Qual a taxa percentual mensal de juros de uma aplicação de R\$ 40.000,00 que produz um total de R\$ 43.894,63 ao final de um quadrimestre.
- c) Determinar o juro total a ser pago em um empréstimo de R\$ 88.000,00 pelo prazo de 5 meses à taxa composta de 4,5% ao mês.
- d) Qual das opções gera um valor maior ao final de 1 ano: aplicar um capital de R\$60.000,00 à taxa de juros de 9,9% ao semestre ou à taxa de 20,78% ao ano.

EXPLORANDO PROPRIEDADES ARITMÉTICAS

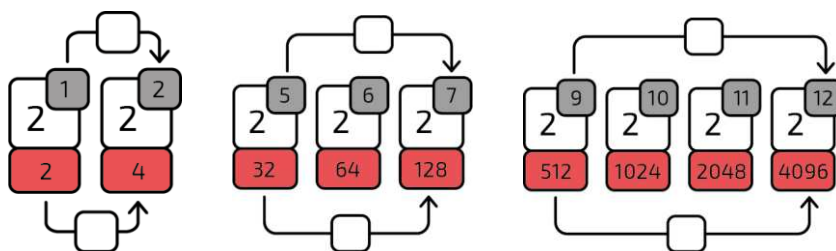
Expoentes inteiros

Atividade 14

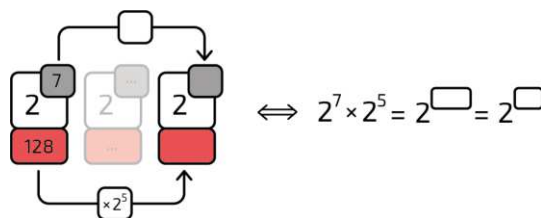
Observe os cartões abaixo, e responda às perguntas que seguem.

2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰	2 ¹¹	2 ¹²
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

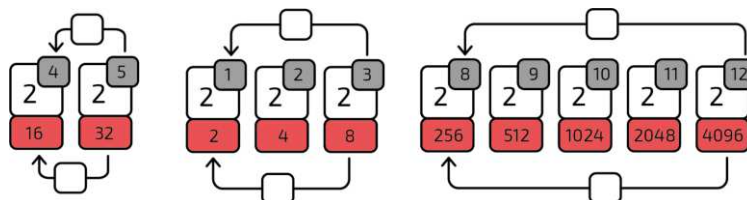
- a) Que relação têm os números em um mesmo cartão?
- b) Que padrões se observam nos números em vermelho (embaixo) quando movemos para a **direita**? E nos números em cinza (acima)? Registre suas observações no esquema abaixo.



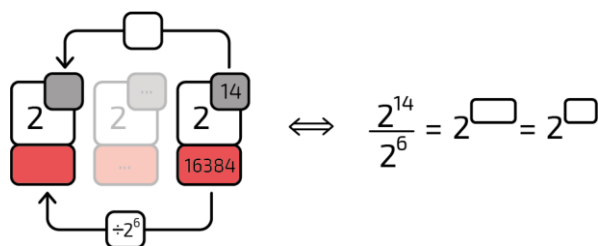
- c) Complete o que falta no esquema abaixo. Escreva outros exemplos semelhantes e, então, generalize.



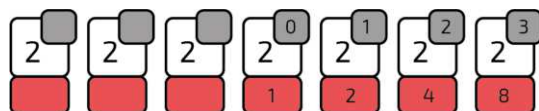
- d) Que padrão se observa nos números em vermelho (embaixo) quando movemos para a **esquerda**? E nos números em cinza (acima)?



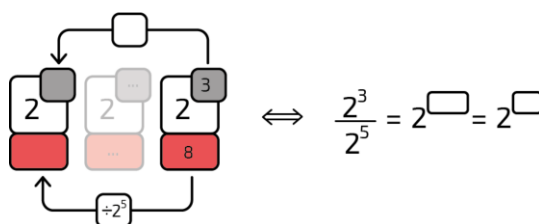
- e) Complete o que falta no esquema abaixo. Escreva outros exemplos semelhantes e, então, generalize.



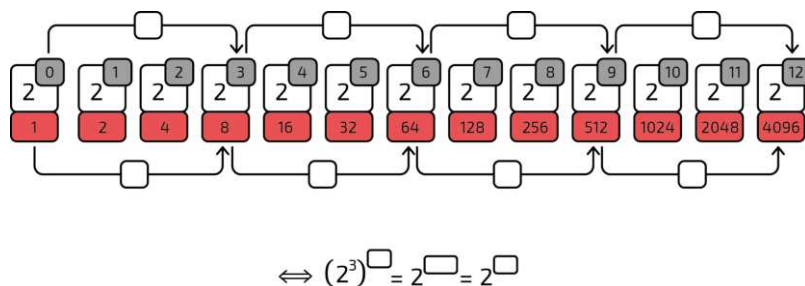
f) Proponha novos cartões, e explique suas escolhas.



g) Baseado na sua proposta resolva.



h) Complete o que falta no esquema abaixo. Escreva outros exemplos semelhantes e, então, generalize.



i) Sejam m e n números inteiros. Baseado nas suas conclusões nos itens anteriores, relacione a coluna da direita com a coluna da esquerda.

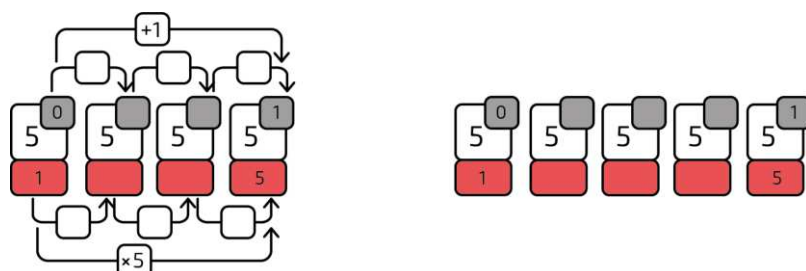
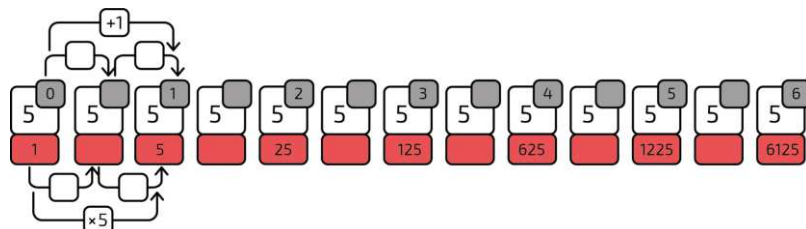
- | | |
|-----------------------|---------------------|
| (1) $2^m \cdot 2^n$ | (A) $2^{m \cdot n}$ |
| (2) $\frac{2^m}{2^n}$ | (B) 2^{m+n} |
| (3) $(2^m)^n$ | (C) 2^{m-n} |

Expoentes racionais

Atividade 15

Observe os cartões e responda as perguntas.

- a) Complete os cartões vazios nas sequências abaixo. Explique seu raciocínio.



- b) Represente nos cartões abaixo as expressões pedidas:

$$(5^{\frac{1}{2}})^3$$

$$(5^{\frac{3}{4}})^4$$

$$(5^{\frac{2}{5}})^5$$

- c) Qual a sua conclusão sobre que significado tem a expressão $5^{\frac{m}{n}}$?

PARA REFLETIR

Baseado nas propriedades discutidas nas duas atividades anteriores, que números reais estão representados pelas expressões?

- (a) $27^{-2/3}$ (d) $3^{1/2} \cdot 3^{3/2}$ (g) $\pi^{1/3} \cdot \pi^{1/2}$
 (b) $6^{-1/2}$ (e) $3^{1/2+3/2}$ (h) $(10^{1/2})^{1/3}$
 (c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4}$ (f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7/9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2/9}$ (i) $(10^{1/4})^{3/5}$

ORGANIZANDO PROPRIEDADES ARITMÉTICAS

Como vimos nas investigações acima, quando realizamos operações matemáticas com números reais expressos na forma de potências podemos observar alguns padrões que se repetem quando relacionamos os resultados das potências e seus expoentes. De maneira resumida, podemos dizer que multiplicações e divisões entre potências correspondem a adições e subtrações entre seus expoentes. Vamos aqui, organizar essas propriedades.

Considere m e n dois números inteiros positivos, e a um número real positivo, e diferente de 1.

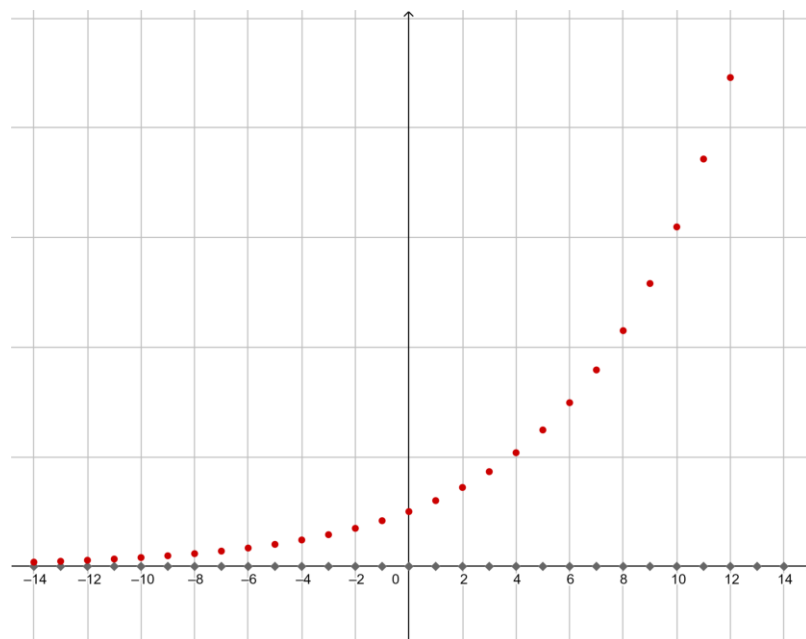
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$	
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
$(a^{m/n})^n = a^m \iff a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$	

Até agora sabemos calcular e operar potências com expoentes inteiros (positivos, zero e negativos) e também racionais. Vamos ver como esses números aparecem nas representações gráficas. Neste link <https://www.geogebra.org/m/xatdbug7> você pode acessar uma versão interativa dos gráficos mostrados a seguir, em que consideramos separadamente os casos $0 < a < 1$ e $a > 1$.

Vamos considerar uma função exponencial do tipo $y = a^x$ com $a > 1$. O caso $0 < a < 1$ é inteiramente análogo.

Estendendo para valores inteiros negativos de x , teremos algo como no gráfico abaixo. Uma base $a > 1$ elevada a um expoente negativo é sempre um número positivo e menor que 1.

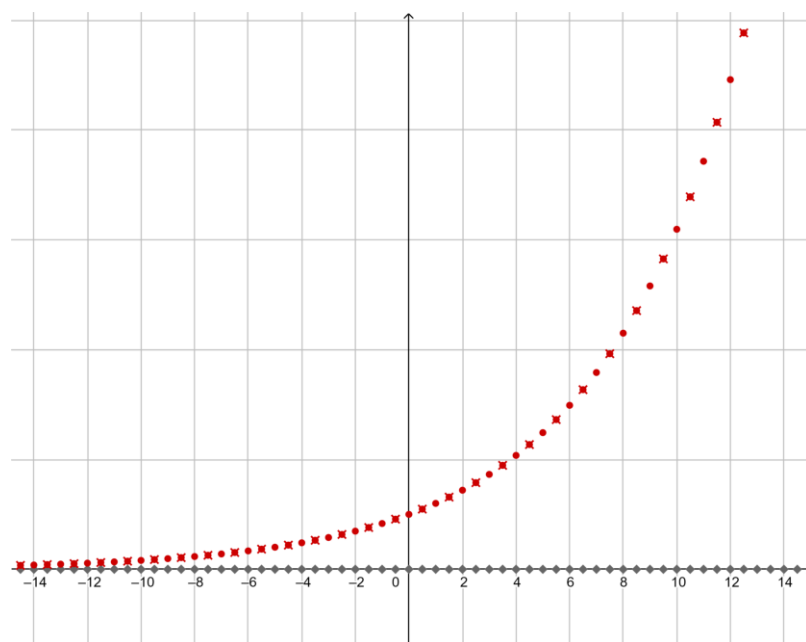
$$a > 1 \iff 0 < a^{-n} < 1$$



Perceba no gráfico, que os pontos do lado esquerdo do eixo y estão todos acima do gráfico (positivos) e abaixo do ponto que está sobre o eixo (menores que 1). Observe também que quanto mais negativo é o expoente, mais próximo de zero estará o resultado da potência. O gráfico mantém o aspecto crescente: para m e n inteiros, temos

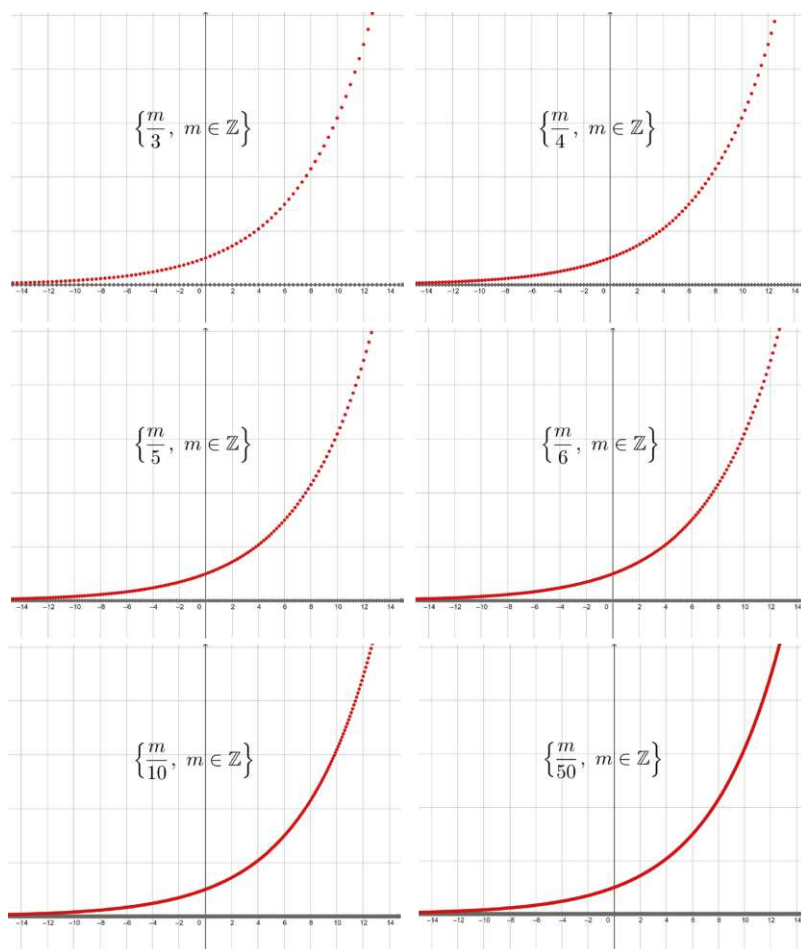
$$m > n \Rightarrow a^m > a^n$$

Se acrescentamos agora as frações de denominador 2, ou seja os pontos médios entre os valores de x inteiros, teremos o seguinte aspecto.

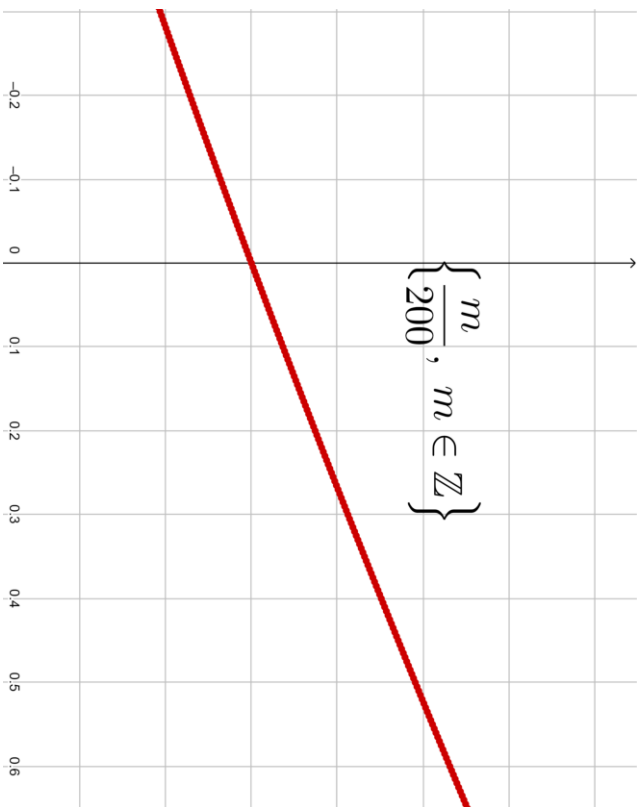
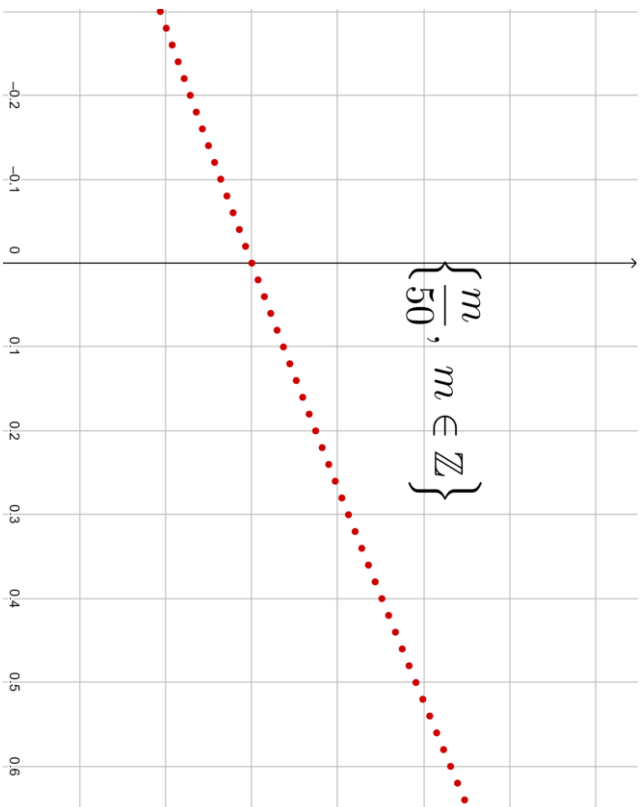


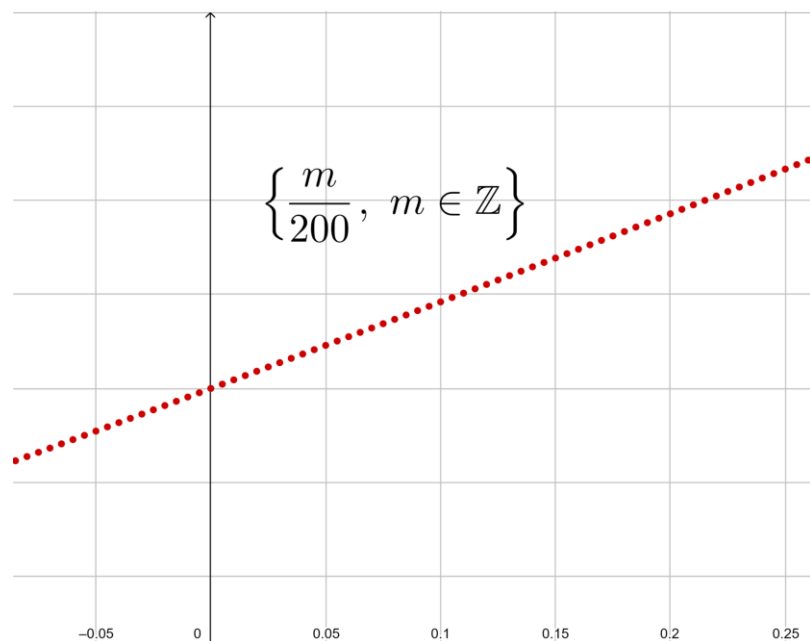
As propriedades gráficas anteriores todas se mantêm: gráfico crescente (com crescimento rápido para valores de x positivos), sempre acima do eixo x , se aproximando de zero à medida que o valores do domínio são números negativos cada vez menores.

Acrescentando outras frações, os pontos vão se acumulando mantendo sempre o mesmo aspecto visual.



O último gráfico parece ser uma linha contínua, mas é apenas uma questão de escala: basta aproximar para um intervalo menor e ver que os pontos estão, na verdade, espaçados. O processo continua indefinidamente. Podemos aumentar o denominador nessa janela até parecer novamente contínuo e depois aproximar até ver os espaços entre os pontos.

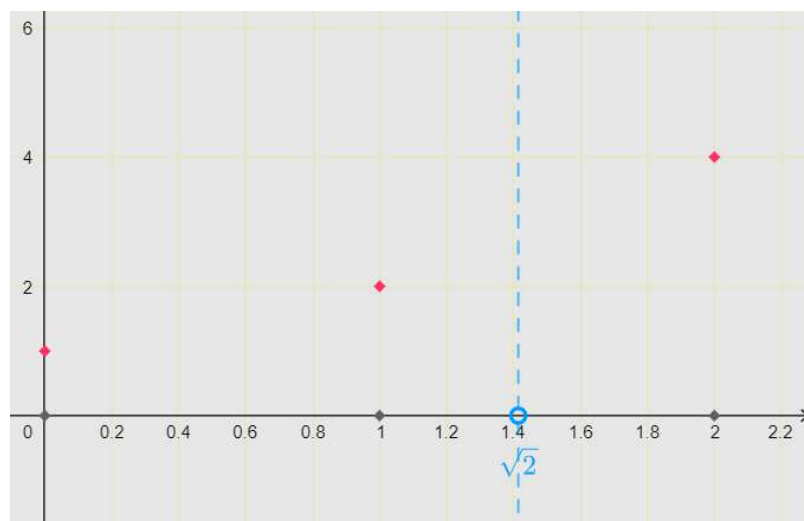


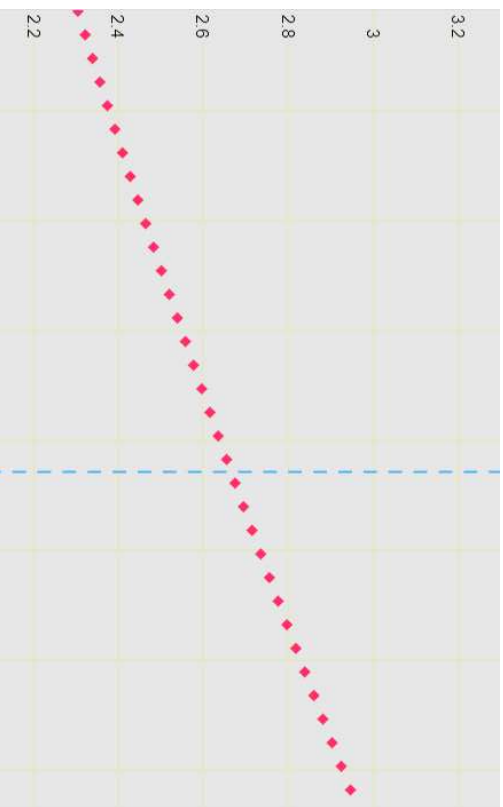
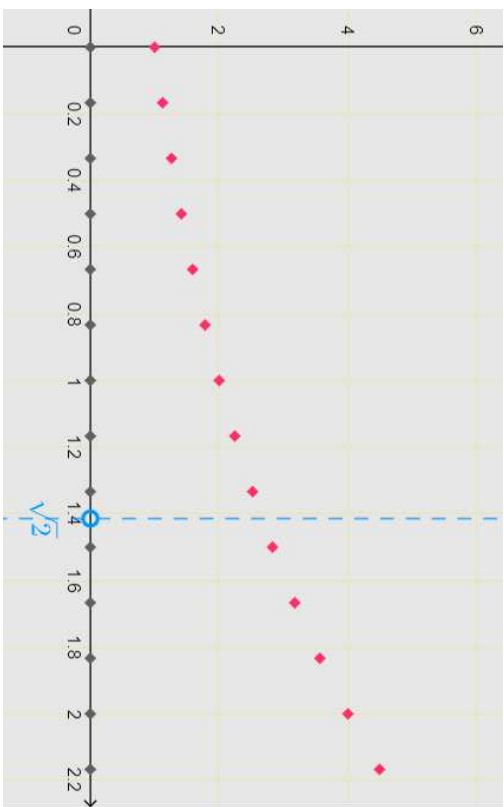


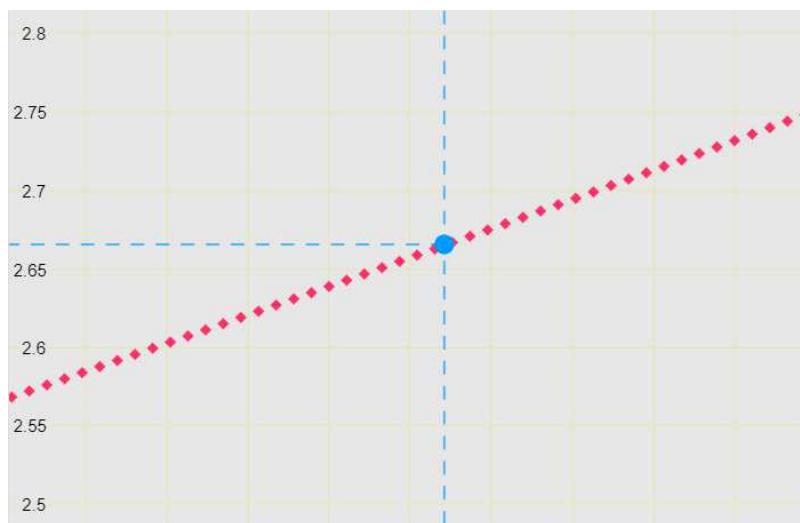
Por se tratar de um processo infinito, podemos repeti-lo tantas vezes quanto desejamos de forma que será possível, definir também as potências com expoentes irracionais.

Como se sabe, os números irracionais não podem ser escritos na forma de fração, mas podem ser bem aproximados por números racionais.

Vejamos o caso do número $2^{\sqrt{2}}$. (versão interativa <https://www.geogebra.org/m/zdyqhhwb>)







$$\begin{array}{rcl}
 & \sqrt{2} & \approx 1,414213562... \\
 2^{1,4} \approx 2,6390158215... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,5} \approx 2,8284271247... \\
 2^{1,41} \approx 2,6573716281... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,42} \approx 2,6758551095... \\
 2^{1,414} \approx 2,6647496501... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,415} \approx 2,6665973541... \\
 2^{1,4142} \approx 2,6651190885... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,4143} \approx 2,6653038269... \\
 2^{1,41421} \approx 2,6651375617... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,41422} \approx 2,6651560351... \\
 2^{1,414213} \approx 2,665143103... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,414214} \approx 2,6651449511... \\
 2^{1,4142135} \approx 2,6651440274... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,4142136} \approx 2,665144212... \\
 2^{1,41421356} \approx 2,6651441383... & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,41421357} \approx 2,6651441567... \\
 2^{1,414213562} \approx 2,665144142.. & < 2^{\sqrt{2}} < & 2^{1,414213563} \approx 2,6651441438... \\
 & \vdots & \\
 2^{\sqrt{2}} & \approx & 2,66514414...
 \end{array}$$

O valor que obtemos com esse processo (mesmo que façamos muitas etapas) é uma aproximação racional do número $2^{\sqrt{2}}$, que é um número irracional. Mas, o grande interesse aqui não é no valor numérico de uma potência com expoente irracional, porque isso pode ser feito em qualquer calculadora científica ou mesmo nos principais sites de busca, por exemplo, para $2^{\sqrt{2}}$ basta digitar $\boxed{2}$, $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\wedge}$, $\boxed{\sqrt{}}$ ou $\boxed{sqrt}$ e $\boxed{2}$, mas entender que tais números podem ser definidos a partir de um processo de aproximação por potências cujos expoentes são racionais (frações), e que, além disso podem ser operados obedecendo às mesmas propriedades que valem para os expoentes racionais.

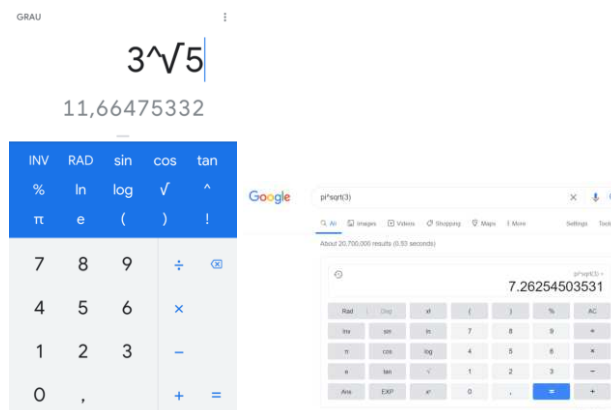


Figura 6.10: Calculadora Android e página de busca do Google.

Na próxima seção faremos uma revisão sobre tais propriedades quando definirmos a função exponencial com domínio real.

VOCÊ SABIA?

Experimente digitar em uma calculadora convencional o número 2 seguido da tecla $\sqrt{}$ (ou na ordem contrária na calculadora do celular, isto é, aperte $\sqrt{}$ seguido de 2).

Observe o número aparece no visor da calculadora. Será correto afirmar que $\sqrt{2}$ é **igual** a este resultado, isto é, que $\sqrt{2} = 1,414213562$? Experimente agora digitar esse número $1,414213562$ e elevá-lo ao quadrado. O resultado que aparece é 2 ?

Embora apertemos a tecla $\frac{\square}{\square}$, o resultado dado pela calculadore, neste caso, é apenas aproximado, e isso ocorre porque as calculadoras (e os computadores) são máquinas capazes de armazenar e manipular apenas quantidades finitas de dados. Por isso, quando elas tem que armazenar ou fazer contas com números que não admitem uma representação decimal finita, como é o caso dos números irracionais, o que elas fazem é trabalhar com aproximações destes números. A boa notícia é que para a grande maioria das situações isso é bom o suficiente.

Existem duas subáreas da Matemática que lidam com aproximações deste tipo: uma mais teórica chamada de *Teoria dos Números* que tem uma parte de seus resultados dedicados a classificar aproximações de números irracionais, e outra mais aplicada chamada *Análise Numérica* que se ocupa, dentre outras coisas, do estudo das propagações de erros em algoritmos feitos por computadores para resolver problemas matemáticos.

EXPLORANDO FUNÇÃO EXPONENCIAL

Um cafézinho

Atividade 16

Chamamos meia-vida biológica da cafeína o tempo necessário para que o nosso corpo elimine a metade de uma dose desta substância. Esse tempo varia amplamente entre os indivíduos de acordo com fatores como gravidez, ingestão outras drogas, nível de função enzimática hepática (necessário para o metabolismo da cafeína) e idade. Em adultos saudáveis, a meia-vida da cafeína varia entre três a sete horas. Nos recém-nascidos, a meia-vida da cafeína pode ser de 80 horas ou mais, sendo esta uma das razões para a recomendação de não dar qualquer alimento que contenha cafeína para bebês. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cafe%C3%ADna>

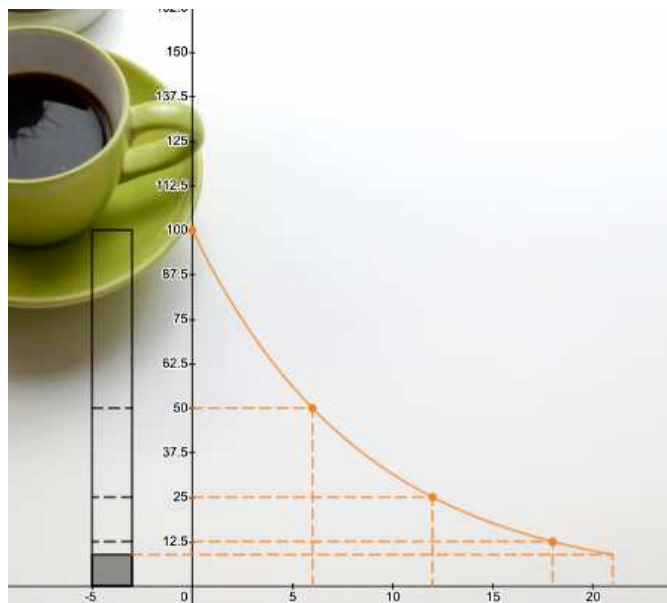


Figura 6.11: Gráfico mostrando como a quantidade de cafeína no organismo de um indivíduo que ingeriu uma xícara de café de 250ml varia ao longo do tempo (medido em horas).

Para um indivíduo que acabou de ingerir uma xícara de café de 250ml - que contém cerca de 100mg de cafeína - exames laboratoriais mostraram que a quantidade de cafeína no seu organismo variou com o passar do tempo (em horas) de acordo com a seguinte função $f(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{6}}$, pergunta-se:

- Quais serão as quantidades de cafeína no organismo deste indivíduo após meia hora, uma hora e meia e quatro horas desde a ingestão da xícara de café ?
- Quanto tempo deverá se passar desde a ingestão da xícara de café até que a quantidade de cafeína no organismo deste indivíduo caia para a metade da quantidade inicial ?
- Que mudanças deveríamos fazer na expressão caso a meia-vida da cafeína neste indivíduo fosse de 8 horas e ele tivesse ingerido 150 mg de cafeína?

Qual é a expressão?

Atividade 17

Uma epidemia causada por um vírus está se espalhando na cidade. Os cientistas, após analisarem os primeiros dados concluem que a doença está se espalhando rapidamente porque o número de infectados está triplicando a cada 4 dias. O número inicial de infectados que compuseram a análise foi de 100 pessoas. Responda as perguntas.

- a) Complete a tabela com os possíveis números de infectados observados pelos cientistas.

Infectados	100					
Dias desde o 100° caso confirmado	0	4	8	12	16	20

- b) Considerando que esse modelo retrata bem a realidade, ou seja, que a evolução do número de casos obedece a um padrão de crescimento exponencial, qual deve ser o número aproximado de infectados no segundo e no sexto dias desde o 100° confirmado?

Infectados	100				
Dias desde o 100° caso confirmado	0	2	4	6	8

- c) Complete a tabela abaixo, com a possível evolução diária dos casos. Explique seu raciocínio.

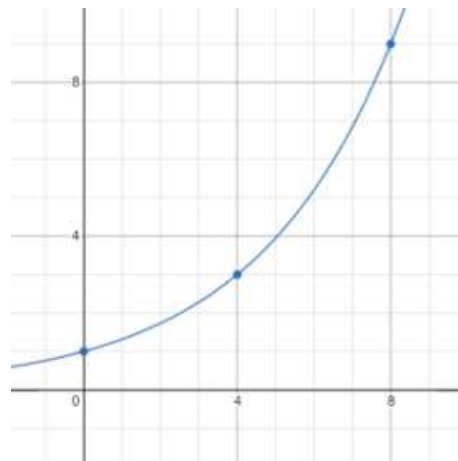
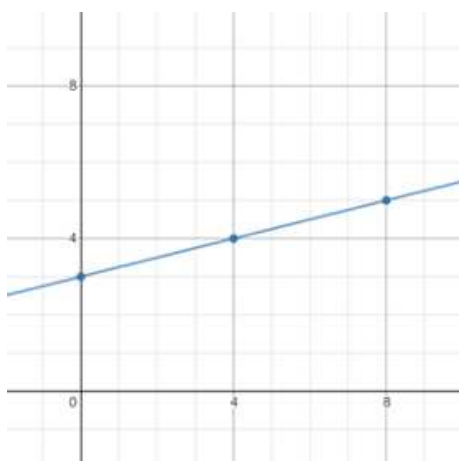
Infectados	100								
Dias desde o 100° caso confirmado	0	1	2	3	4	5	6	7	8

- d) Denotando por $D(t)$ o número de infectados t dias após o 100 caso confirmado, qual dos modelos exponenciais abaixo melhor representa $D(t)$.

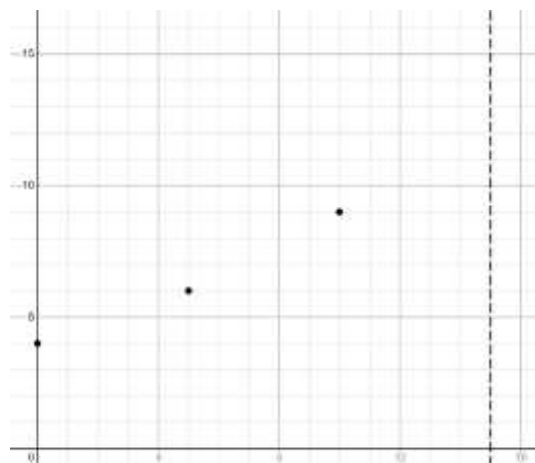
(I) $D(t) = 100 \cdot 3^{t+4}$

(II) $D(t) = 100 \cdot 3^{4t}$

(III) $D(t) = 100 \cdot 3^{\frac{t}{4}}$



- a) O gráfico (A) representa a função afim $y = 3 + \frac{1}{4}x$. Explique como os números 3, 1 e 4 que aparecem na expressão da função afetam ou “aparecem” no gráfico.
- b) O gráfico (B) representa o crescimento exponencial dado pela expressão $y = 1 \cdot 3^{x/4}$. Explique como os números 3, 1 e 4 que aparecem na expressão da função afetam ou “aparecem” no gráfico.
- c) Os três pontos representados abaixo pertencem a uma curva de crescimento exponencial. Determine o ponto de abscissa $x = 15$ que mantém esse crescimento e escreva uma expressão que descreva a curva.



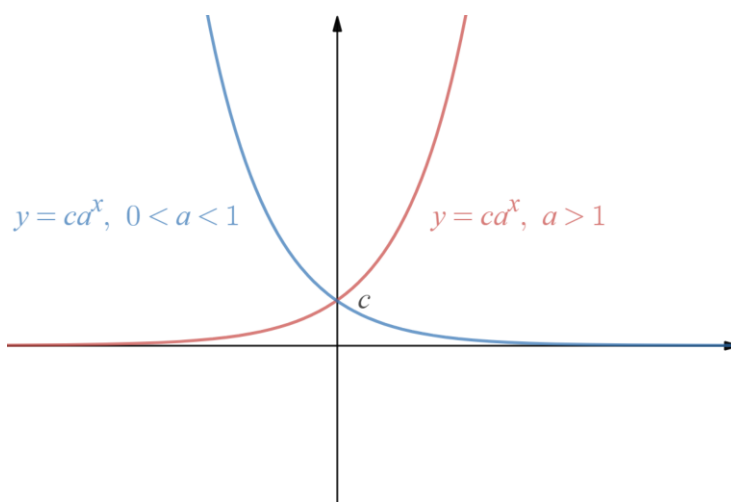
ORGANIZANDO FUNÇÃO EXPONENCIAL

Até aqui aprendemos a identificar e quantificar o crescimento (ou decaimento) exponencial, inclusive em termos percentuais. Vimos também que a expressão $f(x) = c \cdot a^x$ é a que descreve situações em que há crescimento/decaimento exponencial. Daremos agora o passo seguinte, isto é, vamos olhar para a expressão $f(x) = c \cdot a^x$ como uma função de variável real, ou seja, cujo domínio é todo o conjunto dos números reais. Você pode então se perguntar, mas o que muda em relação ao que vínhamos fazendo até aqui? Em termos práticos, agora podemos calcular a imagem de qualquer número real que faça sentido no contexto do problema sem termos que nos preocupar se ele é ou não múltiplo inteiro do período em que se multiplica o fator de crescimento/decaimento. No que diz respeito aos gráficos, podemos desenhar linhas contínuas com comportamentos bem definidos (e não mais marcar pontos a partir dos dados de uma tabela).

Definição Chama-se função exponencial a função de domínio real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita da forma $f(x) = c \cdot a^x$ em que a é um número real positivo e diferente de 1 e c é um número positivo.

PARA REFLETIR

Por que você acha que precisamos fazer as restrições nos valores da base? O que acontece se $a = 0$, $a = 1$, ou se a é negativo?



Se a base a é um número positivo menor que 1, estamos diante de uma função exponencial decrescente. Caso a seja maior que 1, teremos uma função crescente. Os gráficos, em ambos os casos, ficam acima do eixo x , isto é, à região correspondente às ordenadas positivas, e intersectam o eixo das ordenadas no ponto $(c, 0)$.

O **conjunto imagem** da função exponencial $f(x) = c \cdot a^x$ é o conjunto de todos números reais positivos. Para se convencer desse fato, pense por exemplo na função $y = 10^x$: qualquer número real y_0 positivo, (muito) grande ou (muito) pequeno, está entre duas potências consecutivas de 10 (podendo ser uma delas). Ou seja, existe um número inteiro k tal que

$$10^k \leq y_0 < 10^{k+1}$$

Uma vez localizado esse intervalo $[k, k + 1[$, podemos considerar os (infinitos) números racionais e irracionais nele para ir aproximando até localizar o valor x_0 tal que $10^{x_0} = y_0$.

A mesma coisa vale para qualquer outra base $a > 0$ e diferente de 1. (esses fatos serão explorados um pouco mais no capítulo de função logarítmica: esse expoente x_0 que encontramos se chama o logaritmo de y_0 na base 10).

Você pode explorar mais e aprender sobre os aspectos visuais do gráfico da função exponencial neste link <https://www.geogebra.org/m/qvphqptp>.

Observações

1. As propriedades aritméticas que vimos anteriormente e que valem para quaisquer números reais x, x' são

$$\blacksquare a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$$

$$\blacksquare a^{x-x'} = \frac{a^x}{a^{x'}}$$

$$\blacksquare a^{-1} = \frac{1}{a}$$

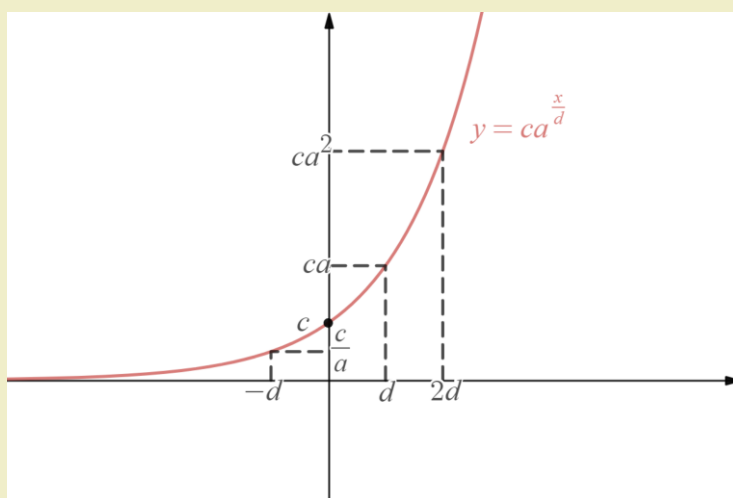
$$\blacksquare a^{x \cdot x'} = (a^x)^{x'}$$

2. Como vimos nas atividades da seção anterior, em algumas situações-problema quando é conveniente, o expoente x pode aparecer multiplicado por uma constante. Mas perceba que, uma expressão do tipo $y = 3 \cdot 4^{x/2}$ pode ser reescrita como $y = 3 \cdot 4^{(1/2) \cdot x} = 3 \cdot (4^{1/2})^x = 3 \cdot 2^x$, que é a forma padrão que apresentamos da função exponencial. Generalizando para qualquer base, $a^{kx} = (a^k)^x$.

Expressões do tipo $y = 8^{x+2}$, se transformam em $y = 8^x \cdot 8^2 = 64 \cdot 8^x$, ou de maneira mais geral, $y = a^{x+\ell} = a^\ell \cdot a^x$.

Nos problemas, entretanto, a constante multiplicando o expoente x pode ajudar a entender como variam as grandezas: a expressão $f(x) = c \cdot a^{x/d}$ assume o valor c , quando $x = 0$ e a cada intervalo de tamanho d , os valores vão sendo multiplicados por a .

$$\dots, f(-2d) = \frac{c}{a^2}, f(-d) = \frac{c}{a}, f(0) = c, f(d) = c \cdot a, f(2d) = c \cdot a^2, f(3d) = c \cdot a^3, \dots$$



3. Quando temos uma exponencial decrescente, tipo $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$y = \left(\frac{1}{7}\right)^x \iff y = (7^{-1})^x \iff y = 7^{-x}$$

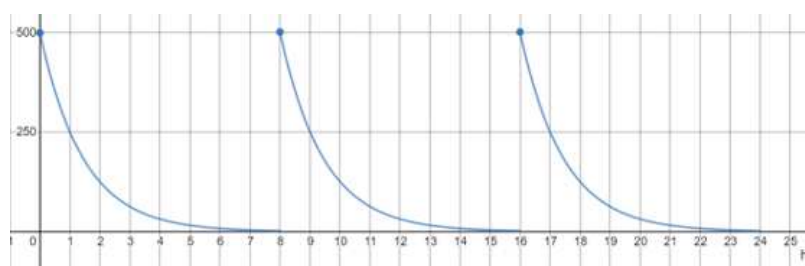
PRATICANDO FUNÇÃO EXPONENCIAL

Analgésicos

Atividade 19

Todo medicamento é acompanhado por uma bula, que contém, entre outros tópicos, a composição, informações ao paciente, informações técnicas e posologia. Uma informação técnica importante é a meia-vida do medicamento, que indica o tempo em que o mesmo se reduz a 50% do que tinha no organismo do paciente, após a introdução do medicamento. O tempo de meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da duração do efeito farmacológico, sendo assim um importante parâmetro para médicos e também para a indústria farmacêutica.

- Descubra quais são os três analgésicos mais conhecidos entre os seus colegas de turma.
- Faça uma pesquisa na internet e descubra as meias-vidas dessas substâncias. Use as palavras-chaves: farmacocinética, meia-vida, semivida, farmacodinâmica.
- Para cada uma delas, escreva a expressão da função exponencial que modela a quantidade de substância no sangue em função do tempo.
- O gráfico abaixo representa a quantidade em mg de um antibiótico no sangue de um paciente durante 24 horas. Descreva a dosagem, a meia-vida e a posologia do medicamento para esse paciente.

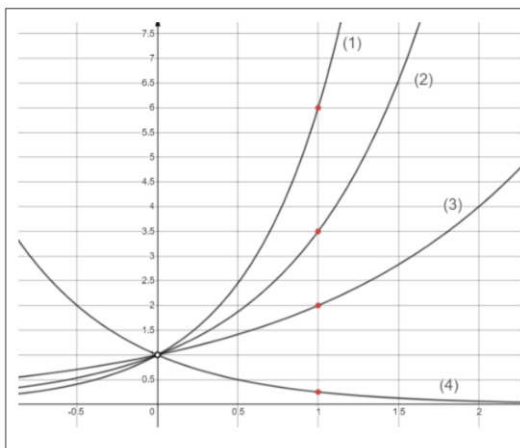


Várias curvas

Atividade 20

Abaixo, todos os gráficos são de funções exponenciais. Escreva expressões para cada uma delas.

a)



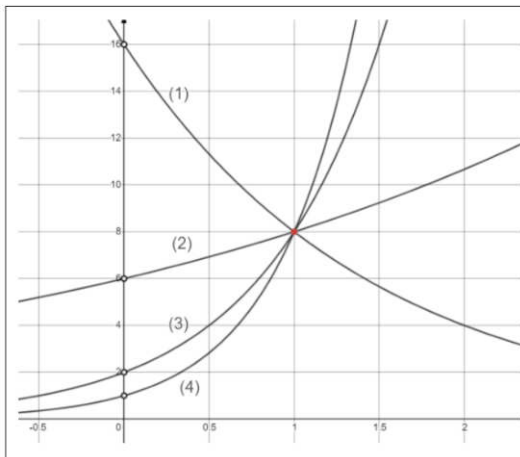
(1)

(2)

(3)

(4)

b)



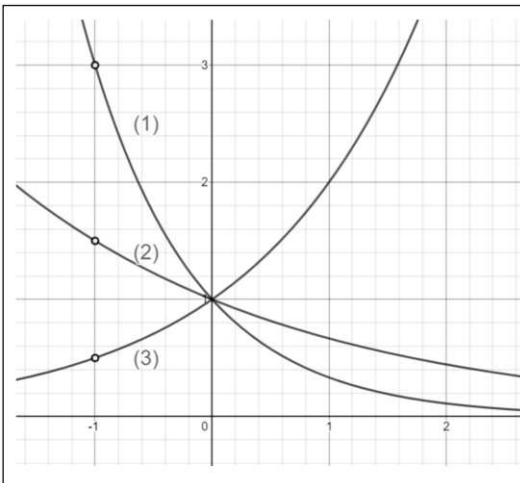
(1)

(2)

(3)

(4)

c)



(1)

(2)

(3)

VOCÊ SABIA?

Já aprendemos a descrever o crescimento/decaimento exponencial em termos percentuais e vimos que ao considerarmos uma taxa percentual r positiva e constante em cada intervalo de tempo a expressão $C(1+r)^n$ fornece o valor atual de uma grandeza após n períodos. Nesta fórmula assumimos que o crescimento ocorre em etapas discretas, isto é, em dias, meses, anos, horas etc. No entanto, na prática, uma população de bactérias que duplica a cada hora não aguarda pelo último minuto para -- como num passe de mágica -- duplicar seu tamanho. Muito pelo contrário, o que acontece é que muitas situações experimentam um processo contínuo de crescimento.

Vejamos o que ocorre quando levamos esse raciocínio do "processo contínuo de crescimento" ao limite na seguinte situação: Suponha que você empreste a alguém 1 real cobrando juros de 100% ($r = 1$) ao ano. Ao final desse período quanto essa pessoa deveria lhe pagar?

Rapidamente você vai dizer que ela deverá pagar 2 reais. OK! Mas vamos pensar agora o seguinte: seis meses após o empréstimo, quanto vale o seu dinheiro?

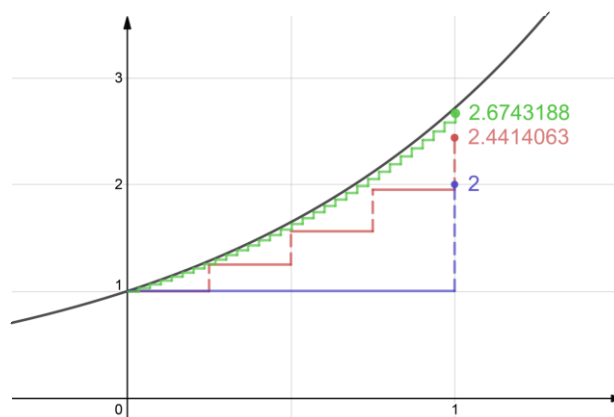
Considerando que 50% ($r = 1/2$) é a taxa proporcional correspondente ao período de 6 meses, então o dinheiro vale $(1 + 1/2) = 1,50$ reais. Então, considerando que a pessoa só vá te pagar no fim de um ano, a pessoa permaneceria com esse valor de 1,50 por mais 6 meses. Sendo assim, ao final de um ano ela deveria pagar esse valor mais metade dele, ou seja:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \text{ reais.}$$

E se pensássemos assim de 4 em 4 meses? Nesse caso a taxa proporcional é $r = 1/3$, e ao final do primeiro quadrimestre o dinheiro emprestado vale $1 + \frac{1}{3}$, passados 4 meses, esse valor já corrigido sofrerá um novo acréscimo e passará a valer $\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$ e finalmente, depois do último quadrimestre teremos $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37$ reais.

Seguindo este raciocínio, isto é, capitalizando a quantidade emprestada em diferentes períodos obtemos a seguinte tabela:

Se capitalizado trimestralmente	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,44140625$
Se capitalizado diariamente	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714567482$
Se capitalizado a cada minuto	$\left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} = 2,718279215$
Se capitalizado a cada segundo	$\left(1 + \frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = 2,718282473$



Isso nos mostra que na medida em que vamos considerando períodos de tempo cada vez menores vamos nos aproximando de um valor máximo constante 2,71828... que é conhecido como **número de Euler** e denotado pela letra e . Ou seja, se adotássemos um regime de capitalização contínua ao final de um ano a pessoa deveria pagar e reais.

Mas o que isso significa? Que o número e é o resultado máximo possível quando consideramos um crescimento/decaimento contínuo de 100% por um período de tempo. O que é sutil aqui é a ideia de que cada pequeno crescimento/decaimento gera uma pequena parte que também começará a crescer/decair por conta própria. É como se o número e representasse uma barreira, um limite de quão rápido um processo pode crescer/decair continuamente. Levando isto em conta, temos que qualquer outra taxa de crescimento/decaimento poderá ser escrita usando e . Neste link <https://www.desmos.com/calculator/ywfoix8smn> você pode explorar esta propriedade, encontrando o valor de K que melhor aproxima as funções $G(x) = a^x$ e $F(x) = e^{Kx}$.

O número de Euler, essa constante que vale aproximadamente 2,71828... é, assim como o famoso número π ($\pi \approx 3,1415928...$), um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma de fração, ou que a sua representação decimal não é uma dízima periódica. Este fato foi provado pelo matemático suíço Leonhard Euler (por volta de 1737), usando uma técnica conhecida hoje como frações contínuas. Dada a importância e relevância do seu trabalho, a constante recebe hoje seu nome (embora tenha sido descoberta quase meio século antes por outro matemático suíço, Jacob Bernoulli, enquanto estudava juros compostos) e a notação escolhida por Euler para representá-la foi mantida e é a que usamos como padrão até hoje.

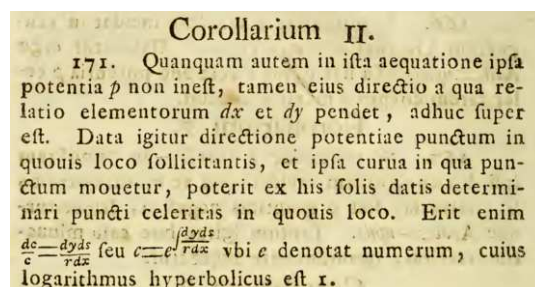


Figura 6.12: Leonhard Euler, *Mechanica*, vol 1, pag 68 (1736). <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>

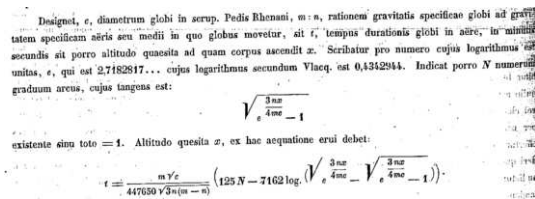


Figura 6.13: Leonhard Euler, Euler, Meditatio in experientia explosione tormentorum nuper instituta, (1762). <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>

Situações ou fenômenos que envolvem um crescimento ou decaimento exponencial contínuo naturalmente são modelados por funções exponenciais de base e . É o caso, por exemplo, do decaimento radioativo, do crescimento de populações e de alguns fenômenos da Física, como a variação da pressão atmosférica em função da altura e o resfriamento de corpos. Vejamos este último exemplo com mais detalhes.

Uma das leis da física que possui grande aplicação é a chamada Lei do resfriamento de Newton. Ela estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido a temperatura constante, sua temperatura varia a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Ou seja, podemos dizer que quando um objeto estiver a uma temperatura mais alta do que a sua vizinhança, ele perderá calor para o ambiente e esfriará. É o que faz uma xícara de café quente deixada sobre a mesa esfriar com o passar do tempo.

Essa Lei pode ser traduzida matematicamente pela função exponencial $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$, $D(t)$ a diferença num instante t e α uma constante que depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

PARA SABER + FUNÇÃO EXPONENCIAL

Próximo valor

Atividade 21

Complete a tabela com os próximos valores de acordo com cada modelo especificado.

x	Afim	Quadrática	Exponencial
0	3	3	3
1	6	6	6
2			
3			
4			
5			
6			

- Algum dos modelos é possível preencher de mais de uma forma? Qual(is)? Compare suas respostas com pelo menos dois de seus colegas.
- Admita que para o modelo quadrático o ponto $(0, 3)$ é o vértice da parábola. Como preencher a coluna do meio nesse caso?
- Elabore expressões para cada um dos modelos (considerando o quadrático do item (b)) e use uma calculadora gráfica para representá-los e em um mesmo sistema de coordenadas.
- Qual dos modelos apresentou maior crescimento? Será que a sua resposta seria a mesma se trocássemos os valores iniciais (mantendo o mesmo para os três casos)?

Intervalo de tempo

Atividade 22

Um biólogo observou que a área ocupada por uma cultura de bactérias em uma placa de Petri estava crescendo a uma taxa de 44% a cada hora. No início da observação a área ocupada pela cultura era de 100mm^2 . A função exponencial que modela essa situação é, portanto, dada por $A(t) = 100 \cdot (1,45)^t$.

- Determine o fator de crescimento na primeira meia hora.
- Determine o fator de crescimento na segunda, na terceira e na décima meia hora, ou seja, os valores de $\frac{A(1)}{A(0,5)}$, $\frac{A(1,5)}{A(1)}$ e $\frac{A(5)}{A(4,5)}$.
- Mostre que o fator de crescimento é o mesmo em qualquer intervalo de meia hora.
- Mostre que, para qualquer intervalo de $\frac{1}{4}$ de hora, o fator de crescimento é o mesmo.
- Justifique a seguinte afirmação: "O fator de crescimento da área na cultura de bactérias em um dado intervalo de tempo depende apenas do tamanho desse intervalo."

Olhando para uma função exponencial geral $f(x) = c \cdot a^x$ em um intervalo $[x, x+h]$ do domínio podemos observar que

$$f(x+h) = c \cdot a^{x+h} = c \cdot a^x \cdot a^h = f(x) \cdot a^h$$

$$\therefore \frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

A última expressão significa que o fator de multiplicação nesse intervalo depende apenas do comprimento (h) desse intervalo. Nesse mesmo intervalo se olhamos para a taxa de variação média teremos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c \cdot a^{x+h} - c \cdot a^x}{h} \\ &= \frac{c \cdot a^x \cdot a^h - c \cdot a^x}{h} = c \cdot a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \\ &= f(x) \cdot \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta f}{\Delta x} = f(x) \frac{a^h - 1}{h}$$

Ou seja, a taxa de variação média também pode ser obtida a partir da imagem do valor inicial do intervalo multiplicado por um fator que depende apenas do comprimento do intervalo. Mas o que isso quer dizer?

Bem, a taxa de variação está relacionada com a velocidade de crescimento, isso significa que se olhamos em intervalos iguais a velocidade sempre será proporcional ao valor da função no início do intervalo. Vejamos um exemplo:

Para a função $f(x) = 4^x$ em intervalos de tamanho 0,5, $[x, x+0,5]$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{4^{x+0,5} - 4^x}{0,5} = 4^x \cdot \frac{4^{0,5} - 1}{0,5} \\ &= f(x) \cdot \frac{\sqrt{4} - 1}{0,5} = 2f(x) \end{aligned}$$

Isto é, a velocidade média em intervalos de tamanho 0,5 é sempre o dobro da posição no início do intervalo.

$[x, x+0,5]$	$[1; 1,5]$	$[2,5; 3]$	$[-1; -0,5]$
$f(x)$	$f(1) = 4$	$f(2) = 32$	$f(-1) = 0,25$
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	8	64	0,5

O fator de multiplicação na taxa de variação média depende apenas da base a e do tamanho do intervalo h . Vamos analisar o que ocorre quando fazemos o comprimento do intervalo ficar bem próximo de zero, ou seja, quando taxa de variação média se aproxima da taxa de variação instantânea.

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$	$\frac{4^h - 1}{h}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^h - 1}{h}$	$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^h - 1}{h}$
1	1	2	3	-0,5	-0,25
0,5	0,82842712	1,4641016	2	-0,58578644	-0,26794919
0,1	0,71773463	1,1612317	1,4869835	-0,66967008	-0,28358342
0,01	0,69555501	1,1046692	1,395948	-0,69075046	-0,28726866
0,001	0,69338746	1,099216	1,3872557	-0,69290701	-0,2876407
0,0001	0,6931712	1,0986726	1,3863905	-0,69312316	-0,28767793
0,00001	0,69314958	1,0986183	1,386304	-0,69314478	-0,28768166
0,000001	0,69314742	1,0986129	1,3862953	-0,69314694	-0,28768203

Perceba que, para cada uma das bases, os fatores parecem estar se aproximando de um valor que, agora, só depende da base da exponencial. Isso nos leva a querer conjecturar que

"A taxa de variação instantânea da função exponencial em um valor x_0 do domínio é sempre proporcional ao valor da função no ponto $f(x_0)$ e que a constante de proporcionalidade depende apenas da base da exponencial."

Dito de outra maneira, se uma grandeza cresce segundo uma função exponencial, a velocidade de crescimento em cada instante sempre será proporcional ao estado atual daquela grandeza. Quanto maior o valor, mais rápido crescerá, e, no caso de decaimento exponencial, quanto menor o valor, mais devagar decairá. Isso é coerente com a ideia de crescimento rápido e de um decaimento que faz com que as imagens se aproximem de zero sem, no entanto, atingirem o valor zero.

Pode-se conjecturar, ainda a partir da última tabela que, para bases menores que 1 o fator de multiplicação da taxa de variação será negativo (o que é coerente, pois nesses casos a função precisa ser positiva e decrescente) e que entre as bases 2 e 3, deve existir uma base em que o fator de multiplicação da taxa de variação seja igual a 1. De fato,

h	$\frac{2,7^h - 1}{h}$	$\frac{2,71^h - 1}{h}$	$\frac{2,718^h - 1}{h}$	$\frac{2,7182^h - 1}{h}$	$\frac{2,61828^h - 1}{h}$
1	1,7	1,71	1,718	1,7182	1,71828
0,5	1,2863353	1,2924155	1,2972716	1,2973929	1,2974414
0,1	1,0442538	1,0483374	1,0515946	1,0516759	1,0517084
0,01	0,99820089	1,0019347	1,004912	1,0049863	1,005016
0,001	0,99374521	0,99744575	1,0003964	1,00047	1,0004995
0,0001	0,9933011	0,99699833	0,99994631	1,0000199	1,0000493
0,00001	0,99325671	0,9969536	0,99990131	0,9999749	1,0000043
0,000001	0,99325227	0,99694913	0,99989682	0,9999704	0,99999983

Essa base, é exatamente o número de Euler que vimos anteriormente.

A função $f(x) = e^x$ é, portanto, uma função real que em cada ponto o valor da função (posição) é igual a taxa de crescimento (velocidade).

As conjecturas acima são todas verdadeiras e as demonstrações poderão ser vistas em um curso de cálculo no nível superior, ao se estudar o conceito de derivada de uma função.

EXPLORANDO PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Progressões

Atividade 23

Sequências de números reais são usualmente denotadas por $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ e cada elemento é chamado de termo e está identificado de acordo com a sua posição na sequência. Por exemplo, o símbolo a_{37} representa o trigésimo sétimo número real na sequência considerada.

- a) Em cada item a seguir determine quais são os números que compõem a sequência:
- i) O primeiro termo é 10 e cada termo é igual ao anterior multiplicado por 3;
 - ii) $a_1 = 5$ e cada termo é 100% maior que o anterior;
 - iii) $a_1 = 4, a_2 = -a_1, a_3 = -a_2, \dots, a_{n+1} = -a_n$ para todo n natural;
 - iv) $a_5 = -100$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ para todo n natural;
 - v) $a_1 = 4, a_3 = 36$ e cada termo é igual ao anterior multiplicado por um valor constante;
 - vi) $a_1 = 8$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,4$ para todo n natural;
 - vii) $a_2 = 1000$ e cada termo é 20% menor que o anterior;
 - viii) $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = -3a_n$ para todo n natural;
 - ix) $a_1 = \sqrt{7}$ e $a_{n+1} = a_n$ para todo n natural.
- b) Que características têm em comum todas as sequências do item anterior?
- c) Quais delas apresentam crescimento ou decaimento exponencial? O que as diferencia das outras?

De 8 em 8 horas

Atividade 24

Você recebeu do médico a indicação de tomar o analgésico e antitérmico Paracetamol, 1 comprimido de 500mg, 3 vezes ao dia (de 8 em 8 horas) por 5 dias. Ao fazer uma pesquisa na internet você descobre que a meia-vida desse remédio é de 4 horas, isto é, que nesse intervalo de tempo, seu corpo consegue eliminar 50% da quantidade de Paracetamol presente no seu corpo.

- a) Qual a porcentagem da dose ingerida estará no seu corpo 8 horas após a primeira ingestão?
- b) Considerando que após 8 horas, uma nova dose igual a inicial será ingerida, qual a quantidade total da substância no seu sangue?
- c) Organize os valores em uma tabela, e descubra a quantidade de paracetamol no seu sangue ao final de 24 horas imediatamente antes de você tomar o novo comprimido.

Comprimido	Quant. presente (mg)	Nova dose (mg)	Total (mg)
1 (0h)	0	500	500
2 (8h)		500	
3 (16h)		500	
4 (24h)		500	

- d) Vamos generalizar: complete a tabela a seguir considerando a variável d para a dose e q para o fator de decaimento quaisquer.

Comprimido	Quant. presente (mg)	Nova dose (mg)	Total (mg)
1	0	d	d
2	dq	d	$d + dq$
3		d	
...	...	...	...
10		d	
...	...	...	...
n		d	

- e) Para saber a quantidade de substância no sangue logo após tomar o último comprimido sem precisar calcular todas as etapas, Matheus pensou da seguinte maneira:

O último comprimido é o 15º (3 por dia, durante 5 dias). Pelo que vi na última tabela, a quantidade total de substância no meu sangue logo após ingeri-lo pode ser expressa por

$$S = d + dq + dq^2 + \dots + dq^{14} + dq^{15}$$

Se deixar passar o mesmo intervalo de tempo que estava habituado terei no meu sangue

$$Sq = dq + dq^2 + dq^3 + \dots + dq^{15} + dq^{16}$$

E essas duas expressões têm quase todos os termos iguais! Se subtrair uma da outra, vou obter

$$S - Sq = d - dq^{16}$$

$$S(1 - q) = d(1 - q^{16})$$

$$S = \frac{d(1 - q^{16})}{1 - q}$$

Daí consigo calcular o valor de S , que era o que se desejava saber!

Utilize o raciocínio do Matheus e os dados do Paracetamol (itens a, b e c) para calcular a quantidade de substância no seu sangue ao ingerir o último comprimido.

PARA REFLETIR

Como adaptar o raciocínio do último item da atividade anterior para o vigésimo comprimido, usando as variáveis d e q ? E o caso geral: para o n -ésimo comprimido?

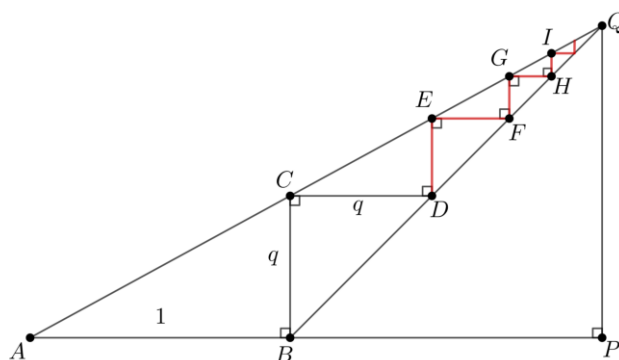
$$S = d + dq + dq^2 + \cdots + dq^n$$

Use a mesma ideia para responder o seguinte problema: Você recebe por e-mail uma proposta de trabalho. Uma empresa que oferece a seguinte forma de pagamento a seus funcionários: R\$ 0,10 pelo primeiro dia, R\$ 0,20 pelo segundo dia, R\$ 0,40 pelo terceiro dia e assim sucessivamente, dobrando a cada dia o valor do dia anterior. Você aceitaria a proposta ou deletaria o e-mail?

Escada Infinita

Atividade 25

Na figura abaixo, os ângulos indicados são retos, AB mede 1, $BC = CD = q < 1$.



- Calcule, em função de q , os comprimentos de DE , EF , FG , GH e HI .
- Quais são as sequências de segmentos cujas medidas formam progressões geométricas?
- Se a construção continuasse indefinidamente, quais seriam as medidas dos novos segmentos horizontais (paralelos a AP)? Que segmento da figura tem comprimento igual à soma de todos os (infinitos) segmentos horizontais?
- Por que podemos afirmar que $AP = PQ + 1$?
- Por que podemos afirmar que $PQ = q \cdot AP$?
- Conclua que a soma de todos os infinitos segmentos horizontais é igual a $\frac{1}{1-q}$.

ORGANIZANDO PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Sequências numéricas também são chamadas de progressões. Chamamos de **progressões geométricas (PG)** àquelas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um valor constante, chamado de **razão da progressão** (usualmente denotado pela letra q , de quociente).

A expressão que permite calcular qualquer termo a partir do primeiro (ou outro termo qualquer) e da razão é chamada de **termo geral** da progressão geométrica. Se uma PG tem primeiro termo a_1 e razão q , temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

Sequência	Primeiro termo	Razão	Termo geral	Gráfico
$\{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$	3	2	$a_{n+1} = 3 \cdot 2^n$	
$\{81, 27, 9, 3, 1, \dots\}$	81	$\frac{1}{3}$	$a_{n+1} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$	
$\{\pi, \pi\sqrt{2}, 2\pi, 2\pi\sqrt{2}, \dots\}$	π	$\sqrt{2}$	$a_{n+1} = \pi \cdot (\sqrt{2})^n$	
$\{1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots\}$	1	-2	$a_{n+1} = (-2)^n$	
$\{-1, -5, -25, -125, \dots\}$	-1	5	$a_{n+1} = -1 \cdot 5^n$	

Todas as sequências da atividade "Progressões" são progressões geométricas, mas apenas algumas delas apresentam comportamento exponencial conforme definimos no início deste capítulo. Especificamente, são aquelas que têm primeiro termo positivo e razão positiva e diferente de 1.

Na atividade "8 em 8 horas", vimos uma situação, normalmente estudada por uma área da Farmacologia chamada Farmacocinética (estudo das etapas vencidas pelos medicamentos nos

organismos), em que há interesse em se conhecer a soma dos termos consecutivos de uma progressão geométrica. Há diversas outras situações em que essa soma ganha uma interpretação interessante, e nos casos em que há decaimento (fator de multiplicação com valor absoluto menor que 1), podemos considerar a soma dos infinitos termos como um limite das somas de quantidades finitas.

- Se uma bola é largada de uma determinada altura e sempre quica de volta alcançando 80% da altura anterior, qual a distância total percorrida (para cima e para baixo) pela bola depois de 15 quiques?
- Qual o número total de nascimentos em um período de 20 anos em uma população que cresce a uma taxa percentual fixa?
- Qual o valor total de uma aplicação financeira que cresce a uma taxa mensal fixa, se todo mês for realizado um depósito igual ao valor inicial?

Apesar de podermos deduzir uma fórmula que nos dê a soma dos termos de uma Progressão Geométrica, queremos destacar que ela é de fácil dedução e a ideia pode ser reproduzida sempre que for preciso.

Para evitar discussões demasiadamente técnicas, vamos nos concentrar nos casos em que a razão é positiva e começaremos com um exemplo: vamos somar os termos da PG (8, 24, 72, ..., 1417176, 4251528). Trata-se de uma progressão de razão 3, isto é, cada termo é igual ao anterior multiplicado por 3. Chamemos de S a soma procurada:

$$S = 8 + 24 + 72 + \dots + 1417176 + 4251528$$

Agora, multiplicamos essa linha inteira pela razão, 3, e comparamos os termos,

$$3S = 24 + 72 + 216 + \dots + 4251528 + 12754584$$

Quase todos são iguais! Basta, então, subtrairmos a primeira igualdade da segunda

$$\begin{array}{rcl} 3S & = & \cancel{24} + \cancel{72} + \cancel{216} + \dots + \cancel{4251528} + 12754584 \\ -(S & = & 8 + \cancel{24} + \cancel{72} + \cancel{216} + \dots + \cancel{4251528} \\ \hline 2S & = & 12754584 - 8 \end{array}$$

O que nos leva a

$$S = \frac{12754576}{2} = 6377288.$$

Com essa ideia, é possível somar qualquer quantidade de termos consecutivos de uma progressão geométrica:

- Nomeia a soma e escreve suas parcelas;
- Multiplica tudo pela razão;
- Subtrai uma igualdade da outra cortando as parcelas iguais;

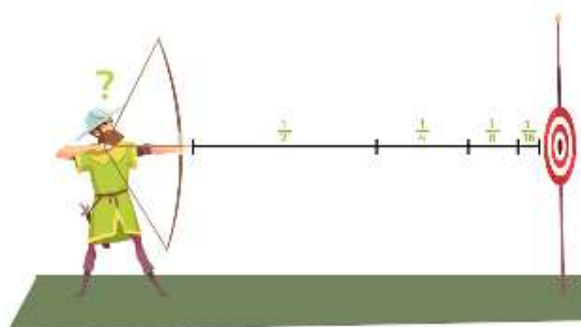
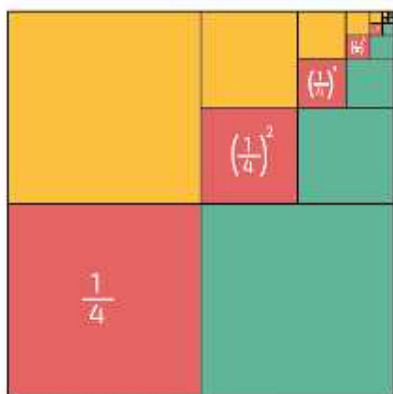
- Descubra o valor da soma.

E no caso de somas infinitas, como na atividade "Escada Infinita"? Primeiro, é importante observar que nem sempre é possível somar os infinitos termos de uma PG. Vejamos o caso em que a PG apresenta crescimento exponencial: considere $q > 1$ e a progressão infinita $(1, q, q^2, q^3, \dots)$. Cada um dos termos dessa progressão é maior que 1, então podemos dizer que

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n > 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

De forma que, a cada nova parcela acrescentada na soma faz com que ela cresça superando o próximo número natural. Assim, a soma dos infinitos termos da PG acaba por ser maior que qualquer número natural, isto é, a soma é infinita.

Resta-nos olhar o caso em que a razão está entre 0 e 1. Analise as figuras a seguir. Que identidades elas sugerem?



Ao se considerar uma razão positiva e menor que 1, estamos diante de um decaimento exponencial em que os termos da PG vão ficando rapidamente cada vez menores. Essa taxa de decaimento é suficiente para garantir que a soma dos infinitos termos será igual a um número real (e não infinita como no caso anterior). A forma como procedemos para encontrar a soma neste caso é igual à anterior: PG infinita decrescente de primeiro termo d e razão $q < 1$: $(d, dq, dq^2, dq^3, \dots)$

- Nomeamos a soma e escrevemos suas parcelas

$$S = d + dq + dq^2 + dq^3 + \dots$$

- Multiplicamos a igualdade toda pela razão q

$$Sq = dq + dq^2 + dq^3 + dq^4 + \dots$$

- Comparamos as igualdades e subtraímos uma da outra para cancelar os termos semelhantes

$$\begin{array}{rcl} S & = & d + \cancel{dq} + \cancel{dq^2} + \cancel{dq^3} + \dots \\ - (Sq & = & \cancel{dq} + \cancel{dq^2} + \cancel{dq^3} + \cancel{dq^4} + \dots) \\ \hline S - Sq & = & d \end{array}$$

- Encontramos uma expressão para a soma

$$\therefore S(1 - q) = d \iff S = \frac{d}{1 - q}.$$

Vejamos um exemplo:

Calcular o valor da soma

$$S = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

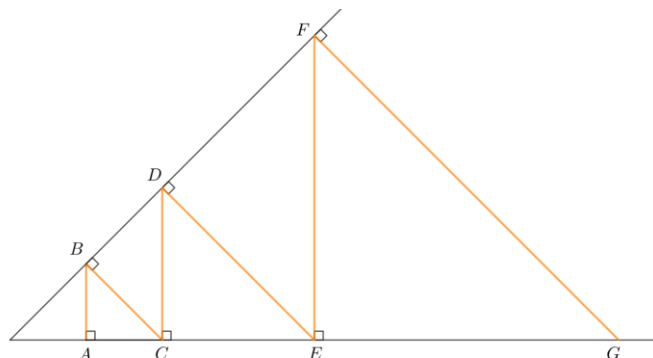
Procedimento	Fórmula
$ \begin{array}{rcl} S & = & 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots \\ - \left(\frac{S}{3} & = & \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots \right) \\ \hline \frac{2S}{3} & = & 4 \qquad \therefore S = 6 \end{array} $	$S = \left(\frac{4}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

PRATICANDO PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

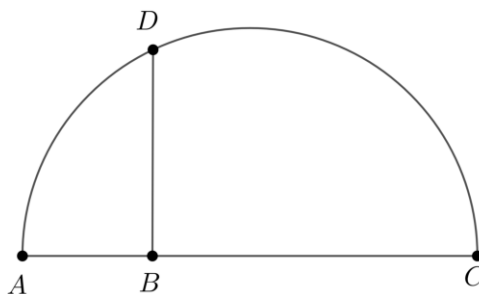
Na Geometria

Atividade 26

- a) Na figura abaixo, os ângulos indicados são retos e o segmento AB mede 1. Justifique a seguinte afirmação: "A sequência formada pelas medidas dos segmentos AB , BC , CD , DE , EF e FG , nesta ordem, é uma progressão geométrica crescente."



- b) Na figura abaixo, o arco AC é uma semicircunferência e o segmento BD é perpendicular ao diâmetro AC . Podemos afirmar que as medidas dos segmentos AB , BD e BC formam, nesta ordem, uma progressão geométrica? Porquê?



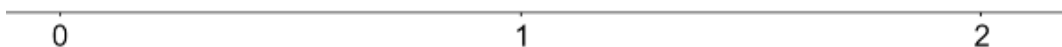
0,9999...

Atividade 27

O número $0,9999\dots$ é uma dízima periódica, ou seja, é um número que apresenta uma sequência infinita de algarismos decimais que se repetem. De um modo geral esses algarismos que se repetem - e que podem aparecer em grupos de um ou mais algarismos - ordenados sempre na mesma disposição é chamado de período da dízima. Uma outra notação muito utilizada consiste em pôr um traço sobre o período. Veja alguns exemplos:

$$0,333333 \dots = 0,\overline{3} \quad 0,142857142857 \dots = 0,\overline{142857} \quad 0,99999 \dots = 0,\overline{9}$$

- a) Posicione o número $0,\overline{9}$ na reta real abaixo.

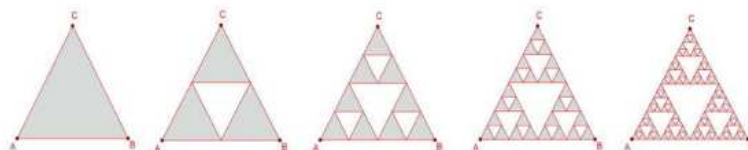


- b) Considere a progressão geométrica $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \dots)$. Trata-se de uma sequência crescente ou decrescente? Qual a razão dessa PG?
- c) Que relação que a PG tem com o número $0,\overline{9}$?
- d) É possível calcular a soma de todos os infinitos termos dessa progressão? Caso positivo, calcule.
- e) Você mudaria a resposta que deu no item (a)?

Triângulo de Sierpinski

Atividade 28

Considere a seguinte construção geométrica. A partir de um triângulo equilátero - nossa figura inicial - determinamos os pontos médios de cada um dos seus lados e unimos esses pontos dois a dois formando um novo triângulo equilátero central que é retirado. Obtemos assim a segunda figura da construção que está ilustrada abaixo.



Seguimos adiante com a construção repetindo esse mesmo processo para cada um dos triângulos equiláteros sombreados que aparecem na figura 2. Obtemos assim a terceira figura da imagem acima. Seguindo com este processo recursivo indefinidamente obtemos uma figura conhecida como triângulo de Sierpinski, ele faz parte de um conjunto de objetos matemáticos chamados de fractais. Leia mais sobre eles no *Você sabia* a seguir.

- a) Sem fazer contas, apenas olhando para o processo que descreve a construção do triângulo de Sierpinski, o que você diria sobre a área e o perímetro dele?
- b) Na tabela a seguir apresentamos os valores da área, do perímetro e da área esburacada da figura inicial e das duas primeiras iterações do processo de construção do triângulo de Sierpinski.

	Área	Perímetro	Área esburacada
Figura inicial	A	P	0
1ª Iteração	$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A$	$P_1 = \frac{3}{2} \cdot P$	$B_1 = \frac{1}{4} \cdot A$
2ª Iteração	$A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$	$P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P$	$B_2 = \frac{1}{4} \left[A + \frac{3}{4} \cdot A \right]$
3ª Iteração			
4ª Iteração			

Complete as linhas da tabela com os valores da área, do perímetro e da área esburacada para a terceira e quarta iteração.

- c) Generalize as expressões que você encontrou para a área, o perímetro e a área esburacada a fim de obter expressões que representem os valores esperados para a n -ésima iteração.
- d) Utilize a expressão para a área esburacada que você encontrou no item anterior para concluir que a área do triângulo de Sierpinski é zero.

VOCÊ SABIA?

Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão) e que apresentam auto similaridade, isto é, cada uma de suas partes menores são similares às partes maiores e por isso dizemos que estes objetos apresentam uma complexidade infinita. Seu estudo permite a representação de certos elementos naturais que possuem características irregulares, é o caso, por exemplo, de regiões costeiras, alguns vegetais e até mesmo algumas partes do nosso corpo, como o fundo do olho. O triângulo de Sierpinski que exploramos na atividade acima é também um fractal.

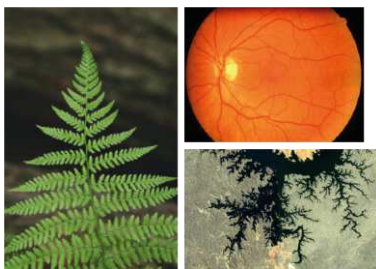


Figura 6.14: Fractais na natureza. Samambaia. Foto de Mike C. S. em Unsplash; Região do Egito Google Earth Fractals e Fundo do olho humano.

EXERCÍCIOS

- 1 (Enem 2009 caderno amarelo AR Questão 137) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

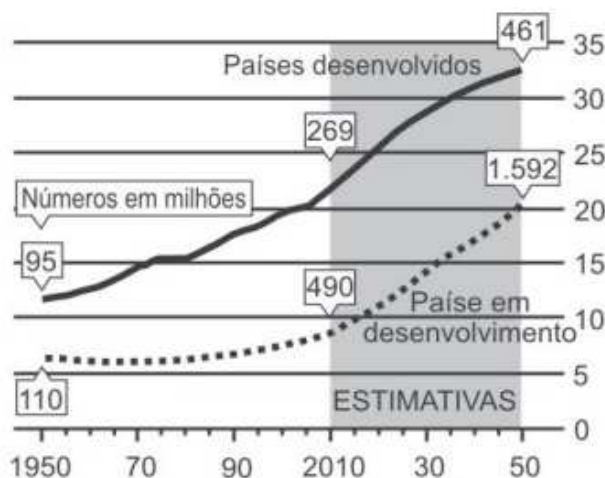


Figura 6.15:

Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009
Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado)

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x , seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

- 490 e 510 milhões.
- 550 e 620 milhões.
- 780 e 800 milhões.
- 810 e 860 milhões.
- 870 e 910 milhões.

- 2 (Enem 2011 caderno cinza PPL Questão 171) A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras.

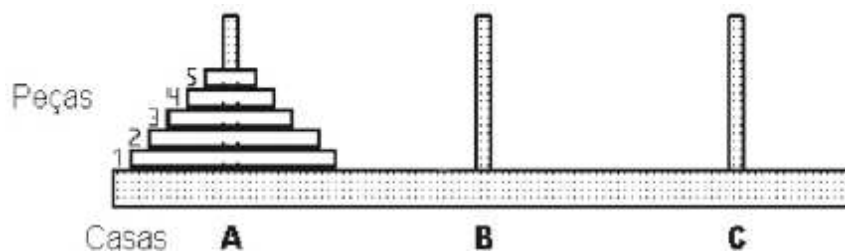


Figura 6.16:

As regras são: 1- um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor; 2- pode-se mover um único disco por vez; 3- um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento

Disponível em: <http://www.realidadevirtual.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Disponível em: <http://www.imeusp.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado)

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre (X) e (Y) é

- a) $Y = 2^x - 1$
- b) $Y = 2^{x-1}$
- c) $Y = 2^x$
- d) $Y = 2x - 1$
- e) $Y = 2x - 4$

- 3 (Enem 2013 caderno cinza PPL questão 176) Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

- a) Afim.
- b) Seno.
- c) Cosseno.
- d) Logarítmica crescente.
- e) Exponencial.

- 4 (Enem 2015 caderno amarela AR questão 159) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- a) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8.000$
- b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8.000$
- c) $P(t) = 4.000 \cdot t^{-1} + 8.000$
- d) $P(t) = 8.000 \cdot (0,5)^{t-1}$
- e) $P(t) = 8.000 \cdot (1,5)^{t-1}$

- 5 (Enem 2015 caderno cinza PPL questão 167) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com dois anos de tempo de serviço será, em reais,

- a) 7.416,00
- b) 3.819,24
- c) 3.709,62
- d) 3.708,00
- e) 1.909,62

- 6 (Enem 2016 caderno amarelo PPL questão 141) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$P(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $P(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 minutos, a população será

- a) Reduzida a um terço.
- b) Reduzida à metade.
- c) Reduzida a dois terços.
- d) Duplicada.
- e) Triplicada.

- 7 (Enem 2016 caderno amarelo PPL questão 174) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y .

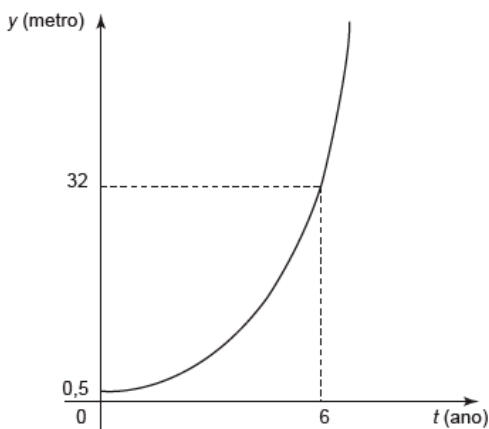
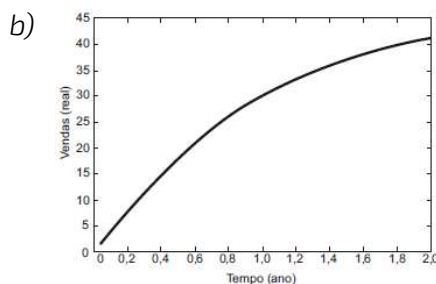
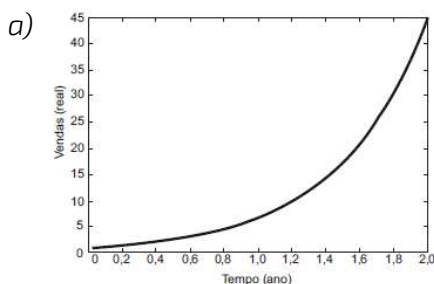
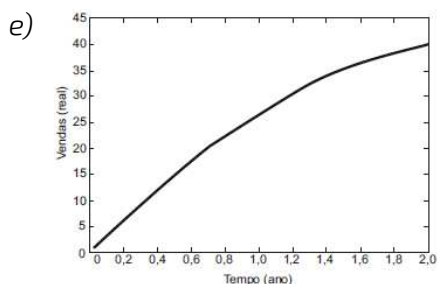
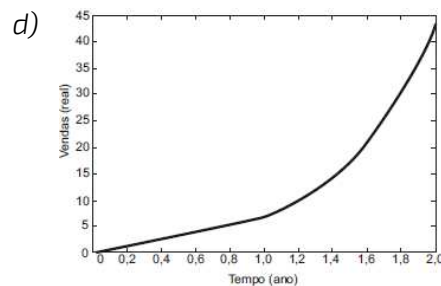
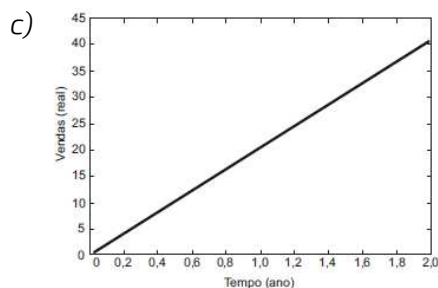


Figura 6.17:

Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 metros após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

- a) 3
 - b) 4
 - c) 6
 - d) $\log_2 7$
 - e) $\log_2 15$
- 8 (Enem 2017 caderno amarelo PPL questão 142) Ao abrir um negócio, um microempreendedor descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, o que fez suas vendas crescerem de modo exponencial. Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?





- 9 O decaimento radioativo do estrôncio 90 (Sr-90) é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, em que t é o tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de Sr-90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

- Determine o valor da constante b sabendo que a meia-vida do Sr-90 é de 29 anos (ou seja, a concentração de Sr-90 cai pela metade em 29 anos).
- Foram detectados 570 becquerels de Sr-90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, no Japão, em abril de 2011 (valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região). Determine qual será a concentração de Sr-90 depois de 100 anos.

- 10 A concentração de CO_2 na atmosfera vem sendo medida desde 1958 pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de CO_2 irá se manter constante nos próximos anos.

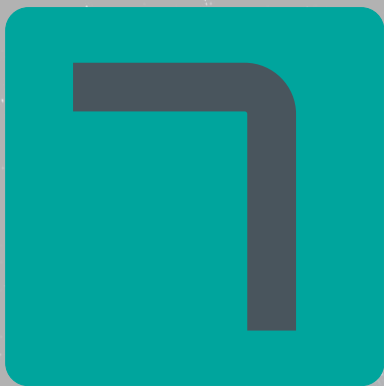
- Escreva uma função $C(t)$ que forneça a concentração de CO_2 na atmosfera em relação ao tempo t , dado em anos. Considere como instante inicial – ou seja, aquele em que $t = 0$ – o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO_2 na atmosfera.
- Determine a concentração de CO_2 em 2020.

- 11 O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t , o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-t/4} + T_{ext}$, em que T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21^\circ C$ e $T_{ext} = 30^\circ C$,

- escreva a expressão de $T(t)$ para esse problema;
- calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado.

Referências Bibliográficas

- Alagic, M. e Palenz, D. (2006). Explore linear and exponential growth: Spreadsheets as cognitive tools. *The Journal of Technology and Teacher Education*, 14:633–649.
- Bergsma, Y. (2019). Students' understanding of exponents and exponential functions at a secondary school in the northern netherlands. Dissertação de Mestrado, University of Groningen.
- Borges, W. A., Oliveira, M. H. P. d. e Dias, M. A. (2015). Limites de estudantes do 1º ano do ensino médio na resolução de atividade de potenciação. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(16).
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.
- Bush, S., Gibbons, K., Karp, K. e Dillon, F. (2015). Epidemics, exponential functions, and modeling. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 21.
- Davis, J. D. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(5):365–389.
- Ellis, A., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. e Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. *WISDOMe Monographs*, 2:93–112.
- Presmeg, N. e Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4:105–112.
- Seidel, R. (2007). *From principles of learning to strategies for instruction : with Workbook companion : a needs-based focus on high school adolescents*. Springer, New York, Estados Unidos.
- Silva, J. A. S. (2015). Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar. *Dissertação (Mestrado em Matemática)*.
- Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. *Second international conference on the teaching of mathematics*, páginas 1–10.
- Wu, H.-H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the American Mathematical Society*, 58(3):372–384.



Logaritmos e a Função Logarítmica

O QUÊ?

Conceito de logaritmo. Propriedades operacionais dos logaritmos. Função logarítmica. Gráfico da função logarítmica e sua relação com a função exponencial. Gráficos em escalas logarítmicas.

POR QUÊ?

Os logaritmos estão presentes em problemas de natureza exponencial sempre que a incógnita aparece no expoente. Esse tipo de questão é relevante em muitos problemas práticos como, por exemplo, para calcular em quanto tempo uma dívida no cartão de crédito dobrará seu valor.

Os logaritmos estão presentes na matemática financeira e também em questões técnicas de áreas do conhecimento como a física, a engenharia, a química e até as ciências da saúde, sendo utilizados, por exemplo, na escala Richter, nas definições de decibel e de PH, no decaimento radioativo, na datação por carbono 14 e na farmacologia.

Os logaritmos são também úteis sempre que dados de magnitudes muito distintas estão representadas em um mesmo gráfico ou quando crescimentos relativos são mais importantes do que os valores absolutos. Gráficos nessa escala são muito utilizados para avaliar a evolução de ações da bolsa de valores e em processos que cresçam exponencialmente, como na pandemia de Covid-19.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título: Logaritmos e a Função Logarítmica

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Márcio Rostirolla Adames (UTFPR)
Rose Elizangela Martins Pedrosa (SEED - PR)

Revisão: Wanderley Rezende (UFF)

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

Ilustrações: Miller Guglielmo

Gráficos: Márcio Rostirolla Adames

Capa: Foto de EduardoMSNeves (adaptada) no Wikimedia Commons
https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pedra_Azul_Milky_Way.jpg

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



No capítulo sobre a função exponencial você observou diversas situações em que uma quantidade cresce exponencialmente. Esse é o caso, por exemplo, de juros compostos, no qual o montante (ou a dívida) é multiplicado por $1 + i$ a cada período. Desse modo um capital de R\$ 1.000,00 crescerá, a uma taxa de 5% ao mês de acordo com a progressão a seguir.

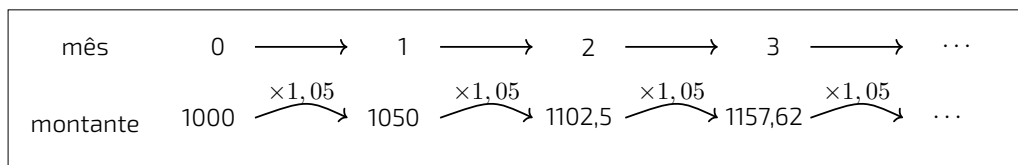


Figura 7.1: O crescimento com juros compostos.

Muitas vezes estamos interessados em saber quanto tempo, ou quantos períodos são necessários para que determinada quantia seja atingida. Na situação acima, por exemplo, quantos meses seriam necessários para atingirmos R\$ 1.102,5? Vemos na sequência de montantes, que seriam necessários dois meses para isso.

PARA REFLETIR

Para atingirmos R\$1.150,00 precisaríamos de quanto tempo? Por que não obtemos exatamente esse valor em 3 meses?

Utilize a tabela de potências a seguir nas atividades propostas. Por exemplo, na interseção da linha 2 com a coluna 5 está o número $2^5 = 32$.

Bases	Expoentes										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,01	1	1,01	1,0201	1,030	1,040	1,051	1,061	1,072	1,082	1,093	1,104
1,1	1	1,1	1,21	1,331	1,464	1,610	1,771	1,948	2,143	2,357	2,593
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Dívida no cartão

Atividade 1

Um pessoa tem uma dívida de R\$ 10.000,00 no cartão de crédito, que cobra juros de 10% ao mês. Se essa dívida não for amortizada, em quantos meses ela ultrapassará R\$ 15.000,00? E R\$ 20.000,00? E R\$ 25.000,00?

Bactérias no leite

Atividade 2

Determinada bactéria contamina um copo de leite à temperatura ambiente. Suponha que o leite seja considerado impróprio para o consumo se a população da bactéria no copo for maior ou igual a 16.200 indivíduos. A população de bactérias tem, inicialmente, 200 indivíduos e sua população triplica a cada hora até atingir 40.000 indivíduos. Em quanto tempo a população atingirá 16.200 indivíduos?

Economizando para uma viagem

Atividade 3

Rebeca recebeu de sua avó paterna uma herança em dinheiro no valor de R\$ 40.000,00. Ela pretende utilizar esse dinheiro para conhecer a Inglaterra e o pacote de viagens que ela deseja custa R\$ 44.000,00. Aplicando o valor da herança a juro de 1% ao mês, quantos meses levará Rebeca para conseguir o valor desejado e realizar seu sonho?

ORGANIZANDO LOGARITMOS

Problemas que envolvem a busca de expoentes, como os calculados nas atividades acima, aparecem com frequência em diversos contextos da matemática e suas aplicações. A esses expoentes damos o nome de logaritmos.

Por exemplo, 3 é o expoente ao qual precisamos elevar a base 2 para obter 8. Dizemos assim que o *logaritmo de 8 em base 2* é 3 e escrevemos $\log_2 8 = 3$. De modo geral definimos:

Definição Para dois números reais a e b positivos, o *logaritmo de a em base b* , que denotamos $\log_b a$, é o expoente ao qual a base b deve ser elevada para obtermos a . Assim, $c = \log_b a$ se, e somente se, $b^c = a$.

Quando escrevemos $c = \log_b a$, utilizamos os seguintes *nomes* para os números a , b e c .

- a é o *logaritmando*.
- b é a *base*.
- c é o *logaritmo*.

$$\log_b a = c$$

Nas atividades anteriores, estávamos interessados nos expoentes em que precisávamos elevar determinadas bases para encontrar alguns valores, ou seja, estávamos procurando determinados logaritmos. Você consegue identificar os logaritmos buscados nessas atividades e os valores encontrados?

EXEMPLO 1 Identificando os logaritmos

Na atividade "Dívida no cartão" temos os logaritmandos $a = 15000/10000 = 1,5$, $20000/10000 = 2$ e $25000/10000 = 2,5$, a base é sempre $b = 1,1$ e as aproximações encontradas na tabela para os logaritmos são $c = 5, 8$ e 10 , respectivamente:

$$\log_{1,1} 1,5 \approx 5,$$

$$\log_{1,1} 2 \approx 8,$$

$$\log_{1,1} 2,5 \approx 10.$$

Assim, o logaritmo $c = \log_b a$ é o expoente ao qual a base precisa ser elevada para obtermos o logaritmando, ou seja $b^{\log_b a} = a$.

Escrevendo os logaritmos

Atividade 4

Identifique nas atividades "Bactérias no leite" e "Economizando para uma viagem" os logaritmos, as bases e as aproximações de logaritmos encontradas na tabela como respostas e escreva-os utilizando a notação simbólica $\log_b a \approx c$.

Cuidado!!!

$\log_b a$ é um número, mas $\log_b$ não é. No entanto, para a base 10, existe a convenção de omitirmos a base. Desse modo que $\log 100$ significa $\log_{10} 100$ (que é igual a 2). De modo geral $\log a = \log_{10} a$.

Lei de Moore

Atividade 5

Na computação, a Lei de Moore estima como os computadores progridem. Ela prevê que a capacidade computacional dobra a cada 1,5 ano. Para simplificar nossos cálculos, vamos aproximá-la¹ por um crescimento de 10 vezes a cada 5 anos. Supondo que as previsões de Moore estejam corretas, utilize a notação de logaritmo para representar quantos quinquênios serão necessários para:

- a) a capacidade computacional aumentar 100 vezes,
- b) a capacidade computacional aumentar 1000 vezes.

Qual seria a sua estimativa para a quantidade de quinquênios necessários para a que capacidade computacional aumente 1100 vezes?

¹Em 5 anos há $3, \bar{3}$ períodos de 1,5 anos, então o crescimento seria de $2^{3, \bar{3}} \approx 10,07$, com duas casas decimais.

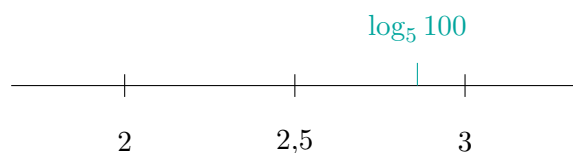
Nem toda base faz sentido

Logaritmos de base 1 não fazem sentido! Qual seria $\log_1 3$? Seria o expoente ao qual devemos elevar 1 para obter 3, mas $1^x = 1$ para qualquer número real x . Isso nos levará a excluir a base 1 quando enunciarmos os teoremas. Bases negativas também não são boas bases, pois suas exponenciais estão definidas somente para alguns valores, por exemplo $(-2)^2$ faz sentido enquanto $(-2)^{3/2}$ não faz, como estudado no capítulo *Função Exponencial*.

EXEMPLO 2 Estimando logaritmos

Nem sempre conseguimos calcular um logaritmo exatamente e precisamos aproximá-lo. Por exemplo sabemos que $\log_5 25 = 2$ e $\log_5 125 = 3$, porque $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$. Mas qual seria o valor de $\log_5 100$? Ou seja, qual o expoente que devemos elevar 5 para obtermos 100? Do nosso estudo das funções exponenciais, sabemos que 5^x é crescente (pois a base é maior do que 1). Como $25 < 100$, o expoente ao qual precisamos elevar 5 para obtermos 100 é maior do que 2, ou seja $\log_5 100 > 2$. De modo análogo, como $125 > 100$, temos $\log_5 100 < 3$.

Assim, sabemos que $2 < \log_5 100 < 3$.



Assim, a distância do $\log_5 100$ para 2 ou para 3 é menor do que 1 e poderíamos aproximá-lo por 2 ou 3 com erro menor do que 1. Poderíamos, também, aproximar $\log_5 100$ por 2,5 com erro menor do que 0,5.

PRATICANDO LOGARITMOS

Cálculos sem a calculadora

Atividade 6

Calcule exatamente ou encontre um número natural que aproxime, com erro menor do que 1, os seguintes logaritmos (justificando as suas respostas):

- | | |
|----------------------|------------------|
| a) $\log_2 8$; | d) $\log_2 10$; |
| b) $\log_{1/2} 32$; | e) $\log 113$; |
| c) $\log 1000$; | f) $\log_3 30$. |

Calcular logaritmos manualmente pode ser muito laborioso, por isso utiliza-se, preferencialmente, ferramentas digitais. Utilize o applet do GeoGebra¹ acessível em <https://www.geogebra.org/classic/ug8fmvtc> ou no QR code abaixo, para realizar os cálculos abaixo.

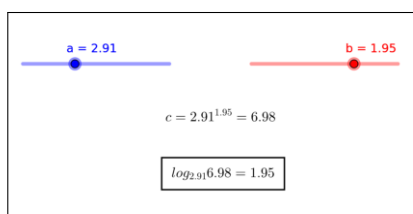


Figura 7.2: Ilustração do applet e QR code.

¹Pode ser necessário utilizar o celular deitado para que apareçam os controles deslizantes.

Cálculos com ferramentas computacionais

Atividade 7

No applet do GeoGebra, mova os controles deslizantes das variáveis “a” e “b” e encontre um valor aproximado (com até duas casas decimais) para:

- a) $\log_{1,41} 4$;
- b) $\log_{2,71} 4$;
- c) $\log_2 5$;
- d) $\log_4 7$;
- e) $\log_{2,71} 9$;
- f) $\log_3 7$.

Se não tiver acesso ao applet, as atividades podem ser resolvidas utilizando a tabela² a seguir.

Logaritmando										
Base	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,41	0	2,02	3,2	4,03	4,68	5,21	5,66	6,05	6,34	6,7
2	0	1	1,58	2	2,32	2,58	2,81	3	3,17	3,32
2,71	0	0,7	1,1	1,39	1,61	1,8	1,95	2,09	2,2	2,31
3	0	0,63	1	1,26	1,46	1,63	1,77	1,89	2	2,1
4	0	0,5	0,79	1	1,16	1,29	1,4	1,5	1,58	1,66

Tabela 7.1: Logaritmos nas bases 1,41; 2; 2,71; 3 e 4

EXERCÍCIOS

1 Calcule, usando a definição, os seguintes logaritmos:

- a) $\log_2 64$;
- b) $\log_3 27$;
- c) $\log_3 81$;
- d) $\log_{1/5} 625$;
- e) $\log 0,0001$;
- f) $\log_{27} 243$;
- g) $\log_{1/4} 32$.

2 Identifique, em cada caso, se x é a base, o logaritmo ou o logaritmando e utilize o applet do geogebra ou a [tabela 7.1](#) para encontrar o valor de x :

- a) $\log_x 10 = 2,31$;
- b) $\log_{2,71} x = 2,09$;
- c) $\log_x 8 = 6,05$;
- d) $\log_3 5 = x$;

²Utilizamos as bases 1,41 pois elas aproximam $\sqrt{2} \approx 1,41$ e $e \approx 2,71$, que podem ser interessantes em outros problemas.

$$e) \log_{2,71} 1 = x;$$

$$f) \log_2 x = 2,58.$$

Se não tiver acesso ao applet, as atividades seguintes podem ser resolvidas utilizando a tabela seguinte.

Expoentes									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0035	1,007	1,0105	1,014	1,0176	1,0211	1,0247	1,0283	1,0319	1,035
1,03	1,06	1,092	1,125	1,159	1,194	1,229	1,266	1,304	1,343
1,14	1,299	1,481	1,688	1,925	2,194	2,502	2,852	3,251	3,707

Tabela 7.2: Potências de 1,0035; 1,03 e 1,14

- 3 A poupança é o tipo de investimento mais popular no Brasil. Esse tipo de aplicação tem baixo rendimento, contudo não oferece riscos. Em 2019 o rendimento da poupança atingiu a média de 0,35% ao mês. Um investidor que aplicou R\$5000,00 na poupança, à taxa de juros compostos de 0,35% ao mês, obteve um montante de R\$5141,72. Por quanto tempo esse dinheiro esteve investido?
- 4 A taxa média de juros do rotativo do cartão no Brasil é de 352,76% ao ano, que é aproximadamente de 14% ao mês, uma das taxas mais elevadas no mundo, segundo levantamento da Proteste para o ano de 2018. Para se ter um comparativo, ainda de acordo com a Proteste, o percentual de juros do crédito anual na Argentina é de 47,40%, que é aproximadamente 3% ao mês.
Uma pessoa que devia R\$1.200,00 no cartão de crédito, com uma taxa de 14% ao mês, ficou impossibilitada de pagar sua fatura até o valor da dívida ficar em R\$2.310,50. Quanto tempo ela ficou sem pagar a fatura? Se a dívida tivesse a taxa média da Argentina, de 3% ao mês, a que valor ela chegaria no mesmo período?

Existem algumas propriedades que auxiliam na resolução de problemas envolvendo logaritmos. Uma dessas propriedades é chamada de logaritmo do produto e estudaremos ela a seguir. Vamos explorar os valores dos logaritmos e buscar relações entre eles.

Iniciamos utilizando a tabela de potências racionais de 2 a seguir para buscar padrões nos logaritmos de base 2. Os expoentes são aproximações dos logaritmos dos naturais na coluna ao lado, com erro menor do que 0,01.

$2^{\log_2 n}$	n	$2^{\log_2 n}$	n	$2^{\log_2 n}$	n
2^0	1	$2^{3,46}$	11	$2^{4,39}$	21
2^1	2	$2^{3,58}$	12	$2^{4,46}$	22
$2^{1,58}$	3	$2^{3,7}$	13	$2^{4,52}$	23
2^2	4	$2^{3,81}$	14	$2^{4,58}$	24
$2^{2,32}$	5	$2^{3,9}$	15	$2^{4,64}$	25
$2^{2,58}$	6	2^4	16	$2^{4,7}$	26
$2^{2,81}$	7	$2^{4,08}$	17	$2^{4,75}$	27
2^3	8	$2^{4,16}$	18	$2^{4,81}$	28
$2^{3,16}$	9	$2^{4,24}$	19	$2^{4,85}$	29
$2^{3,32}$	10	$2^{4,32}$	20	$2^{4,9}$	30

Tabela 7.3: Expoentes de 2 aproximando os naturais de 1 a 30

Relações entre os logaritmos

Atividade 8

Utilize a [tabela 7.3](#) para encontrar os valores (aproximados) dos seguintes logaritmos em seu caderno:

- $\log_2 2$, $\log_2 4$, $\log_2 8$ e $\log_2 16$.
- $\log_2 3$, $\log_2 6$, $\log_2 12$ e $\log_2 24$.
- $\log_2 3$, $\log_2 5$ e $\log_2 15$.

PARA REFLETIR

No item a), podemos observar que $\log_2 4$ é 1 a mais do que $\log_2 2$. Você percebe algum padrão nos valores encontrados nos outros itens da atividade *Relações entre os logaritmos*?

Escreva uma expressão matemática que indique o padrão observado. Dica: procure escrever $\log_2 ab$ em termos de $\log_2 a$ e $\log_2 b$.

Use a [tabela 7.3](#) para criar novos exemplos e conferir se a expressão que você escreveu continua valendo para esses novos valores.

Desenvolvimento bacteriano

Atividade 9

Uma espécie de bactéria dobra a população a cada dia e uma cultura tem 100 indivíduos inicialmente. Sabendo que $2^5 = 32$ e $2^6 = 64$, vamos estimar quantos dias levará para que a população:

- a) Chegue a 3200?
- b) Chegue a 6400?
- c) Chegue a $204800 = 6400 \times 32$?
- d) Chegue a $6553600 = 204800 \times 32$?

ORGANIZANDO LOGARITMO DO PRODUTO

Observamos nas atividades anteriores, que se conhecemos os logaritmos de dois números e queremos calcular o logaritmo do produto deles, basta somar os logaritmos dos dois primeiros números e teremos o logaritmo do produto deles, ou seja:

Teorema do logaritmo do produto. Dados números reais positivos a, b e c , com $a \neq 1$, temos

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração. O logaritmo de bc em base a é, por definição, o expoente ao qual devemos elevar a para obter bc . Assim, basta mostrarmos que $a^{\log_a b + \log_a c} = bc$, o que pode ser calculado lembrando que $a^{\log_a b} = b$ e $a^{\log_a c} = c$:

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \times a^{\log_a c} = bc,$$

onde utilizamos a propriedade da exponencial que $a^{x+y} = a^x \times a^y$. □

Cuidado!!!

Um erro comum envolvendo logaritmos é assumir uma espécie de distributividade para eles, que não existe. Ressaltamos que, em geral,

$$\log_a b + \log_a c \neq \log_a(b + c),$$

e a propriedade correta é

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc).$$

Essa equação também mostra que, em geral,

$$\log_a(bc) \neq \log_a b \log_a c.$$

Teorema do logaritmo do quociente. Dados números reais positivos a, b e c , com $a \neq 1$, temos

$$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração. O logaritmo de b/c em base a é, por definição, o expoente ao qual devemos elevar a para obter b/c . Assim, basta mostrarmos que $a^{\log_a b - \log_a c} = b/c$, o que pode ser calculado lembrando que $a^{\log_a b} = b$ e $a^{\log_a c} = c$:

$$a^{\log_a b - \log_a c} = a^{\log_a b} \times a^{-\log_a c} = a^{\log_a b} \times 1/a^{\log_a c} = b/c,$$

onde utilizamos a propriedade da exponencial que $a^{x-y} = a^x \times a^{-y}$ e o fato que $a^{-y} = 1/a^y$. $\square$

Cuidado!!!

Um erro comum envolvendo logaritmos é assumir uma espécie de distributividade para eles, que não existe. Ressaltamos que, em geral,

$$\log_a b - \log_a c \neq \log_a (b - c),$$

e a propriedade correta é

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c).$$

Essa equação também mostra que, em geral,

$$\log_a (b/c) \neq \log_a b / \log_a c.$$

EXEMPLO 3 Valores além da tabela

Qualquer tabela será limitada, mas podemos utilizar as propriedades dos logaritmos de valores que estão além da tabela. Por exemplo, utilizando a [tabela 7.3](#), podemos calcular (aproximações) de logaritmos de números maiores que os tabelados:

$$\log_2 300 = \log_2 15 \times 20 = \log_2 15 + \log_2 20 \approx 3,9 + 4,32 = 8,22;$$

ou números fracionários:

$$\log_2 3,5 = \log_2 (7/2) = \log_2 7 - \log_2 2 \approx 2,81 - 1 = 1,81.$$

Além da tabela

Atividade 10

Utilize a [tabela 7.3](#) para encontrar os valores dos seguintes logaritmos:

- a) $\log_2 64$;
- b) $\log_2 48$;
- c) $\log_2 60$;
- d) $\log_2 (3/2)$;
- e) $\log_2 (600/1024)$.

PARA REFLETIR

Utilizando a propriedade do logaritmo do produto, você consegue inferir alguma fórmula para calcular o valor de $\log_a b^n$, para $n \in \mathbb{N}$? Vamos buscar um padrão calculando alguns exemplos, como $\log 100$, $\log 100^2$ e $\log 100^3$?

Não apenas para a base 10, mas para qualquer base $a > 0$, $a \neq 1$, logaritmando $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\log_a b^n = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b}_{n \text{ vezes}} = n \log_a b.$$

EXEMPLO 4 Casas decimais

Vemos imediatamente, com a propriedade, que $\log 10^n = n$ e podemos usar isso para estimar logaritmos em base 10 com erro menor do que 1 facilmente. Para estimar $\log 378$ podemos perceber que $10^2 = 100 < 378 < 1000 = 10^3$ e, como a função exponencial de base 10 é crescente, temos

$$2 < \log 378 < 3,$$

e podemos dizer que a parte inteira do $\log 378$ é dois, ou seja $\log 378 = 2, \dots$

Ordens de grandeza

Atividade 11

Encontre potências de 10 consecutivas que limitem os logaritmandos abaixo superiormente e inferiormente e use-as para encontrar a parte inteira de:

- a) $\log 6,7$;
- b) $\log 23$;
- c) $\log 179,28$;
- d) $\log 8341$.

VOCÊ SABIA?

A **ordem de grandeza** de um determinado valor é o expoente de dez na notação científica daquele valor e pode ser calculada pela parte inteira do logaritmo daquele número em base 10. Por exemplo o Mol, na química, é o número de átomos contidos em 0,012 quilograma de carbono-12 e seu valor é

$$6,02214076 \times 10^{23},$$

assim, a ordem de grandeza do Mol é 23, que é a parte inteira de

$$\log 6022140760000000000000000 \approx 23,7798,$$

com 4 casas decimais de precisão.

Na atividade "Ordens de grandeza", utilizamos a propriedade do logaritmo de uma potência inteira, mas é possível observarmos que essa propriedade vale para expoentes reais quaisquer, e isso será fundamental nas aplicações:

Teorema do logaritmo da potência Dados números reais positivos a, b , com $a \neq 1$, e um número real qualquer t , temos

$$\log_a b^t = t \log_a b.$$

Demonstração. O logaritmo de b^t em base a é, por definição, o expoente ao qual devemos elevar a para obter b^t . Assim, basta mostrarmos que $a^{t \log_a b} = b^t$, o que pode ser calculado lembrando que $a^{\log_a b} = b$:

$$a^{t \log_a b} = (a^{\log_a b})^t = b^t,$$

onde utilizamos a propriedade da exponencial que $a^{tx} = (a^x)^t$. □

A propriedade do logaritmo da potência é muito utilizada na resolução de problemas envolvendo logaritmos. Podemos aplicar o logaritmo dos dois lados de uma equação para obter uma equação linear em t , que pode ser facilmente resolvida. Por exemplo, para encontrar t na equação

$$3^t = 20,$$

podemos calcular algum logaritmo, por exemplo em base 10, para obter

$$\begin{aligned} t \log 3 &= \log 20 \\ \Rightarrow t &= \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,7268, \end{aligned}$$

onde utilizamos a aproximação fornecida pela calculadora.

EXEMPLO 5 Crescimento populacional

Em uma determinada cidade a taxa de crescimento populacional é de 7% ao ano, aproximadamente. Vamos utilizar as aproximações com duas casas decimais de precisão $\log 2 = 0,30$; $\log 1,07 = 0,03$ para determinar em quanto tempo a população da cidade dobrará. Denotamos:

População do ano-base: P_0 .

População após um ano: $P_1 = P_0 \times (1,07)$.

População após dois anos: $P_2 = P_0 \times (1,07)^2$.

População após t anos $P_t = P_0 \times (1,07)^t$.

E utilizamos o teorema do logaritmo da potência para descobrir para que valor t obtemos o dobro da população:

$$P_t = P_0 \times (1,07)^t = 2P_0$$

$$\Rightarrow (1,07)^t = 2$$

$$\Rightarrow \log((1,07)^t) = \log 2$$

$$\Rightarrow t \log(1,07) = \log 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log(1,07)} \approx \frac{0,3}{0,03} = 10.$$

Então a cidade levaria aproximadamente 10 anos para dobrar a população.

- 1 Dados $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, use as propriedades operatórias dos logaritmos para determinar:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| a) $\log 6$; | f) $\log(2/3)$; |
| b) $\log 12$; | g) $\log 3,2$; |
| c) $\log 18$; | h) $\log 0,81$; |
| d) $\log 30$; | i) $\log 0,002$. |
| e) $\log 1,5$; | |

- 2 (IMED/2015) Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função $B(t) = 10 \times 3^{t-1}$, em que $B(t)$ expressa a quantidade de bactérias e t representa o tempo em horas³. Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

- | | |
|------|------|
| a) 1 | d) 4 |
| b) 2 | |
| c) 3 | e) 5 |

- 3 (UFESM/2013) Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,75 bilhões de dólares. Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t (em anos), por $V = 6,75 \times (1,05)^{t-1}$ com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Em que ano o valor movimentado será igual a 13,5 bilhões de dólares? Dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 1,05 = 0,02$.

- 4 (UERJ-2003) Jorge quer vender seu carro por R\$ 40.000,00. Pedro, para comprá-lo, dispõe de R\$ 5.000,00, e aplica esse valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28% a cada dois anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada dois anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$. Devemos calcular o montante utilizando a valorização do dinheiro aplicado e a desvalorização do carro. Devemos descobrir quanto tempo levará para que os montantes sejam iguais; para isso, façamos então o cálculo de cada montante.

Dinheiro aplicado

$$Md = 5000(1 + 0,28)^{t/2}$$

Desvalorização do carro

$$Mc = 40000(1 - 0,19)^{t/2}$$

³A expressão faz sentido apenas para os valores naturais $10 \times 3^{t-1}$ e deve ser entendida como uma aproximação para o número de indivíduos.

- 5 Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional à quantidade presente no corpo. Suponha uma superdose de determinado medicamento é de 750mg . A quantidade Q desse princípio ativo que continua presente no organismo t horas após a ingestão é dada pela expressão $Q(t) = 750 \times (0,6)^t$. Usando $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, é possível obter o tempo necessário para que a quantidade dessa droga presente no corpo do paciente seja menor que 150mg .
- 6 (Matemática financeira - Acessibilidade) O Governo Federal através do MEC criou o "Programa Escola Acessível", que disponibiliza recursos financeiros para escolas selecionadas com o objetivo de promover condições de acessibilidade ao ambiente físico, aos recursos didáticos e pedagógicos e à comunicação e informação nas escolas públicas de ensino regular. O Programa disponibiliza recursos, por meio do Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE), às escolas contempladas pelo Programa Implantação de Salas de Recursos Multifuncionais. No âmbito deste programa são financiáveis as seguintes ações: (a) adequação arquitetônica: rampas, sanitários, vias de acesso, instalação de corrimão e de sinalização visual, tátil e sonora; (b) aquisição de cadeiras de rodas, recursos de tecnologia assistiva, bebedouros e mobiliários acessíveis. No ano de 2014 uma escola contemplada por esse programa recebeu uma verba de 10 mil reais. Um orçamento feito pela direção da escola constatou que para fazer todas as adaptações necessárias para garantir a acessibilidade na escola seria necessário um valor aproximado de 12500 reais. Considerando que essa verba está aplicada a juros compostos de 1% ao mês, quantos meses, no mínimo, seriam necessários para que o montante da aplicação atingisse o valor necessário para a reforma? Dados $\log 5 = 0,7$ e $\log 101 = 2,004$.
- 7 (UFRGS/2009) Após tomar dois cálices de vinho, um motorista verificou que o índice de álcool⁴ em seu sangue era de $0,5\text{g/l}$. Ele foi informado que esse índice decresceria de acordo com a seguinte igualdade: $l(t) = K \times 2^{-t}$ (onde K = índice constatado quando foi feita a medida; t = tempo, medido em horas, a partir do momento dessa medida.) Sabendo que o limite do índice permitido pela lei seca é de $0,2\text{g/l}$, para dirigir mantendo-se dentro da lei, o motorista deverá esperar, pelo menos, (use 0,3 para $\log 2$)
- a) 50 min;
 - b) 1 h;
 - c) 1 h 20 min;
 - d) 1 h 30 min;
 - e) 2h.

⁴Possivelmente vindo em uma tabela que leva em conta seu peso e idade.

Funções exponenciais modelam diversas situações que podem influenciar na vida de todos nós. Por exemplo, é bem conhecido na medicina que, muitas vezes, o número de infectados, $I(t)$, por uma nova doença infecciosa cresce exponencialmente em seus estágios iniciais⁵, como pode ser observado nos dados da Covid-19 para o Brasil:

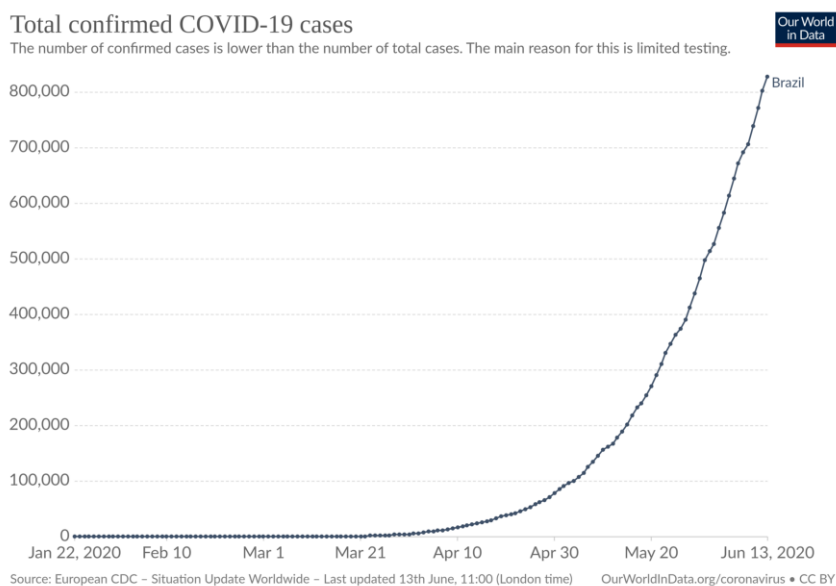


Figura 7.3: Número total de casos confirmados
Fonte: *Our World in Data* (ourworldindata.org)

O crescimento exponencial pode ser modelado pela equação:

$$I(t) = a(1 + b)^t,$$

onde a constante a representa a quantidade de doentes no momento em que se inicia o acompanhamento, pois $I(0) = a$. A constante $b > 0$ é a taxa de crescimento por unidade de tempo e depende de vários fatores.

Aplicar o logaritmo nos dois lados de uma equação nos permite resolver diversos problemas envolvendo equações exponenciais, transformando-as em equações lineares graças à propriedade do logaritmo da potência. Contudo, podemos escolher a base do logaritmo, o que nos leva ao mesmo resultado de maneiras distintas. Vamos observar isso no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6 Uma doença infecciosa

Vamos supor que um grupo de 10 pessoas tenha chegado à cidade de São Paulo portando uma nova doença extremamente infecciosa. Suponha que a taxa de crescimento da doença é de 50% ao dia sem que nenhuma medida contenção seja aplicada. Vamos calcular quantos dias levará para que a doença ultrapasse 2000 pessoas utilizando logaritmos em bases distintas:

⁵Ressaltamos que esse modelo não é adequado quando o número de infectados é parte significativa da população.

Calculando com base 10:

$$\begin{aligned} 10 \times 1,5^t &= 2000 \\ \Rightarrow t \log 1,5 &= \log 200 \\ \Rightarrow t &= \frac{\log 200}{\log 1,5} = \frac{2,301029995664}{0,17609125905568} \approx 13,0672584658868, \end{aligned}$$

onde utilizamos como aproximação os valores apresentados por uma calculadora científica.

Calculando com base 1,5:

$$\begin{aligned} 10 \times 1,5^t &= 2000 \\ \Rightarrow t \log_{1,5} 1,5 &= \log_{1,5} 200 \\ \Rightarrow t &= \log_{1,5} 200 \approx 13,067258465887, \end{aligned}$$

onde utilizamos como aproximação os valores apresentados pela calculadora.

Assim, apenas no 14º dia, mais de 2000 pessoas estariam doentes.

As duas maneiras de resolver estão corretas e a calculadora mostrou o mesmo resultado para t (o último algarismo está diferente, por que estamos trabalhando com aproximações e não com os números exatos). Não poderia ser diferente, pois estamos encontrando o mesmo t . Isso nos indica que

$$\log_{1,5} 200 = \frac{\log 200}{\log 1,5}.$$

Resolvendo com bases distintas

Atividade 12

Vamos supor que um grupo de 10 pessoas tenha chegado à cidade de São Paulo portando uma nova variedade de uma doença extremamente infecciosa. Suponha que a taxa de crescimento da doença é de 100% ao dia sem que nenhuma medida contenção seja aplicada. Vamos calcular quantos dias levará para que a doença ultrapasse 2000 pessoas utilizando logaritmos em base 10 e em base 2. Utilize as aproximações $\log 2 = 0,3$ e $\log_2 10 = 3,33$.

PARA REFLETIR

Com base no exemplo e na atividade acima, você conseguiria imaginar (fazer uma hipótese) algum modo de calcular $\log_2 200$ utilizando apenas logaritmos em base 10?

Os cálculos realizados nas atividades acima indicam uma propriedade que é válida em um contexto mais geral: a mudança de base (para logaritmos).

ORGANIZANDO MUDANÇA DE BASE

Teorema [da mudança de base.] Dados números reais positivos a, b e c , com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, temos

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

Demonstração. O logaritmo de b em base c é, por definição, o expoente ao qual devemos elevar c para obter b . Assim, basta mostrarmos que $c^{\log_a b / \log_a c} = b$, o que pode ser calculado lembrando que $a^{\log_a c} = c$:

$$c^{\log_a b / \log_a c} = (a^{\log_a c})^{\log_a b / \log_a c} = a^{(\log_a c) \log_a b / \log_a c} = a^{\log_a b} = b,$$

onde utilizamos a propriedade da exponencial que $(a^x)^{y/x} = a^{xy/x}$. □

Logaritmos com mudança de base

Atividade 13

Determine o valor dos logaritmos abaixo, sabendo que $\log 2 = 0,301$, $\log 3 = 0,477$ e $\log 7 = 0,845$:

- a) $\log_3 7$;
- b) $\log_7 21$;
- c) $\log_9 16$.

Com a calculadora

A propriedade da mudança de base é fundamental para calcularmos logaritmos efetivamente, pois a grande maioria das calculadoras e softwares **não calcula logaritmos em qualquer base**, mas somente em base 10 ou base e (que estudaremos posteriormente). Assim, para calcular logaritmos de outras bases com a calculadora, precisamos utilizar o teorema da mudança de base, por exemplo:

$$\log_3 25 = \frac{\log 25}{\log 3} \approx \frac{1,397940008672}{0,4771212547197} \approx 2,9299470414356$$

Com a calculadora

Atividade 14

Utilize uma calculadora ou aplicativo de celular para calcular:

- a) $\log_2 375$;
- b) $\log_7 698$;
- c) $\log_{2,71} 166$.

EXERCÍCIOS

Assim, o proprietário ficou com o veículo por dois anos.

- 1 **(Fuvest)** Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:
- 2 Utilizando as aproximações $\log_{10} 2 = 0,301$ e $\log_{10} 3 = 0,477$, calcule o valor de $\log_9 128$.
- 3 Um montante de R\$3.359,79 foi obtido de uma aplicação de R\$2.500,00, que foi aplicada por um determinado número (inteiro) de meses, a uma taxa de juros compostos de 3% ao mês. Não foram efetuados outros depósitos no período. Escreva, usando logaritmos, uma fórmula que permite calcular o tempo em que esse capital ficou aplicado, em seguida, calcule esse tempo utilizando uma calculadora.
- 4 Um veículo que foi adquirido por R\$40.000,00 sofre taxa de depreciação de 20% ao ano. Depois de um determinado tempo o dono quis vender o carro e verificou que depois desse tempo o veículo tinha um valor de R\$25.600,00. Escreva, usando logaritmos, a fórmula que permite calcular depois de quanto tempo o carro estava sendo vendido, em seguida, calcule esse tempo.

A audição é o sentido que nos faz perceber ondas de pressão no ar, chamadas de ondas acústicas. A intensidade sonora dessas ondas mede quanta energia a onda é capaz de transmitir e a unidade frequentemente utilizada é o *watt por metro quadrado* W/m^2 . Quanto maior a potência, mais alto percebemos o som; mas a nossa percepção do aumento do som depende do som já presente no ambiente. Por exemplo uma pessoa falando em uma sala quieta pode parecer bastante alto, enquanto a mesma pessoa falando em um show de rock não faz diferença alguma.

Para lidarmos com o modo como percebemos o som e a potência das ondas sonoras, utilizamos uma unidade chamada de **decibel (dB)** que mede o *nível sonoro* dos sons em relação a o limiar da audição humana. Observe a [tabela 7.4](#) com diferentes sons, seus níveis sonoros em decibéis, suas intensidades sonoras em W/m^2 e percepções ao ouvido humano

Fonte do som	Nível (dB)	Intensidade (W/m^2)	Percepção
Arma de fogo próxima ao ouvido	130	10	Dor
Avião decolando	120	1	Desconforto
Perfuratriz pneumática	110	10^{-1}	Muito alto
Sirene	100	10^{-2}	
Buzina alta	90	10^{-3}	Alto
Porta batendo	80	10^{-4}	
Rua com tráfego pesado	70	10^{-5}	Barulhento
Conversa animada	60	10^{-6}	
Conversa normal	50	10^{-6}	Moderado
Rádio volume baixo	40	10^{-8}	Quieto
Noite tranquila no campo	30	10^{-9}	
Sala quieta	20	10^{-10}	Muito quieto
Sussurrar da folhas	10	10^{-11}	
Limiar da audição	0	10^{-12}	

Tabela 7.4: Níveis sonoros e intensidades sonoras. Fonte: Adaptado de um artigo de [EEWeb.com](#) por Andrew Carter

PARA REFLETIR

A percepção da altura de um som é subjetiva e depende da distância da fonte emissora, que não está escrita na tabela. Levando isso em consideração, você concorda com as percepções da coluna da direita?

Notamos que o nível sonoro (em dB) diminui de 10 em 10 para os valores tabelados. E a intensidade sonora, como ela varia entre os diferentes níveis?

A intensidade sonora é multiplicada por 10 quando soma-se 10 ao nível sonoro. Isso quer dizer que o decibel mede quantas ordens de magnitude a intensidade do som está em relação ao limiar da audição humana e multiplica o número de ordens de magnitude por 10. Isso apreende o fato de ser necessária uma mudança drástica na intensidade para *percebermos* uma mudança no nível do som. Por exemplo uma pessoa falando à altura de $50db$ em um show de rock à altura $110db$ não muda a percepção de barulho.

O decibel (dB)

O **decibel (dB)** é uma unidade logarítmica utilizada para medir o nível sonoro. Toma-se como referência o menor som audível ao ouvido humano I_0 (que é considerado com intensidade sonora de $10^{-12} \text{ watts}/\text{m}^2$) e o decibel indica quantas ordens de grandeza uma onda sonora tem em relação à onda de referência através da expressão:

$$I_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

onde I é a intensidade acústica, medida em watts por metro quadrado. Utilizando a propriedade do logaritmo do quociente vemos que o nível sonoro pode ser calculado, equivalentemente, por

$$I_{dB} = 120 + 10 \log_{10} I.$$

Fogos de Artifício

Atividade 15

Algumas cidades brasileiras estão limitando o nível sonoro dos fogos de artifício utilizados em celebrações, permitindo apenas fogos de até 100 dB a 100 metros de distância. A classificação do som como forte ou fraco está relacionada à intensidade sonora, medida em watts por metro quadrado W/m^2 . A menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$. O nível sonoro pode ser calculado a partir da intensidade da onda pela expressão $I_{dB} = 10 \times \log(I/I_0)$, onde I_0 é o limiar de audibilidade. Um técnico mede a intensidade sonora de um foguete como sendo de $3,7 \text{ W}/\text{m}^2$ a 100 metros de distância. Esse foguete poderia ser utilizado de acordo com a norma determinada por essas cidades? Essa intensidade estaria entre as intensidades de que sons, de acordo com a [tabela 7.4](#)?

ORGANIZANDO FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Os sons na natureza podem ter os mais diversos valores, e não estarem definidos apenas para intensidades $I = 10^n$, para algum valor $n \in \mathbb{Z}$, como na [tabela 7.4](#). Assim, o nível sonoro, em decibéis, é uma *função* da intensidade sonora (I) do som:

$$I_{dB}(I) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{10^{-12}} \right).$$

Esse é um exemplo de uma função logarítmica!

Definição Dado um número real positivo a , com $a \neq 1$, chama-se **função logarítmica de base a** à função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei

$$f(x) = \log_a x.$$

A função calcula o logaritmo dos números reais positivos

Ou seja, a função logarítmica de base a é aquela que associa a cada número real positivo o logaritmo daquele número na base a .

Gráficos dos logaritmos

Atividade 16

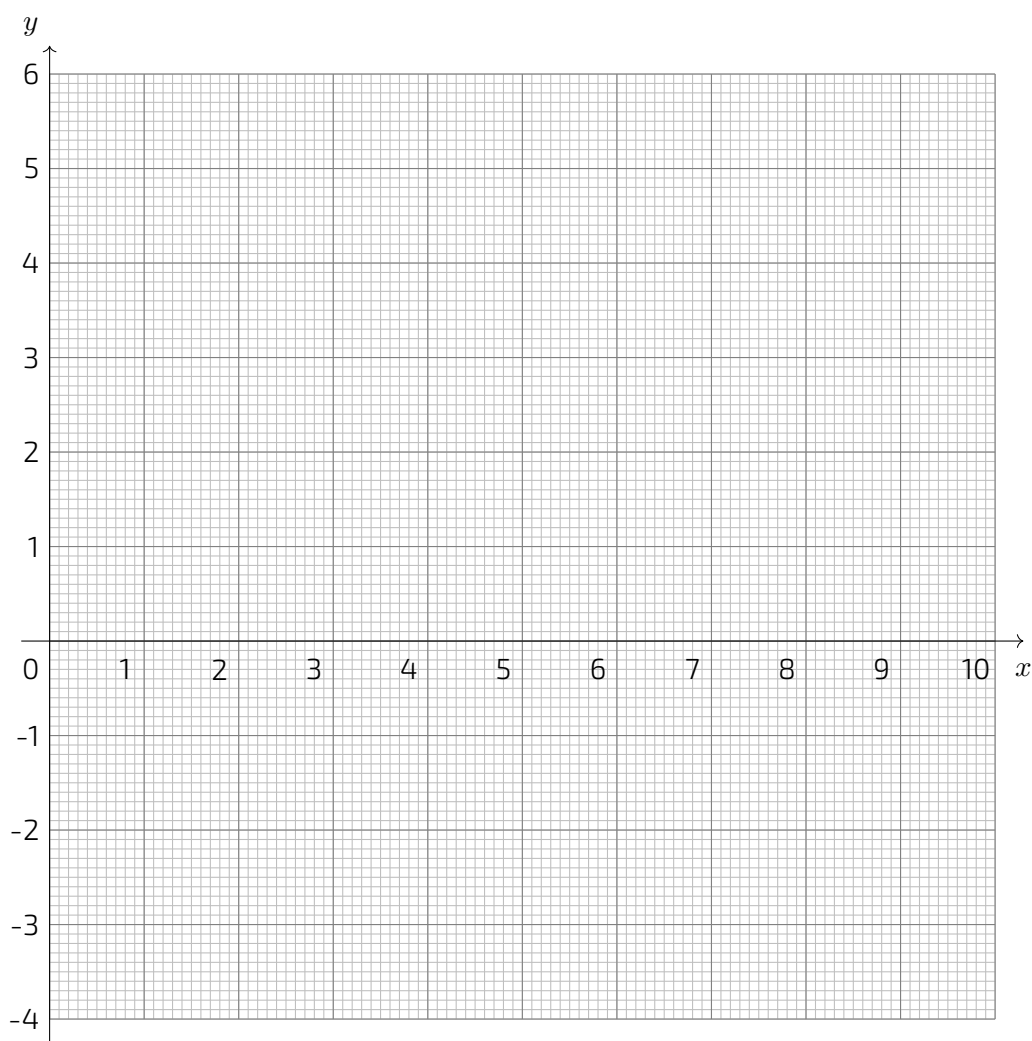
Utilize as aproximações abaixo, com dois dígitos de precisão, dos logaritmos em base 2 para esboçar o gráfico de $f(x) = \log_2 x$ no espaço quadriculado abaixo.

$$\log_2 1/8 = -3; \log_2 1/4 = -2; \log_2 1/2 = -1; \log_2 1 = 0; \log_2 2 = 1; \log_2 3 = 1,58;$$

$$\log_2 4 = 2; \log_2 5 = 2,32; \log_{10} 1 = 0; \log_2 6 = 2,58; \log_2 7 = 2,8; \log_2 8 = 3;$$

$$\log_2 9 = 3,16; \log_2 10 = 3,32.$$

Após esboçar esse gráfico, converse com seus colegas e com o professor como utilizar esses valores para esboçar o gráfico $g(x) = \log_{1/2} x$ e tente traçá-lo.



Invertendo a base

A atividade *Gráficos dos logaritmos* pode ser realizada se percebermos que $\log_{1/2} x = -\log_2 x$. Essa propriedade é uma consequência do teorema da mudança de base:

$$\log_{1/a} x = \frac{\log_a x}{\log_a 1/a} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x.$$

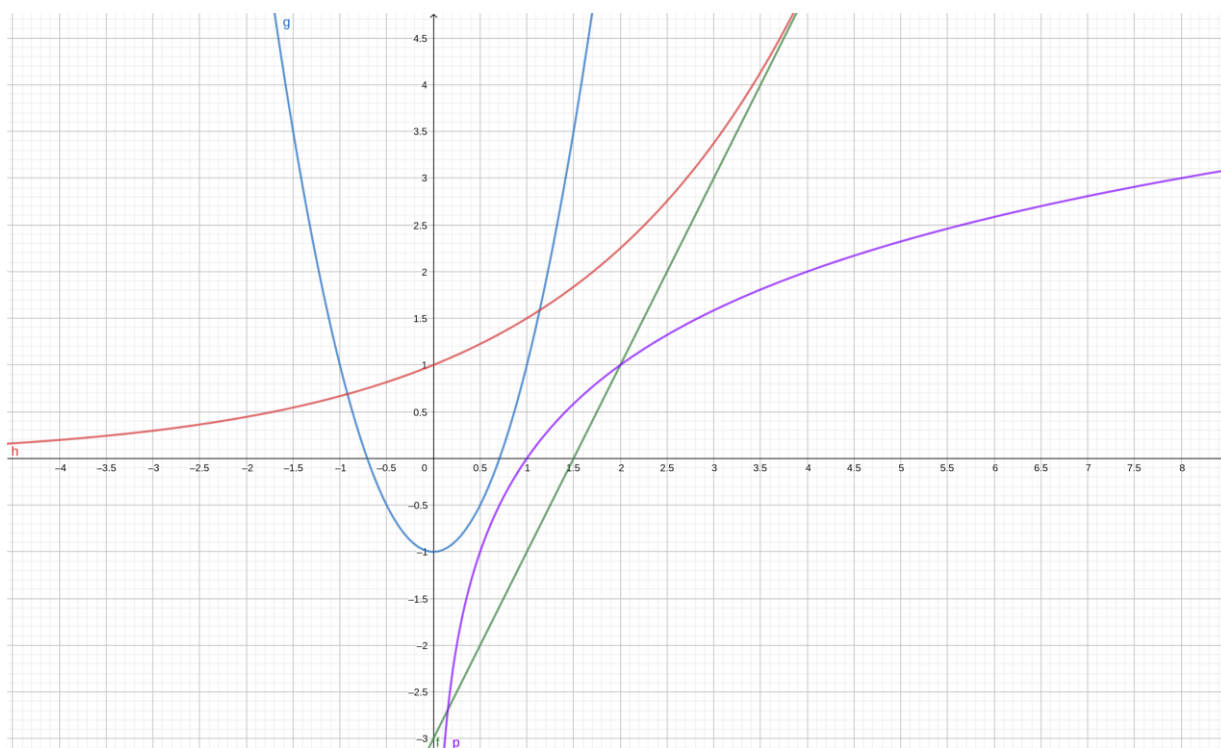
PARA REFLETIR

O domínio contém apenas o semieixo positivo! Por que calculamos apenas os logaritmos de números reais positivos? Qual seria o problema para calcular $\log_2(-4)$?

Comparando funções conhecidas

Atividade 17

As curvas na figura a seguir representam as funções $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 2x^2 - 1$, $h(x) = 1,5^x$ e $l(x) = \log_2 x$. Identifique que curva representa cada função. Calcular o valor da função para alguns valores de x pode auxiliar na identificação.



EXEMPLO 7 Crescimento logarítmico e exponencial

A figura a seguir mostra o total de mortes confirmadas causadas pela Covid-19 na França a cada dia, entre 15 de fevereiro e 13 de junho. Observamos no gráfico uma mudança no padrão da curva por volta da data de 7 de abril. No período inicial a curva é melhor aproximada por uma exponencial e depois é melhor aproximada por uma função logarítmica.

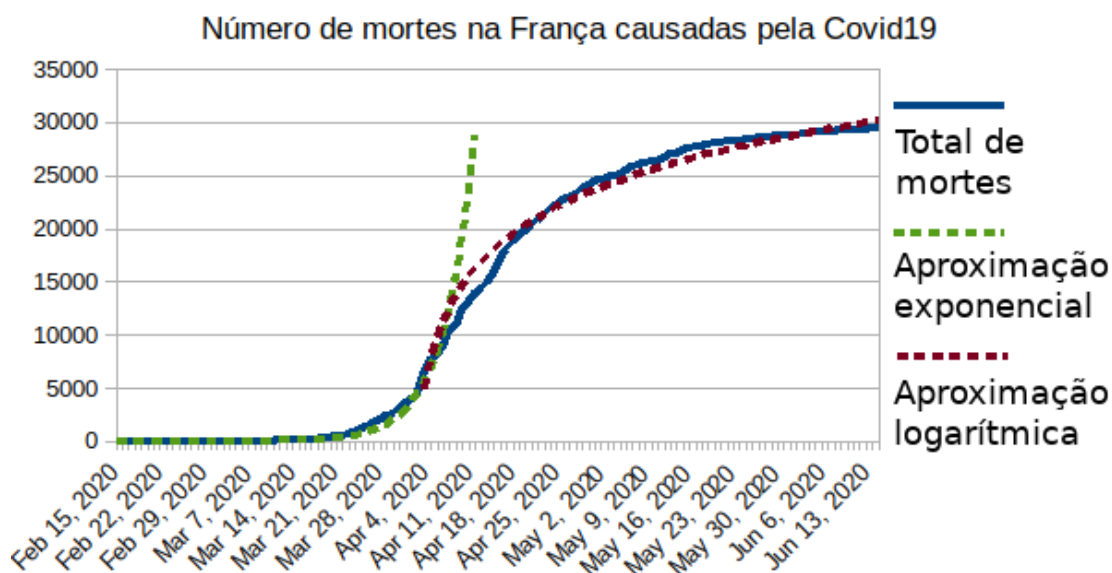


Figura 7.4: Fonte: Dados do site *Our World in Data* (ourworldindata.org)

Buscar uma função que melhor aproxime os dados de um determinado experimento ou acontecimento da vida real é um procedimento, chamado *ajuste de curvas*, muito utilizado em todas as áreas da ciência. Os ajustes de curvas podem ser utilizados para prever tendências em dados futuros e permitir que sejam tomadas medidas preventivas.

A curva exponencial sugere que haveria um crescimento muito rápido no número de mortes. Contudo a redução posterior mostra um número muito menor, que pode ter sido causada pelas medidas adotadas pelo governo Francês (entre outras possibilidades).

Brasil e Reino Unido na Pandemia

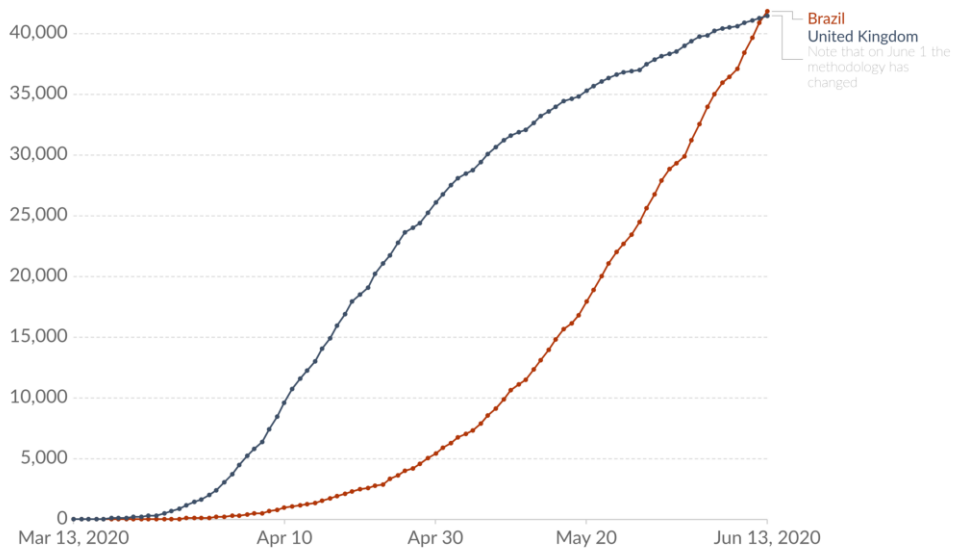
Atividade 18

Observando o gráfico abaixo, em que data (aproximadamente) o crescimento mudou de exponencial para logarítmico no Reino Unido? E no Brasil? Apesar do número ser parecido na data final do gráfico, você acredita que o número total de mortos manteve-se próximo? Que fatores sociais, econômicos e demográficos podem ter influenciado o desenvolvimento da pandemia nesses países?

Total confirmed COVID-19 deaths

Limited testing and challenges in the attribution of the cause of death means that the number of confirmed deaths may not be an accurate count of the true number of deaths from COVID-19.

Our World
in Data



Source: European CDC - Situation Update Worldwide - Last updated 17th June, 11:00 (London time) OurWorldInData.org/coronavirus • CC BY

Figura 7.5: Mortes confirmadas Covid-19 no Brasil e no Reino Unido.

Fonte: *Our World in Data* (ourworldindata.org)

Escala Richter

Ocorrem milhares de eventos sísmicos todo o dia no planeta Terra, mas a grande maioria deles é muito fraca para ser percebida pelos seres humanos. A magnitude de um evento sísmico varia muito, por isso tais eventos são classificados em escalas logarítmicas. Uma escala bastante famosa para medir os abalos é a escala Richter (mas que não é tão utilizada hoje em dia).

A escala Richter⁶ utiliza as amplitudes das ondas registradas por sismógrafos para expressar a magnitude local de um evento sísmico, onde está localizado o sismógrafo.

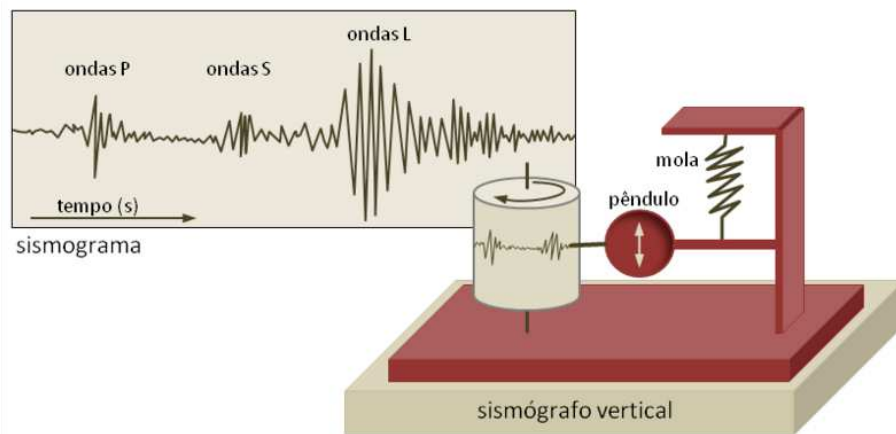


Figura 7.6: Um sismógrafo e o registro de um evento

Fonte: Casa das Ciências (<https://www.casadasciencias.org/>).

A Magnitude Local (ML) determinada pela escala Richter pode ser calculada por

$$ML = \log_{10} A - \log A_0,$$

onde A é a maior amplitude de onda detectada pelo sismógrafo e A_0 é a magnitude do menor abalo registrável (na época de sua invenção), corrigida por um fator de escala, que depende da distância do sismógrafo à fonte do tremor.

EXEMPLO 8 Comparando eventos (Escala Richter).

Segundo a Wikipedia, a explosão na central nuclear de Chernobyl, em 1986, apresentou Magnitude Local $ML_{Ch} = 3,67$, enquanto o Sismo da Costa Rica, em 2009, apresentou Magnitude Local de $ML_{CR} = 6,2$. Podemos comparar os eventos calculando a razão entre as amplitudes registradas através da diferença entre as Magnitudes Locais:

$$\begin{aligned} 6,2 - 3,67 &= \log_{10} A_{CR} - \log A_0 - (\log_{10} A_{Ch} - \log A_0) \\ \Rightarrow 2,53 &= \log_{10} A_{CR} - \log_{10} A_{Ch} = \log_{10} \left(\frac{A_{CR}}{A_{Ch}} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{A_{CR}}{A_{Ch}} \right) &= 10^{2,53} \approx 338,84. \end{aligned}$$

Assim, o Sismo da Costa Rica registrou amplitudes 338 vezes maiores do que a explosão

⁶Desenvolvida por Charles Richter e Beno Gutenberg

nuclear de Chernobyl.

A escala Richter apresenta distorções para eventos de grande intensidade ($> 6,5$) e não é utilizada para grandes eventos sísmicos atualmente.

Magnitude de Momento Sísmico

Uma escala bastante utilizada atualmente é a escala de Magnitude do Momento Sísmico (*MMS*), que também é uma escala logarítmica e utiliza o Momento Sísmico (M_0) para estimar a magnitude de um evento através da equação

$$M_w = \frac{2}{3} \log_{10} (M_0) - 10,7$$

EXEMPLO 9 Comparando eventos (MMS).

Segundo a Wikipedia, a explosão da Tsar Bomba (maior artefato nuclear já detonado), detonada em 1961, atingiu Magnitude de Momento Sísmico $M_w = 8,3$, enquanto o impacto do meteoro que, presumidamente, causou a extinção dos dinossauros, atingiu Magnitude de Momento Sísmico $M_w = 13,0$. Podemos comparar os eventos calculando a razão entre os Momentos Sísmicos M_T e M_D , respectivamente, calculando a diferença entre as Magnitudes de Momento Sísmicos:

$$\begin{aligned} 13,0 - 8,3 &= \frac{2}{3} \log_{10} (M_D) - 10,7 - \left(\frac{2}{3} \log_{10} (M_T) - 10,7 \right) \\ \Rightarrow 4,7 &= \frac{2}{3} (\log_{10} (M_D) - \log_{10} (M_T)) = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{M_D}{M_T} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{M_D}{M_T} \right) &= 10^{7,05} \approx 11.220.184,54. \end{aligned}$$

Assim, o impacto do meteoro gerou um Momento Sísmico mais de 11 milhões de vezes maior do que o Momento Sísmico do maior artefato nuclear já detonado pela espécie humana.

pH

O pH, às vezes chamado de potencial de ionização, é uma escala utilizada para medir a acidez ou basicidade de uma solução aquosa. Substâncias ácidas tem o pH menor do que 7 e substâncias básicas tem o pH maior do que 7. A água pura tem pH=7 e é considerada neutra. Vejamos alguns exemplos dos valores de pH para substâncias comuns:

Substância	pH
Ácido de bateria	< 1,0
Suco gástrico	1,0 - 3,0
Sumo de limão	2,2 - 2,4
Refrigerante tipo cola	2,5
Vinagre	2,4-3,4
Sumo de laranja ou maçã	3,5
Cervejas	4,0 - 5,0
Café	5,0
Chá	5,5
Chuva ácida	< 5,6
Leite	6,3 - 6,6
Água pura	7,0
Saliva humana	6,5 - 7,5
Sangue humano	7,35 - 7,45
Água do mar	8,0
Sabonete de mão	9,0 - 10,0
Amoníaco	11,5
Hidróxido de sódio (soda cáustica)	13,5

Tabela 7.5: Alguns valores comuns de pH.

Fonte: Dados da Wikipedia-pH (pt.wikipedia.org/wiki/PH).

O pH é definido a partir da atividade dos íons de hidrônio (a_{H^+}), medida em mols/L, na solução, que pode ser medida com um aparelho eletrônico. Então o pH é definido como menos o logaritmo da atividade dos íons de hidrônio:

$$pH = -\log_{10} a_{H^+}$$

pH no vestibular.

Atividade 19

[UDESC 2009] "Chuva ácida" é um termo que se refere à precipitação, a partir da atmosfera, de chuva com quantidades de ácidos nítricos e sulfúrico maiores que o normal. Os precursores da chuva ácida vem tanto de fontes naturais, tais como vulcões e vegetação em decomposição, quanto de processos industriais, principalmente emissões de dióxido de enxofre e óxidos de nitrogênio resultantes da queima de combustíveis fósseis. O pH da água da chuva considerado normal é de 5,5 (devido à presença de ácido carbônico proveniente da solubilização de dióxido de carbono). Um químico monitorando uma região altamente industrializada observou que o pH da água da chuva era igual a 4,5. Considerando que a acidez está relacionada com a concentração de H_3O^+ , é correto afirmar que a água com pH 4,5 era:

- a) duas vezes mais básica que o normal.
- b) duas vezes mais ácida que o normal.
- c) dez vezes mais básica que o normal.
- d) dez vezes mais ácida que o normal.
- e) cem vezes mais ácida que o normal.

O gráfico abaixo ilustra as funções $f(x) = 2^x$ (verde), $g(x) = \log_2 x$ (azul) e a função $h(x) = x$

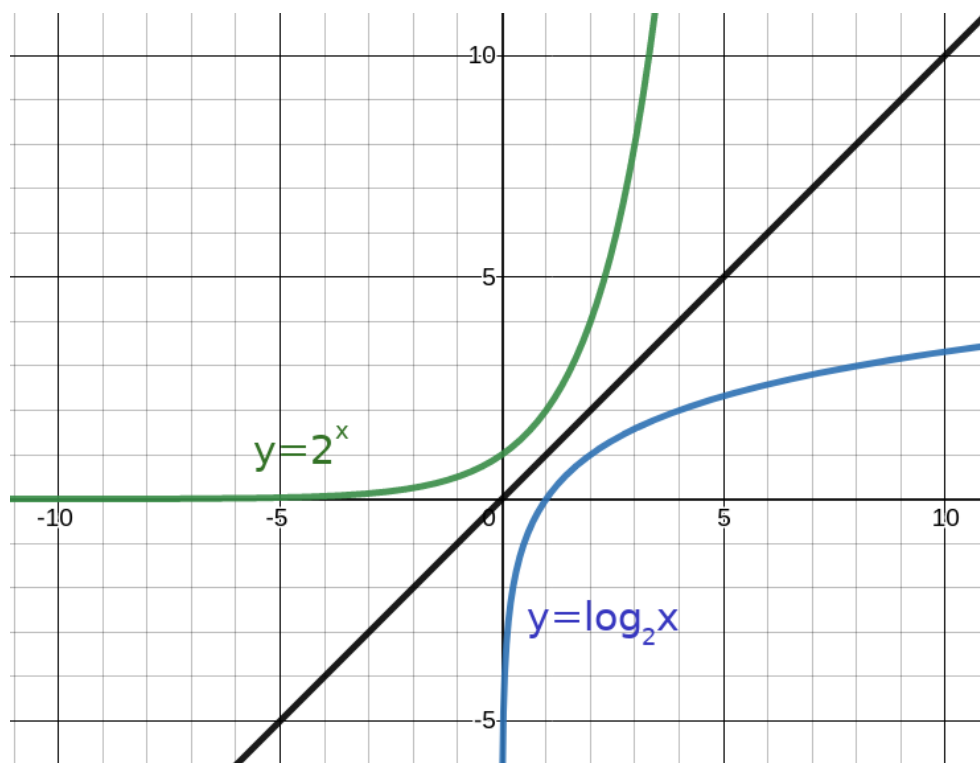


Figura 7.7: Funções exponencial e logarítmica de mesma base.

Para qualquer base $a > 0$, $a \neq 1$, temos $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ são simétricas em relação à função $h(x) = x$. Podemos utilizar um computador ou celular para acessar a atividade do GeoGebra abaixo e verificar, utilizando o controle deslizante, que essa simetria verifica-se para as mais diversas bases.



<https://www.geogebra.org/calculator/wx7fkdk7>

PARA PESQUISAR

Utilize o applet do GeoGebra para investigar o que ocorre com os gráficos de $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ quando $a = 1$. Por que você acha que isso ocorre?

Funções inversas na prática

Atividade 20

Complete a tabela abaixo calculando a exponencial do logaritmo e o logaritmo da exponencial.

x	$y = 2^x$	$\log_2 x$
1		
2		
3		
4		

y	$x = 3^y$	$\log_3 x$
-1		
1		
0		
2		

PARA REFLETIR

Você consegue explicar por que $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a(a^y) = y$? Tente discutir com seus colegas por que essas igualdades valem.

O logaritmo e a exponencial são inversas

Se um ponto (x, y) está no gráfico da função exponencial de base a , então $y = a^x$. Agora, se calcularmos $\log_a y$ obtemos x (pois x é o expoente ao qual devemos elevar a para obter y), de modo que o ponto (y, x) está no gráfico da função logarítmica de base a . Essa simetria traduz, então, o fato das funções logarítmicas e exponenciais serem inversas: dada uma base real $a > 0$, $a \neq 1$, e números reais $x > 0$ e y qualquer, temos

$$a^{\log_a x} = x,$$

$$\log_a(a^y) = y.$$

Uma consequência do fato de que as funções logarítmicas e exponenciais são inversas, é que funções logarítmicas de bases distintas são muito parecidas. É possível multiplicar uma delas por uma constante para obter a outra.

Funções logarítmicas distintas

Atividade 21

No *applet* do GeoGebra, disponível através do atalho abaixo, podemos mover a barra com o valor a , alterando o gráfico da função $h(x) = a \log_2 x$. Qual o valor de a para que o gráfico de $h(x)$ coincida com o gráfico de $f(x) = \log_{1,2} x$?



<https://www.geogebra.org/calculator/qyuzhbmnp>

Desafio: aplique o Teorema da mudança de base em $g(x) = \log_2 x$, utilizando a base 1,2 para encontrar algebricamente o valor de a .

Funções logarítmicas de bases distintas

Podemos utilizar o fato das funções exponenciais e logarítmicas serem inversas para trocar as bases de funções logarítmicas:

$$\log_a x = \log_a b^{\log_b x} = \log_a(b) \log_b(x).$$

Ou seja a função $\log_a x$ é igual à função $\log_b x$ multiplicada pela constante $\log_a b$. Essa constante pode ser negativa se $a < b$.

A figura a seguir ilustra os gráficos de funções logarítmicas de bases distintas (base maior do que 1 na cor laranja e menor do que 1 na cor verde).

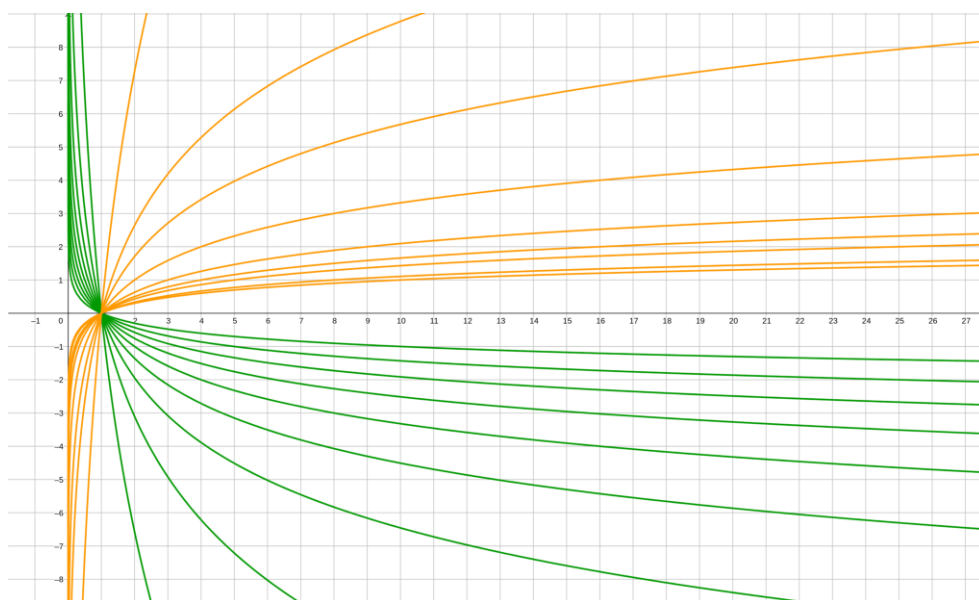


Figura 7.8: Funções logarítmicas de bases distintas.

Funções logarítmicas crescentes e decrescentes

Observamos na figura, imediatamente, que as funções logarítmicas de base maior do que 1 são crescentes. Isso ocorre porque as exponenciais de base $a > 1$ são funções estritamente crescentes:

$$x > y \text{ exatamente quando } a^x > a^y,$$

ou seja, para $x = \log_a c$ e $y = \log_a d$, temos

$$\log_a c > \log_a d \text{ exatamente quando } c > d.$$

Também observamos que as funções logarítmicas de base menor do que 1 são decrescentes. Isso ocorre porque as exponenciais de base $b < 1$ são funções estritamente decrescentes:

$$x > y \text{ exatamente quando } b^x < b^y,$$

ou seja, para $x = \log_b c$ e $y = \log_b d$, temos

$$\log_b c > \log_b d \text{ exatamente quando } c < d.$$

EXERCÍCIOS

1 É possível verificar rapidamente, utilizando gráficos, o tempo que uma aplicação demora para dobrar, triplicar, quadruplicar, ... o valor aplicado. O gráfico abaixo, da função $f(m) = \log_{1,01}(m/100)$, representa o tempo, em meses, para que determinado montante seja atingido a partir de um capital de R\$ 100,00, aplicado a uma taxa mensal de 1%. Observando o gráfico, estime com erro menor do que 10 o número de meses necessário para o capital inicial:

- a) dobrar;
- b) triplicar;
- c) quadruplicar.

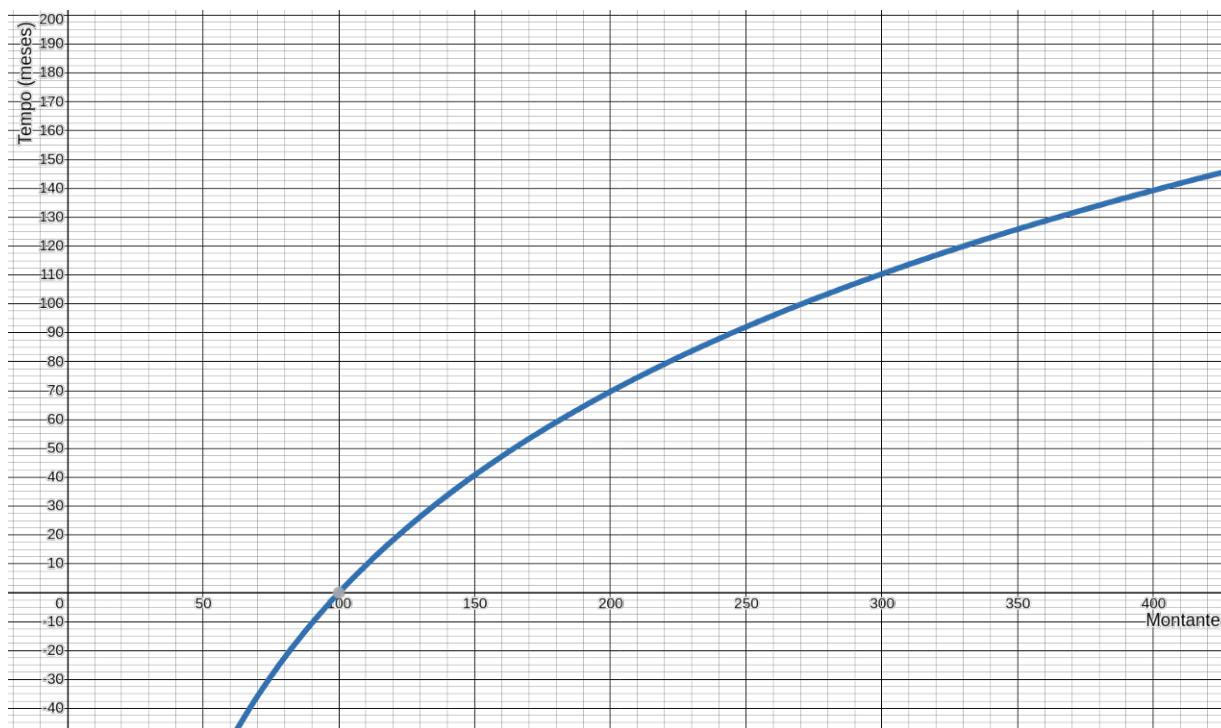


Figura 7.9: Gráfico da função $f(m) = \log_{1,01}(m/100)$.

2 **(Poluição sonora em sala de aula)** Um teste feito com um decibelímetro em uma escola, em São Carlos (SP), constatou que o nível de ruído emitido pelas crianças dentro de sala de aula está acima do recomendado pela Organização Mundial de Saúde (OMS) e a Associação Brasileira de Normas Técnicas. A exposição a esses ruídos podem prejudicar o aprendizado e causar danos ao aparelho auditivo, de acordo com especialistas. Segundo a OMS, o nível seguro de ruído em uma sala de aula não pode ultrapassar os 35 decibéis. Já para a Associação Brasileira de Normas Técnicas, o limite é de 50 decibéis.

A reportagem do Jornal da EPTV utilizou um decibelímetro para fazer a medição e o resultado em uma sala de aula chegou a 74 decibéis. O sinal da escola também ficou acima do recomendado, registrando o mesmo número. Em ambientes abertos, como o pátio, os especialistas afirmam que a tolerância é um pouco maior e os sons de até 85 decibéis não

trazem riscos. "Acima de 85 decibéis e oito horas de exposição já causa lesão ao aparelho auditivo", alerta o médico da Universidade de São Carlos (UFSCar), Bernardino Alves Souto.

Ainda de acordo com Souto, nível acima de 75 decibéis já se pode causar alguns sintomas. "Irritabilidade, insônia, ansiedade e dificuldade de concentração, dependendo do tempo de exposição ao barulho. Em uma sala de aula com aproximadamente 80 decibéis de intensidade de som, a capacidade de aprendizado e concentração da criança pode reduzir de 20% a 80%", explicou Souto.⁷

O nível sonoro (NS), medido em decibel (dB), pode ser calculado usando a fórmula $NS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ onde I é a intensidade do som considerado e I_0 é a menor intensidade sonora audível, sendo $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Considerando 35 decibéis o nível sonoro ideal em uma sala de aula, determine a intensidade do som nesse ambiente.

- 3 (UFC-2001) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I , em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

- a) 1/10
- b) 1
- c) 10
- d) 100
- e) 1 000

- 4 (Unesp-2006) O nível sonoro N , medido em decibéis (dB) e a intensidade I de um som, medida em watt por metro quadrado (W/m^2), estão relacionados pela equação $N = 120 + 10 \cdot \log_{10}(I)$. Suponha que foram medidos, em certo local, os níveis sonoros, N_1 e N_2 , de dois ruídos com intensidades I_1 e I_2 , respectivamente. Sendo $N_1 - N_2 = 20\text{dB}$, a razão I_1/I_2 é:

- a) 10^{-2}
- b) 10^{-1}
- c) 10
- d) 10^2
- e) 10^3

- 5 (Unicamp-2008) A escala de um aparelho para medir ruídos é definida da seguinte forma: $R = 12 + \log_{10}(I)$, em que R é a medida do ruído, em bels, e I é a intensidade sonora, em W/m^2 . No Brasil, a unidade utilizada é o decibel (1/10 do bel). Por exemplo, o ruído dos motores de um avião a jato é de 160 decibéis, enquanto o ruído do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade é de 80 decibéis, sendo este o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

- a) A intensidade sonora de um ruído de zero decibel é de 10^{-12} W/m^2 .

⁷Fonte: <http://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/noticia/2014/01/nivel-de-ruído-em-escola-estaca-acima-do-recomendado-em-sao-carlos-sp.html>. Acesso em: 25 set. 2017.

- b) A intensidade sonora dos motores de um avião a jato é o dobro da intensidade sonora do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.
- c) Uma intensidade sonora maior que 10^{-4} w/m^2 produz um ruído que é nocivo ao ouvido humano.

6 (UCS-RS) O nível β , em decibel, de um som que tem intensidade I é dado pela fórmula $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0)$, em que $I_0 = 10^{-12}$. Se a intensidade I for multiplicada por 100, em quantos decibel aumenta β ?

- a) 2
- b) 20
- c) 100
- d) 120
- e) 140

Às vezes, em situações concretas, podemos ter magnitudes muito diferentes dentro de um conjunto de valores. Na figura a seguir os círculos têm raios proporcionais, da esquerda para direita, aos raios do Sol, Mercúrio (muito pequeno para ver), Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

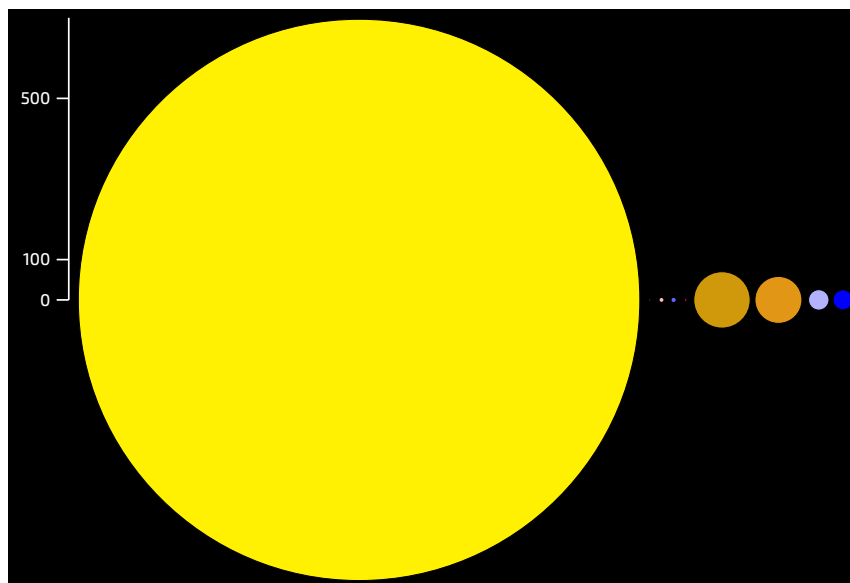


Figura 7.10: O sol e os planetas em escala linear (em milhares de quilômetros).

É muito difícil ver os planetas menores na figura. Para lidar com dados de magnitudes muito distintas, com frequência, utiliza-se uma escala logarítmica (a mesma da régua de cálculo, ver p. 55). Na figura a seguir observamos os mesmos objetos em uma escala logarítmica (branca).

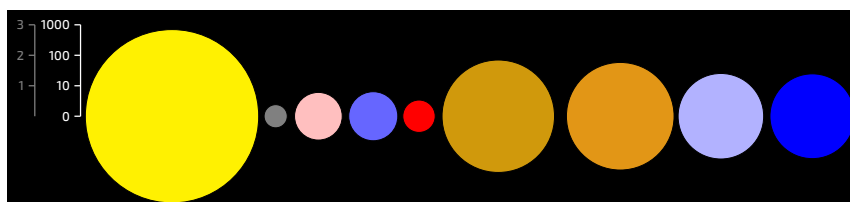


Figura 7.11: O sol e os planetas em escala logarítmica (em milhares de quilômetros).

Na escala logarítmica da figura, a cada unidade linear (cinza) os valores da escala branca são *multiplicados* por 10, de modo que os raios dos planetas têm valores correspondentes à escala logarítmica.

Colocar um gráfico em escala logarítmica.

A escala cinza na [figura 7.11](#) explica o que fizemos para colocar o gráfico em escala logarítmica: calculamos os logaritmos dos raios dos planetas e fizemos novos círculos com raios iguais a esses logaritmos. Como os valores da escala são as potências de 10 dos valores da escala linear, os logaritmos são exatamente os valores necessários para obter-se os respectivos valores originais nessa nova escala.

Ordens de magnitude dos planetas

Atividade 22

Observando os círculos e a escala logarítmica da [figura 7.11](#), qual é a melhor aproximação na comparação dos tamanhos de Vênus (rosa) e de Saturno (laranja).

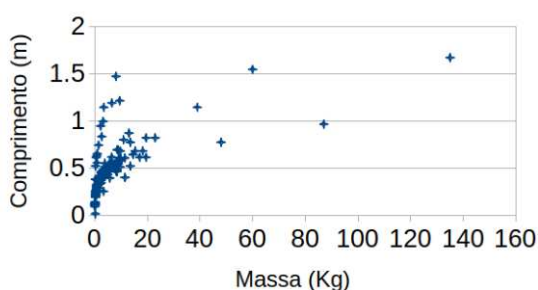
- a) O diâmetro de Saturno é o dobro do diâmetro de Vênus.
- b) O diâmetro de Saturno é dez vezes o diâmetro de Vênus.
- c) O diâmetro de Saturno é três vezes o diâmetro de Vênus.
- d) O diâmetro de Saturno é cem vezes o diâmetro de Vênus.

VOCÊ SABIA?

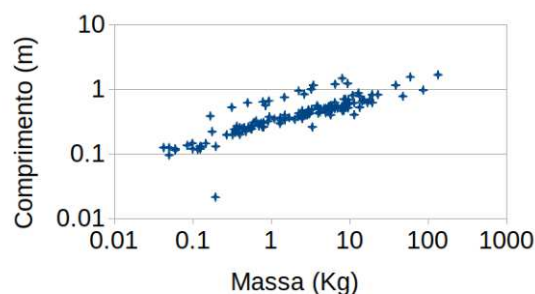
Distâncias entre os planetas. Nas figuras acima apenas colocamos os "planetas" lado a lado. Não levamos em conta as distâncias entre eles. O sistema solar é muito maior do os raios dos planetas e do próprio Sol. Para se ter uma ideia, a distância de Netuno ao Sol é de cerca de $4,5 \times 10^9 Km$, enquanto o diâmetro do Sol é de $1,4 \times 10^6$. Ou seja, a distância de Netuno até o Sol é mais de 3000 vezes o diâmetro do Sol.

EXEMPLO 10 Comprimentos e massas de primatas.

Às vezes estudamos valores com ordens de grandezas muito diferentes. Isso pode fazer com que valores significativamente distintos pareçam muito próximos e, assim, dificultar a análise. Para ilustrar isso trazemos gráficos de dispersão das massas e comprimentos médios de diversas espécies de primatas em escala logarítmica (ambos os eixos) e linear



Em escala linear.



Em escala logarítmica.

Figura 7.12: Massas e comprimentos de diversos primatas.
Dados de [Animal Diversity Web Quaadrvark](#).

Os valores ficam, assim, mais distribuídos e melhores para análise. Muitos dos primatas têm menos de 1 Kg e menos de 50 cm, contudo um animal 100 g e 10 cm é muito menor do que um animal de 1 Kg e 50 cm.

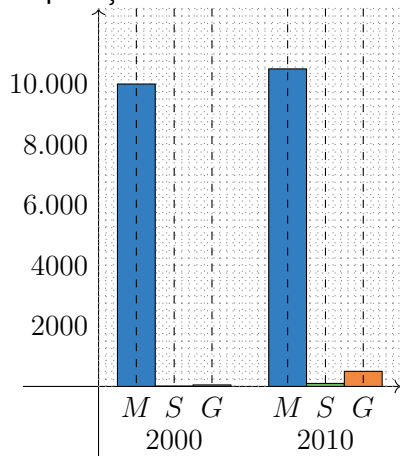
Ao colocarmos valores de magnitudes muito distintas em um gráfico na escala logarítmica, podemos ver observar melhor diferenças entre valores pequenos. Outro aspecto que pode ser melhor observado nessa escala são os crescimentos relativos ao longo do tempo.

Três cidades.

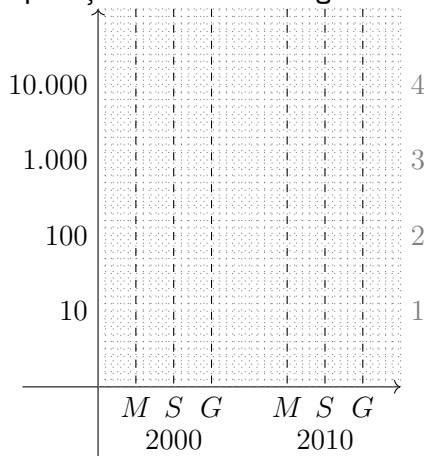
Atividade 23

Vamos considerar as populações das cidades de Metrópolis, Smallville e Gotham City. Um censo realizado no ano 2000 verificou que elas tinham 10.000, 10 e 50 milhares de habitantes, respectivamente. Dez anos após verificou-se que elas estavam com 10.500, 100 e 500 milhares de habitantes, respectivamente. A figura da esquerda, em escala linear, apresenta as populações das cidades.

Populações em escala linear.



Populações em escala logarítmica.



No gráfico em escala logarítmica, os valores devem ser marcados na altura dos seus respectivos logaritmos. Utilizando as aproximações $\log 5 \approx 0,7$ e $\log 10500 \approx 4,02$ na escala linear cinza, esboce as barras representando as populações na escala logarítmica à direita e responda:

- Qual cidade obteve o maior crescimento?
- Quais cidades tiveram o maior crescimento em relação aos tamanhos de suas populações no ano 2000?

PARA REFLETIR

No gráfico de escala logarítmica, quais cidades parecem ter sofrido maior alteração em suas populações?

Crescimento relativo com logaritmos.

As cidades de Gotham e Smallville tiveram as populações multiplicadas por 10, o que significa aumentos de 900%, e seus logaritmos aumentaram em 1. Os logaritmos terem au-

mentado a mesma quantidade não foi uma coincidência, mas ocorre sempre que os aumentos percentuais forem os mesmos.

Se um valor a é acrescido em um percentual p após um determinado período, e outro valor b é acrescido também em p por cento após outro período, então as diferenças entre os logaritmos dos valores (em uma base qualquer $c > 0$, com $c \neq 1$) é a mesma:

$$\begin{aligned}\log_c(a(1 + p\%)) - \log_c a &= \log_c((a(1 + p\%))/a) = \log_c(1 + p\%) \\ \log_c(b(1 + p\%)) - \log_c b &= \log_c((b(1 + p\%))/b) = \log_c(1 + p\%)\end{aligned}$$

Ou seja, as diferenças (distâncias no gráfico) são as mesmas. Isso significa que **em um gráfico em escala logarítmica é fácil perceber o crescimento¹ relativo (em relação à magnitude dos valores)**.

¹Estamos utilizando o termo crescimento relativo mesmo para $c < 1$, o que corresponderia a um decrescimento. Todavia o conceito de Taxa de Crescimento Relativo é amplamente utilizado em diversas áreas, mesmo quando o crescimento é negativo (ou seja, há um decrescimento).

EXEMPLO 11 Criptomoedas.

Investidores do mercado financeiro fazem os mais variados tipos de investimentos. Uma forma que têm ganhado popularidade é a compra de criptomoedas, como o Bitcoin. Nesse investimento compram-se unidades da moeda para revenda posterior por um preço maior. O gráfico abaixo ilustra o valor em dólares do Bitcoin, dia a dia, no período indicado.

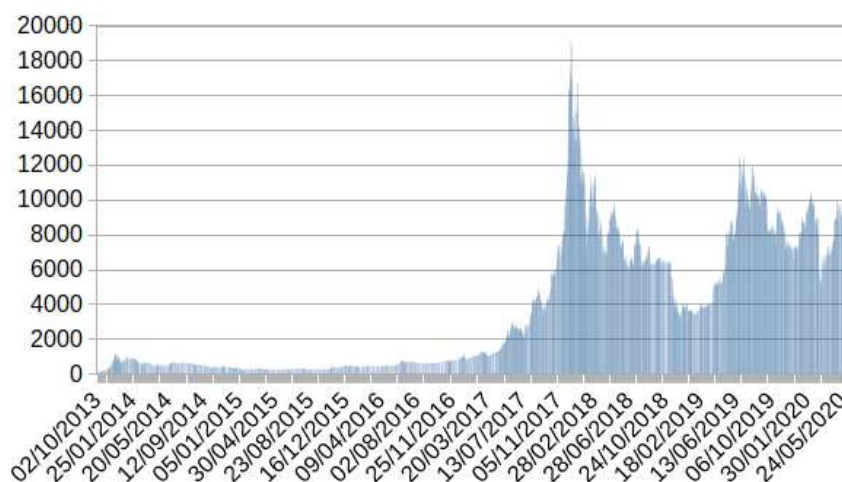


Figura 7.13: Valor de venda de uma Bitcoin (02/10/2013 - 24/05/2020).
Dados de [coindesk](#)

Esse gráfico traz informações importantes, mas não é adequado a todas as questões. Muitas vezes o investidor está interessado no ganho relativo (crescimento percentual) que a moeda (ou ação) teve e não no valor absoluto da função. Nesse sentido, colocar o gráfico em escala logarítmica ajuda entender os períodos de maior crescimento (ou queda) relativo, devido a observação *Crescimento relativo com logaritmos*. Vejamos o valor dos Bitcoins na escala logarítmica então.

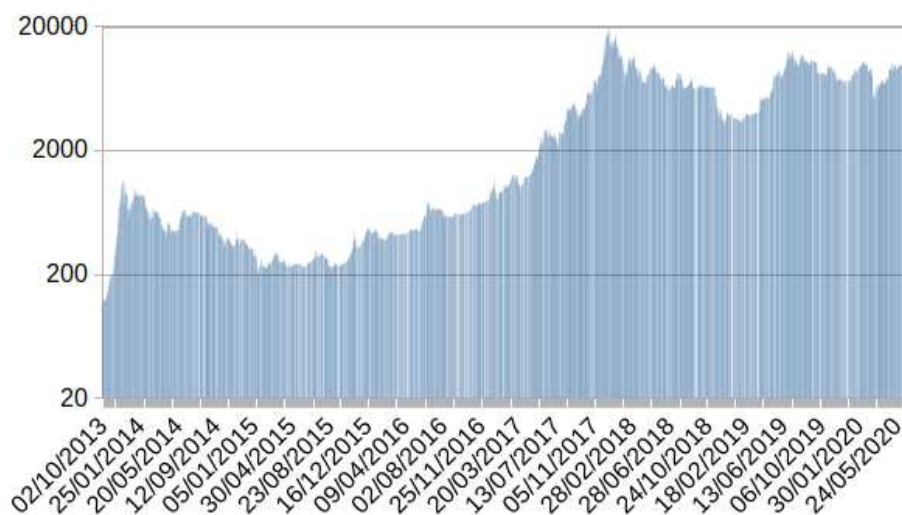


Figura 7.14: Valor de venda de um Bitcoin (escala logarítmica).

O gráfico mostra, então, que o crescimento proporcional no início da venda do Bitcoin foi maior do que o crescimento proporcional no pico de valor em dezembro de 2017 / janeiro de 2018, o que não estava aparente no gráfico em escala linear.

A função e^x , onde $e = 2,718 \dots$ número de Euler, já foi estudada no capítulo sobre a função exponencial e ela é a função exponencial preferencial nas ciências naturais e na engenharia. Isso ocorre pois ela é a linguagem natural do crescimento. A preferência do logaritmo natural está presente nas próprias calculadoras, que normalmente só calculam logaritmos em base 10, que escrevemos $\log_{10}$ ou $\log$, e a base e , que escrevemos $\log_e$ ou $\ln x$.

A função logarítmica natural.

A função logarítmica de base e , $\log_e : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, é chamada de **função logarítmica natural** e denotada por $\ln$. Assim, como para as outras bases, as funções $\ln x$ e e^x são inversas, de modo que, para quaisquer reais x e y , com $x > 0$, temos:

$$e^{\ln x} = x; \quad \ln e^y = y.$$

Devido a base e expressar o crescimento de forma mais natural, é muito comum que quaisquer exponenciais sejam escritas em termos da função e^x utilizando a seguinte técnica, ilustrada para a função exponencial 5^x :

$$5^x = e^{\ln 5^x} = e^{x \ln 5} \approx e^{1,609x},$$

onde utilizamos a aproximação com três casas decimais para $\ln 5$.

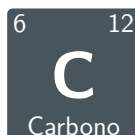
Na base e .

Atividade 24

Escreva as seguintes funções exponenciais utilizando a base e , como no exemplo acima, utilizando aproximações com três casas decimais de precisão para os logaritmos naturais.

- a) $f(x) = 3^x$;
- b) $g(x) = 10^x$;
- c) $f(x) = 75^x$.

PRATICANDO DECAIMENTO RADIOATIVO



Os elementos químicos são catalogados na tabela periódica. A figura acima ilustra o **isótopo mais comum do carbono**, o Carbono-12, que tem número atômico 6 (e, assim, 6 prótons) e número de massa 12, tendo 6 nêutrons. Contudo nem todos os átomos de carbono são iguais, alguns têm nêutrons em excesso ou em falta. O número de prótons determina o elemento químico, mas dois átomos de um elemento podem ter número de massa diferente devido ao número distinto de nêutrons. Classificamos os átomos de um elemento químico em isótopos

de acordo com os números de massa que eles têm. Um isótopo importante do carbono é o Carbono-14, que é utilizado na datação de objetos antigos.

O Carbono-14 é um isótopo instável, e pode, espontaneamente, emitir radiação (e transformar-se em um átomo de nitrogênio). Esse processo natural é chamado de decaimento radioativo e diferentes isótopos decaem à taxas (velocidades) diferentes.

A meia vida de isótopos radioativos.

A **meia vida** de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que a metade dos átomos daquele isótopo em uma amostra decaia. Alguns exemplos de meia-vida de isótopos:

Oxigênio-19	26,5 s
Césio-137	30 anos
Carbono-14	5730 anos
Urânio-235	703.800.000 anos

Tabela 7.6: Meias-vidas de alguns isótopos radioativos (aproximações).

EXEMPLO 12 Decaimento do Carbono-14.

O decaimento do Carbono-14 é utilizado para determinar a idade de tecidos orgânicos mortos e, por isso, é muito importante em diversas áreas da ciência. Vamos considerar uma amostra com 100g de Carbono-14 e determinar quanto tempo seria necessário para que sobrasse apenas 10g de Carbono-14 na amostra.

Como perdemos metade da massa a cada meia-vida, teremos as seguintes quantidades de Carbono-14 após determinado número de anos

Anos	Carbono-14
0	100g
5.730	50g
11.460	25g
17.190	12,5g
22.930	6,25g
28.650	3,125g

Tabela 7.7: Quantidade de Carbono-14 restante.

Vemos que a quantidade cai exponencialmente a cada 5.730 anos. Assim, poderíamos escrever uma expressão para a quantidade de Carbono-14 como

$$Q(t) = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} = 100 \times e^{t \frac{\ln 1/2}{5730}} = 100 \times e^{-t \frac{0,693}{5730}},$$

onde escrevemos a função exponencial de base e por ser a mais utilizada nesse contexto.

Assim, o tempo necessário para termos 10g seria

$$\begin{aligned}0,1 &= e^{-t \frac{0,693}{5730}} \\ \Rightarrow -t \frac{0,693}{5730} &= \ln 0,1 \\ \Rightarrow t &\approx \frac{5730}{0,693} 2,302 = 19.033,852\end{aligned}$$

Meia vida biológica.

Atividade 25

A meia vida de um fármaco é o tempo necessário para a concentração plasmática dele cair pela metade em um organismo. Esse conceito serve para estimarmos qual a concentração de determinado medicamento no organismo. O antibiótico Amoxicilina tem meia vida biológica de 61,3 minutos. Vejamos a seguinte situação: um paciente de 75Kg recebe uma dose do medicamento de 500mg. Uma pessoa com esse peso tem cerca de 5 litros de sangue (a quantidade exata pode variar de pessoa para pessoa). Supondo que o medicamento foi completamente dissolvido e distribuído uniformemente no sangue, teríamos a concentração plasmática do medicamento igual a $500/5000 = 0,1$ mg/ml. Escreva uma função exponencial de base e para descrever concentração plasmática (em mg/ml) após t minutos. Utilize a função encontrada para determinar quanto tempo levará para a concentração cair abaixo de 0,005 mg/ml.

- 1 Segundo o gráfico abaixo, quantas vezes a massa corporal de um besouro é maior do que a massa corporal de uma formiga? E qual seria a razão entre as massas de um coelho e de um besouro? E entre as massas da formiga e do coelho?

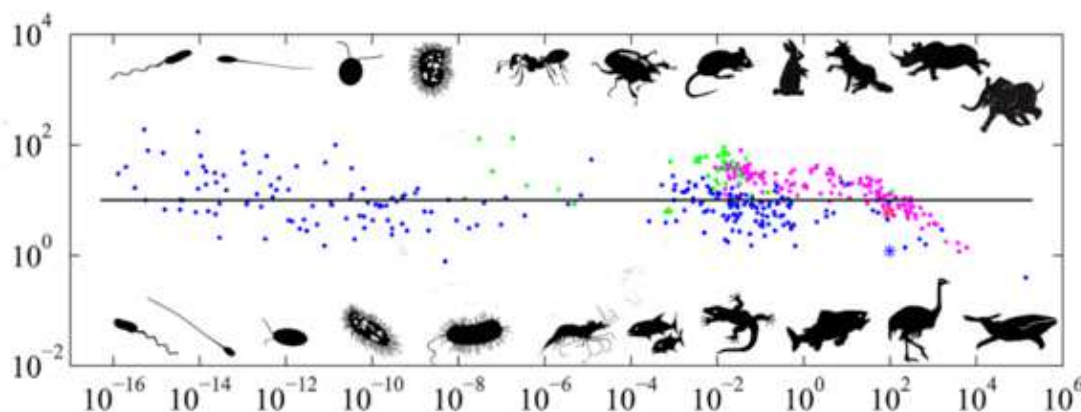


Figura 7.15: Distribuição de massas, em quilogramas no eixo horizontal, e velocidades, em comprimentos do ser vivo por segundo no eixo horizontal.

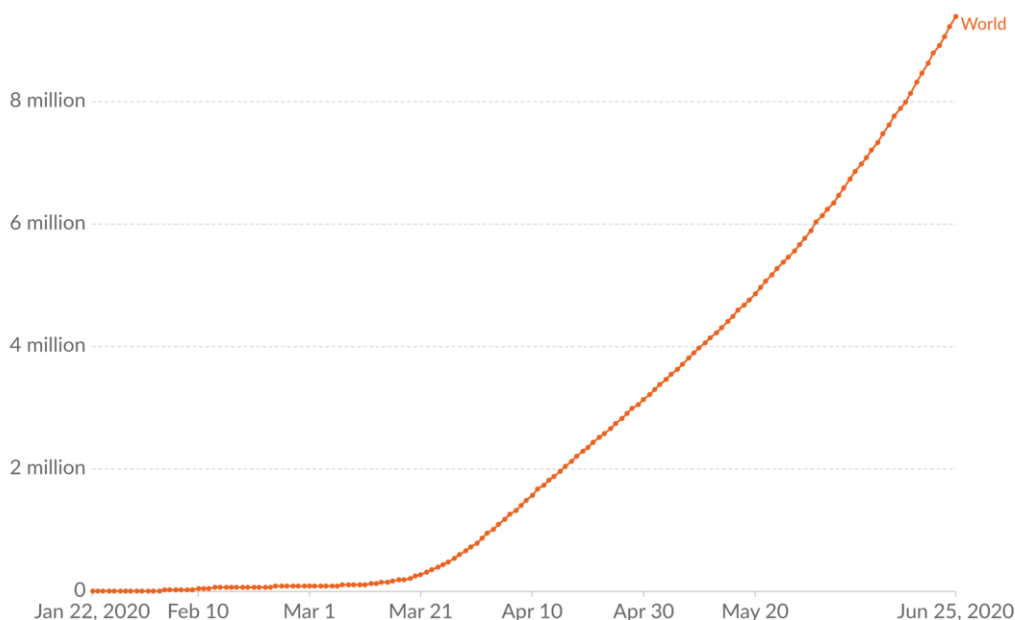
Fonte: [Meyer-Vernet e Rospars \(2015\)](#)

- 2 Para doenças infecciosas, em seus estágios iniciais, é esperado que o aumento no número de casos seja proporcional ao número de contaminados (em estágios posteriores essa tendência diminui pois há menos pessoas suscetíveis disponíveis para a contaminação). Os gráficos abaixo mostram o desenvolvimento do número de casos da Covid-19 no mundo em escala linear e logarítmica. Observando os gráficos, houve maior crescimento relativo no número de casos entre as datas de 22 de janeiro e 10 de fevereiro ou entre as datas de 30 de abril e 20 de maio? Qual dos gráficos identifica melhor a situação?

Total confirmed COVID-19 cases

The number of confirmed cases is lower than the number of total cases. The main reason for this is limited testing.

Our World
in Data



Source: European CDC – Situation Update Worldwide – Last updated 25th June, 11:00 (London time) OurWorldInData.org/coronavirus • CC BY

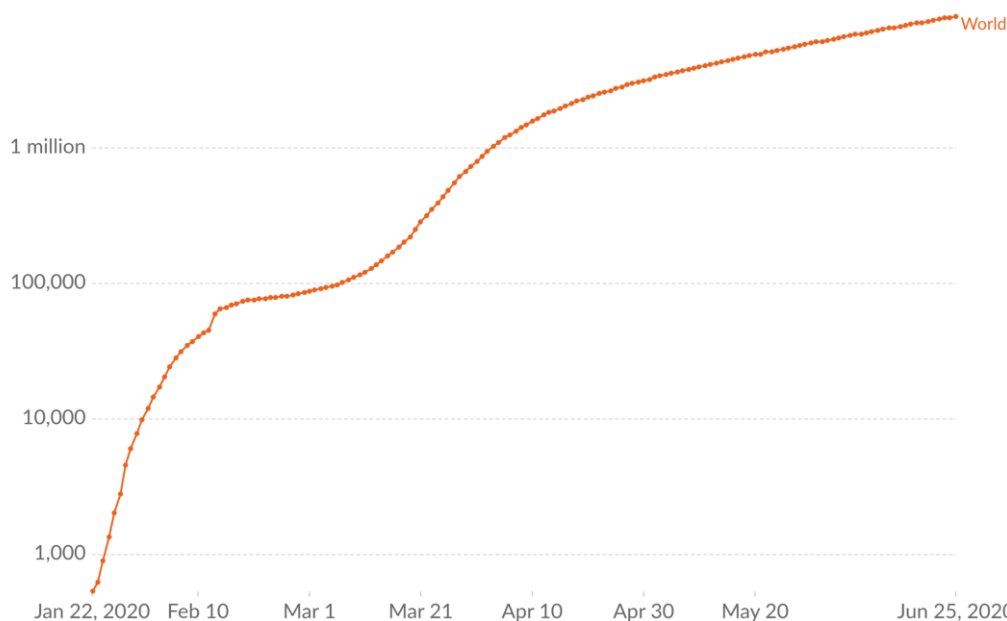
Figura 7.16: Total de casos confirmados da Covid-19 no mundo (linear)

Fonte: Our World in Data (ourworldindata.org)

Total confirmed COVID-19 cases

The number of confirmed cases is lower than the number of total cases. The main reason for this is limited testing.

Our World
in Data



Source: European CDC – Situation Update Worldwide – Last updated 25th June, 11:00 (London time) OurWorldInData.org/coronavirus • CC BY

Figura 7.17: Total de casos confirmados da Covid-19 no mundo (log)

Fonte: Our World in Data (ourworldindata.org)

3 Observando as figuras 7.13 e 7.14, o crescimento percentual do valor da Bitcoin foi maior entre as datas de 02/10/2013 e 25/01/2014 ou entre 05/11/2017 e 28/02/2018? Como isso pode ser observado nos gráficos?

4 (ENEM 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \log_2(t + 1)$, em que t é o tempo contado em dia e h , a altura da planta em centímetro. A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

- a) 63
- b) 96
- c) 128
- d) 192
- e) 255

5 (PEIES/2008) Segundo o IBOPE, o número de internautas no Brasil chegou, em março de 2007, a 16,3 milhões de pessoas. Em 2000, esse número era aproximadamente 5 milhões. Suponha que a função $N(t)$, que representa o número de internautas⁸ (em milhões) em função do tempo t (em ano), possa ser expressa por $N(t) = 5(1,184)^t$, onde $t = 0$ representa o ano de 2000, $t = 1$, o ano de 2001 e assim por diante. Então, de acordo com esse modelo, o número de internautas atingirá 50 milhões: (dado $\log 1,184 = 0,073$)

- a) entre 2008 e 2009;
- b) entre 2009 e 2010;
- c) em março de 2010;
- d) entre 2013 e 2014;
- e) somente a partir de 2015.

6 O pH de uma solução é definido por $\text{pH} = -\log_{10}(H^+)$ em que H^+ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução tal que $H^+ = 10^{-5}$.

7 (USF Geral 2015) Terremoto é o termo popular usado para os grandes sismos, sendo que para os pequenos é comum usar abalo sísmico ou tremor de terra. A escala Richter, também conhecida como escala de magnitude local (ML), atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um sismo. É uma escala logarítmica de base 10, obtida calculando o logaritmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo.

A fórmula utilizada é $ML = \log(A) - \log(A_0)$, em que:

A = amplitude máxima medida no sismógrafo.

A_0 = uma amplitude de referência.

Com base nas informações, analise as proposições:

⁸Em uma situação real, só é possível esperar crescimento exponencial enquanto o total de internautas é muito menor do que a população total.

- I. Para um terremoto de magnitude 7, temos $A_0 = 7A$.
II. Para um terremoto de magnitude 4 temos $\frac{A}{A_0} = 10^{-4}$.
III. Um terremoto de magnitude 7 produz efeitos 10 vezes maior do que um terremoto de magnitude 6.

Assinale a correta.

- a) Apenas a proposição I é verdadeira.
- b) Apenas as proposições I e II são verdadeiras
- c) Apenas as proposições II e III são verdadeiras.
- d) Apenas a proposição II é verdadeira.
- e) Apenas a proposição III é verdadeira.

- 8 (Enem 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim, como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0).$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina x cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.⁹

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

- a) $10^{-5,10}$
- b) $10^{-5,73}$
- c) $10^{12,00}$
- d) $10^{21,65}$
- e) $10^{27,00}$

⁹U.S. Geological Survey. Historic Earthquakes. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado). U.S. Geological Survey. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

- 9 (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina a produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) : 1,5 + \log_3(t + 1),$$

com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, o tempo (em anos) transcorrido da plantação ao corte foi de:

- a) 9
 - b) 8
 - c) 5
 - d) 4
 - e) 2
- 10 (UnB-DF) Estima-se que $1\,350\,m^2$ de terra sejam necessários para fornecer alimento para uma pessoa. Admite-se, também, que há $30 \times 1\,350$ bilhões de m^2 de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 30 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. A população mundial, no início de 1987, foi estimada em 5 bilhões de habitantes. Considerando que a população continua a crescer, a uma taxa de 2% ao ano, e usando as aproximações $\ln(1,02) = 0,02$; $\ln(2) = 0,70$ e $\ln(3) = 1,10$, determine em quantos anos, a partir de 1987, a Terra teria a máxima população que poderia ser sustentada.
- 11 (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $\text{pH} = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e $\log$, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ mol/L}$. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para $\log 2$, e de 0,48, para $\log 3$. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:
- a) 7,26
 - b) 7,32
 - c) 7,58
 - d) 7,74
- 12 (ENEM - 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000°C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log(11)$. O tempo decorrido, em horas, até que a liga atinja 30°C é mais próximo de
- a) 22.
 - b) 50.
 - c) 100.
 - d) 200.
 - e) 400.
- 13 (PUC-SP) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial

$$P = P_0 e^{-\frac{t}{250}}$$

na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t_0 = 0$; e e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: $\ln 2 = 0,693$)

- a) 336
- b) 338
- c) 340
- d) 342
- e) 346

14

(UNESP-SP) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p , em atm, por

$$h(p) = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{p} \right).$$

Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0,3$, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros, era de

- a) 5.
- b) 8.
- c) 9.
- d) 11.
- e) 12.

15

(UFPR - 2017) A probabilidade de se vencer uma partida de certo jogo é de 10%. Quantas partidas devem ser jogadas em sequência para que a probabilidade de que haja vitória em pelo menos uma delas seja superior a 99%? Se necessário, use $\log(3) = 0,477$.

- a) 10.
- b) 20.
- c) 22.
- d) 30.
- e) 44.

Os logaritmos foram inventados pelo matemático escocês John Napier (1550 - 1617) e desenvolvidos na base 10 pelo matemático inglês Henry Briggs (1561 - 1630). Eles desenvolveram os logaritmos para facilitar os cálculos de multiplicação¹⁰, que eram muito laboriosos e passíveis de erro em uma época que não haviam computadores. Para isso eles precisavam de tabelas extensas, que enchiam livros inteiros, com os valores aproximados de muitos logaritmos em alguma base.

Logarithm.	Logarithm.	Lg
1.00000000000000	0.176091259055	0.176091
1.00010000000000	0.176091259055	0.176091
1.00020000000000	0.176091259055	0.176091
1.00030000000000	0.176091259055	0.176091
1.00040000000000	0.176091259055	0.176091
1.00050000000000	0.176091259055	0.176091
1.00060000000000	0.176091259055	0.176091
1.00070000000000	0.176091259055	0.176091
1.00080000000000	0.176091259055	0.176091
1.00090000000000	0.176091259055	0.176091
1.00100000000000	0.176091259055	0.176091
1.00110000000000	0.176091259055	0.176091
1.00120000000000	0.176091259055	0.176091
1.00130000000000	0.176091259055	0.176091
1.00140000000000	0.176091259055	0.176091
1.00150000000000	0.176091259055	0.176091
1.00160000000000	0.176091259055	0.176091
1.00170000000000	0.176091259055	0.176091
1.00180000000000	0.176091259055	0.176091
1.00190000000000	0.176091259055	0.176091
1.00200000000000	0.176091259055	0.176091
1.00210000000000	0.176091259055	0.176091
1.00220000000000	0.176091259055	0.176091
1.00230000000000	0.176091259055	0.176091
1.00240000000000	0.176091259055	0.176091
1.00250000000000	0.176091259055	0.176091
1.00260000000000	0.176091259055	0.176091
1.00270000000000	0.176091259055	0.176091
1.00280000000000	0.176091259055	0.176091
1.00290000000000	0.176091259055	0.176091
1.00300000000000	0.176091259055	0.176091
1.00310000000000	0.176091259055	0.176091
1.00320000000000	0.176091259055	0.176091
1.00330000000000	0.176091259055	0.176091
1.00340000000000	0.176091259055	0.176091
1.00350000000000	0.176091259055	0.176091
1.00360000000000	0.176091259055	0.176091
1.00370000000000	0.176091259055	0.176091
1.00380000000000	0.176091259055	0.176091
1.00390000000000	0.176091259055	0.176091
1.00400000000000	0.176091259055	0.176091
1.00410000000000	0.176091259055	0.176091
1.00420000000000	0.176091259055	0.176091
1.00430000000000	0.176091259055	0.176091
1.00440000000000	0.176091259055	0.176091
1.00450000000000	0.176091259055	0.176091
1.00460000000000	0.176091259055	0.176091
1.00470000000000	0.176091259055	0.176091
1.00480000000000	0.176091259055	0.176091
1.00490000000000	0.176091259055	0.176091
1.00500000000000	0.176091259055	0.176091
1.00510000000000	0.176091259055	0.176091
1.00520000000000	0.176091259055	0.176091
1.00530000000000	0.176091259055	0.176091
1.00540000000000	0.176091259055	0.176091
1.00550000000000	0.176091259055	0.176091
1.00560000000000	0.176091259055	0.176091
1.00570000000000	0.176091259055	0.176091
1.00580000000000	0.176091259055	0.176091
1.00590000000000	0.176091259055	0.176091
1.00600000000000	0.176091259055	0.176091
1.00610000000000	0.176091259055	0.176091
1.00620000000000	0.176091259055	0.176091
1.00630000000000	0.176091259055	0.176091
1.00640000000000	0.176091259055	0.176091
1.00650000000000	0.176091259055	0.176091
1.00660000000000	0.176091259055	0.176091
1.00670000000000	0.176091259055	0.176091
1.00680000000000	0.176091259055	0.176091
1.00690000000000	0.176091259055	0.176091
1.00700000000000	0.176091259055	0.176091
1.00710000000000	0.176091259055	0.176091
1.00720000000000	0.176091259055	0.176091
1.00730000000000	0.176091259055	0.176091
1.00740000000000	0.176091259055	0.176091
1.00750000000000	0.176091259055	0.176091
1.00760000000000	0.176091259055	0.176091
1.00770000000000	0.176091259055	0.176091
1.00780000000000	0.176091259055	0.176091
1.00790000000000	0.176091259055	0.176091
1.00800000000000	0.176091259055	0.176091
1.00810000000000	0.176091259055	0.176091
1.00820000000000	0.176091259055	0.176091
1.00830000000000	0.176091259055	0.176091
1.00840000000000	0.176091259055	0.176091
1.00850000000000	0.176091259055	0.176091
1.00860000000000	0.176091259055	0.176091
1.00870000000000	0.176091259055	0.176091
1.00880000000000	0.176091259055	0.176091
1.00890000000000	0.176091259055	0.176091
1.00900000000000	0.176091259055	0.176091
1.00910000000000	0.176091259055	0.176091
1.00920000000000	0.176091259055	0.176091
1.00930000000000	0.176091259055	0.176091
1.00940000000000	0.176091259055	0.176091
1.00950000000000	0.176091259055	0.176091
1.00960000000000	0.176091259055	0.176091
1.00970000000000	0.176091259055	0.176091
1.00980000000000	0.176091259055	0.176091
1.00990000000000	0.176091259055	0.176091
1.01000000000000	0.176091259055	0.176091

Figura 7.18: Uma página do *Logarithmorum Chilias Prima* de Henry Briggs, publicado em 1617, com aproximações dos logaritmos em base 10 dos números inteiros de 0 à 67 com precisão de 14 casas decimais.

Vamos ilustrar como calcular $\log_2 3$ manualmente utilizando o método da bissecção. Esse método já era utilizado para calcular aproximações¹¹ antes da invenção dos computadores, mas ainda é bastante utilizado na computação.

O método da bissecção

Para aplicarmos o método da bissecção, tomamos uma aproximação superior e outra inferior para o número buscado, encontrando assim um intervalo no qual temos certeza em que a solução se encontra. Então tomamos o ponto médio desse intervalo como a próxima aproximação e testamos se ele é superior ou inferior ao número buscado, então basta substituímos o respectivo extremo do intervalo por ele. Repetindo esse processo obtemos aproximações cada vez melhores para o número buscado.

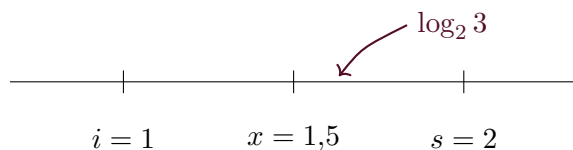
O $\log_2 3$ é o expoente ao qual precisamos elevar 2 para obter 3, ou seja $2^{\log_2 3} = 3$, assim, precisamos encontrar expoentes tais que 2 elevado a esses expoentes se aproxima cada vez mais de 3. Podemos iniciar nossas tentativas com os expoentes 1 e 2. De fato $2^1 = 2 < 3$ e $2^2 = 4 > 3$, junto ao fato que as potências de 2 crescem quando crescem os expoentes, temos $1 < \log_2 3 < 2$.

¹⁰ A seção Para saber +: a régua de cálculo traz mais detalhes sobre essa utilização dos logaritmos

¹¹ Outro uso importante é para calcular raízes ou zeros de funções.

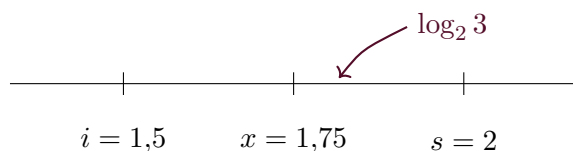
Para aplicar o método, escolhemos então, inicialmente, as aproximações inferior $i = 1$ e superior $s = 2$.

Tomamos, então a metade do intervalo $(1, 2)$ como uma primeira aproximação $x = (1 + 2)/2 = 3/2$.



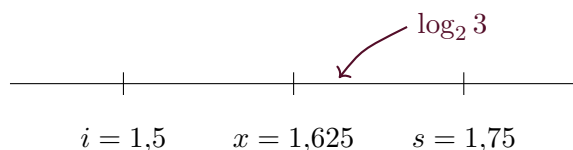
Agora precisamos verificar se $x = 3/2$ é uma aproximação superior ou inferior e fazemos isso verificando se $2^{3/2}$ é maior ou menor do que 3, que é o mesmo que comparar $2^3 = 8$ com $3^2 = 9$, pois a raiz quadrada é uma função crescente. Como $2^3 < 3^2$, temos $2^{3/2} < 3$ e $3/2 < \log_2 3$, novamente pelo fato das potências de 2 crescerem quando crescem os expoentes. Assim, a nova aproximação inferior passa a ser $i = 3/2$ e aproximação superior continua sendo $s = 2$.

Tomamos, então a metade do intervalo $(3/2, 2)$ como uma segunda aproximação $x = (3/2 + 2)/2 = 7/4$.



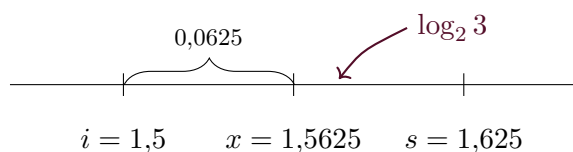
Agora precisamos verificar se $2^{7/4}$ é maior ou menor do que 3, que é o mesmo que comparar $2^7 = 128$ com $3^4 = 81$, pois a raiz quarta é uma função crescente. Como $2^7 > 3^4$, temos $2^{7/4} > \log_2 3$ e $7/4$ é uma aproximação superior.

Tomamos, então a metade do intervalo $(3/2, 7/4)$ como uma terceira aproximação $x = (3/2 + 7/4)/2 = 13/8$.



Agora precisamos verificar se $2^{13/8}$ é maior ou menor do que 3. Para fazer isso comparamos $2^{13/8}$ com 3, que é o mesmo que comparar $2^{13} = 8192$ com $3^8 = 6561$. Como $2^{13} > 3^8$, temos $2^{13/8} > \log_2 3$ e $13/8$ é uma aproximação superior.

Podemos continuar esse processo quantas vezes desejarmos, mas vamos parar com o intervalo $(3/2, 13/8)$ e tomar o ponto médio dele $x = (3/2 + 13/8)/2 = 25/16$ como aproximação.



A aproximação para o logaritmo está boa? Pelo fato de $3/2 < \log_2 3 < 13/8$, temos certeza que $\log_2 3$ está no intervalo $(3/2, 13/8)$. Contudo nossa aproximação está no centro do intervalo e à uma distância menor do que a metade do seu comprimento $((13/8 - 3/2)/2 = 1/16 = 0,0625)$ de qualquer ponto do intervalo, inclusive $\log_2 3$. Assim, garantimos que o erro em nossa aproximação é menor do que 0,0625.

Cálculo do $\log_2 5$

Atividade 26

Utilize o método da bissecção para calcular $\log_2 5$ com erro menor do que 0,25.

PARA SABER + LOGARITMOS COM A RÉGUA DE CÁLCULO

Antes do surgimento e popularização das calculadoras digitais, era muito laborioso efetuar todas as operações de multiplicação e divisão necessárias em muitas atividades, como no controle de estoques, na contabilidade, no cálculo de impostos e em cálculos astronômicos (principalmente ligados à navegação). Os logaritmos foram inventados para facilitar esses cálculos. Frequentemente as operações de multiplicação e divisão são consideradas triviais, contudo para números razoavelmente longos é fácil cometer erros nos cálculos:

Multiplicação manual

Atividade 27

Calcule, sem a utilização de equipamentos eletrônicos,

$$19683 \times 2187.$$

Verifique, com a ajuda de uma calculadora, se obteve a resposta correta.

Erros são bastante comuns em cálculos de multiplicação e representavam um problema sério quando os cálculos eram necessários e não havia nenhum meio eletrônico que permitisse a verificação deles. A respeito deste problema, o escocês considerado o inventor dos logaritmos: John Napier¹², escreveu (tradução livre) em sua obra de 1614:

Dado que nada (caros amadores apaixonados pela Matemática) é tão desagradável à prática matemática (freando e retardando os especialistas no cálculo) quanto as multiplicações, as divisões e as extrações de raízes quadradas ou cúbicas de números grandes que, além do incômodo devido ao seu tamanho, induzem a diversos erros perigosos; como consequência, eu me dediquei a procurar por que meios seguros e cômodos poderia me livrar destas dificuldades.

John Napier - Mirifici logarithmorum canonis descriptio

O cálculo realizado acima pode ser feito de modo muito mais rápido se tivermos uma tabela com os valores das potências de 3 e levarmos em conta que:

- $3^5 = 2187$,
- $3^7 = 19683$,
- $19683 \times 2187 = 3^5 \times 3^7 = 3^{12} = 43046721$.

Assim, podemos utilizar a [tabela 7.3](#) para fazer cálculos de multiplicação ou divisão, somando ou subtraindo os logaritmos e localizando o resultado correspondente a soma, ao invés de multiplicar explicitamente:

- $5 \times 4 \approx 2^{2,32} \times 2^2 = 2^{2,32+2} = 2^{4,32} \approx 20$;
- $3 \times 5 \approx 2^{1,58} \times 2^{2,32} = 2^{1,58+2,32} = 2^{3,9} \approx 15$;
- $3 \times 9 \approx 2^{1,58} \times 2^{3,16} = 2^{1,58+3,16} = 2^{4,74} \approx 27$.

¹²Também conhecido como John Naper ou Ioannes Neper na versão latinizada de seu nome.



Figura 7.19: Uma régua de cálculo

Fonte: Slide Rule em Flickr / Usuário: The Last Cookie

■ $20 \div 4 \approx 2^{4,32} \div 2^2 = 2^{4,32-2} = 2^{2,32} \approx 5.$

Apesar dos cálculos da soma dos expoentes não darem, necessariamente, os valores exatos que temos na tabela, buscamos o que melhor se aproxima. Fazemos isso pois sabemos que o produto de dois naturais é novamente um natural e temos todos os naturais até 30 listados na tabela.

Napier escreveu um livro inteiro de logaritmos tabelados para consulta e utilização em cálculos. Henri Briggs, um dos pais dos logaritmos, publicou um livro¹³ com todos os logaritmos em base 10 dos números naturais de 1 à 20000. Mas, não é muito prático carregarmos uma longa tabela por aí. Para lidar com esse problema, William Oughtred (1574 – 1660) inventou réguas de cálculo.

A régua linear de Oughtred efetuava multiplicações e divisões com duas escalas logarítmicas, fazendo as partes da régua deslizarem uma sobre a outra. A régua de cálculo, com suas variantes, foi, durante mais de 300 anos, uma ferramenta indispensável para engenheiros e cientistas, era um presente dado de pais para filhos ao final do ginásio. Ela aprimorada por diversos cientistas e engenheiros até chegar em sua versão atual. Estudaremos uma régua de cálculo simplificada nas atividades seguintes.

¹³Há uma foto de uma página do livro no *Para saber +: sem ferramentas de cálculo...*

A Régua de Cálculo

Na régua aritmética ou linear, o comprimento 1cm corresponde ao número 1, o comprimento 2 cm corresponde ao número 2 e assim sucessivamente. Na régua de cálculo logarítmica de base 2, o número 1 corresponde ao comprimento do logaritmo de 1 em base 2, o número 2 corresponde ao comprimento do logaritmo de 2 e assim por diante. A [figura 7.21](#) ilustra uma régua de cálculo formada por duas partes, cada uma com uma linha central e uma escala linear, ambas na cor cinza, e uma escala logarítmica na cor preta. Note que na escala logarítmica marcamos, por exemplo, o número 3 à distância 1,59 do ponto inicial da escala, o número 1, pois $\log_2 3 \approx 1,59$.

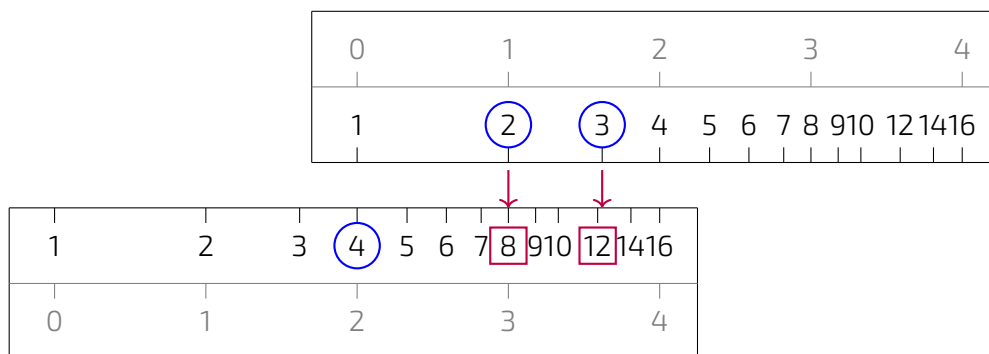


Figura 7.20: Uma régua de cálculo e sua utilização calculando 4×2 e 4×3 .

Fonte: Logaritmos e a régua de cálculo, Pedrosa & Adames.

Podemos utilizar as régua de cálculo para fazer multiplicações ou divisões.

Para multiplicar $a \times b$, basta colocar as duas metades da régua uma sobre a outra, como na figura, colocando o número 1 da metade superior da régua sobre a . O resultado estará então abaixo de b . Como ilustra a [figura 7.21](#) nas multiplicações 4×2 e 4×3 .

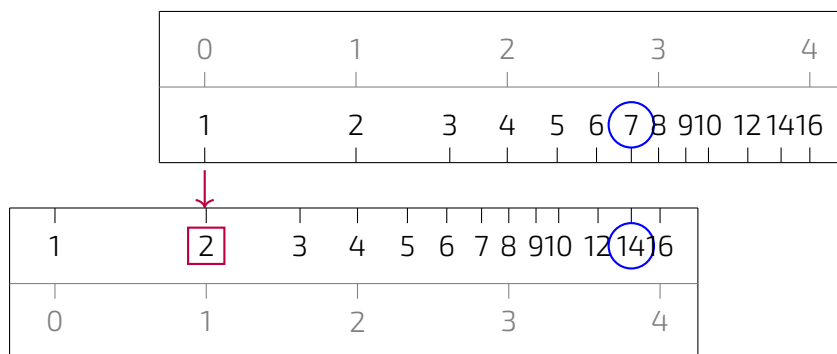


Figura 7.21: Uma régua de cálculo utilizada para calcular $14 \div 7$.

Para dividir a/b , basta colocar as duas metades da régua uma sobre a outra, como na figura, colocando o número b da metade superior da régua sobre a . O resultado estará então abaixo do número 1. Como pode ser visto no resultado de $14 \div 7$, que está abaixo do número 1.

Isso funciona pois ao colocarmos as régua assim, estamos adicionando ou subtraindo os comprimentos dos logaritmos dos respectivos números (na escala linear em cinza claro).

Por fim ainda temos o problema que a base dois cresce muito rapidamente. Para resolver isso podemos tomar uma que seja bem próxima de 1 e um pouco maior.

Produzimos réguas de cálculo, que estão no final do capítulo, utilizando a base $x = 10^{1/50} \approx 1,04713$, de modo que $\log_x 100 = 100$. As graduações na régua correspondem aos logaritmos em base x dos números de 0 a 10 com uma casa decimal de precisão e dos números naturais de 11 até 100. A régua também contém uma escala linear e as posições dos números na escala logarítmica correspondem aos valores dos logaritmos daqueles números na base x . A [figura 7.22](#) ilustra a régua.

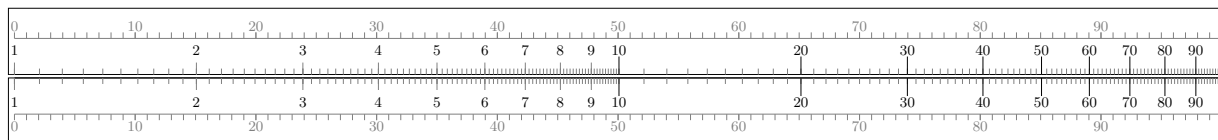


Figura 7.22: A régua de cálculo que acompanha este material.
Fonte: Logaritmos e a régua de cálculo, Pedrosa & Adames.

Cálculos com a régua

Atividade 28

Em pequenos grupos, vamos utilizar as réguas de cálculo para efetuar os seguintes cálculos:

- a) 9×7 .
- b) $3,5 \times 4$.
- c) $2,8 \times 2,5$.
- d) 28×25 .
- e) $3,2 \times 3,1$.
- f) $5,8 \times 9,3$.
- g) 583×93 .
- h) 78326×648 .
- i) $56 \div 7$.
- j) $58 \div 4$.
- k) $93 \div 5$.
- l) $476 \div 93$.
- m) $7345 \div 57$.

PARA SABER + AJUSTES DE CURVAS

Quando buscamos uma função para aproximar dados reais, podemos escolher que tipo de função parece mais adequada (o que pode ser um pouco subjetivo). Contudo, quando escolhemos um tipo de função, que valores escolhemos para os coeficientes dessa função? Por exemplo, se os dados parecem crescer como uma função logarítmica, qual deve ser a base? Para determinarmos essas constantes existem métodos mas que muitos programas de computador podem calcular automaticamente.

A caderneta de saúde abaixo traz as medidas (nas datas especificadas) da idade, do peso, da altura e do perímetro encefálico de uma criança.

ACOMPANHAMENTO DO CRESCIMENTO				
DATA	IDADE	PESO	ALTURA	P.C. ⁽¹⁾
25/03/11	8 dias	3350	50,5	35
28/04/11	1m 11 dias	4500	55	38
14/07/11	3m 27 dias	6300	62	41,5
15/08/11	5m	7450	65,5	42
13/10/11	7m	9200	70	44,5
02/12/11	8m	10020	73	44
26/01/12	10m	10850	75	45
19/03/12	1A	11.560	78,5	46
15/04/12	1A 6 meses	13.100	85	47
26/02/13	1A 11m	14kg	92	48,5
22/4/14		18380g	100	
24/11/14	3a 8m	203	107	Annito.
10/06/15	4anos 3m	20.500	110	
03/03/16	4anos 11m	23kg	116	
13/11/18	7a 7m	33,3	134	

Figura 7.23: Dados médicos na carteirinha de uma criança.

Anotamos os dados de idade e altura no GeoGebra, no endereço abaixo, e utilizamos as funções do programa para aproximar os dados utilizando curvas do tipo: exponencial, logarítmica, linear, logística, potência e polinomial.



<https://www.geogebra.org/calculator/za7dq64a>

PARA REFLETIR

Vamos observar as funções mostradas pelo *applet*. Quais dos ajustes parecem adequados ao crescimento da altura de uma pessoa? Quais levariam a previsões absurdas? Justifique os motivos que o levaram a realizar essas escolhas.

Foge dos objetivos desse material estudar em detalhes os métodos para encontrar as funções que *melhor aproximam* os dados reais de cada um dos tipos. Contudo um dos métodos, chamado de *regressão linear* está relacionado com os logaritmos.

VOCÊ SABIA?

A *regressão linear* é um método utilizado com frequência para encontrar a função exponencial $y(x) = a \times b^x$ que melhor aproxima dados reais e consiste em aplicar logaritmos dos dois lados da equação, obtendo $\log y = \log a + x \log b$, que é uma equação linear do tipo $v = c + dx$, com $v = \log y$ e constantes $c = \log a$ e $d = \log b$. Essa nova equação pode ser ajustada aos logaritmos dos dados reais por um método chamado de mínimos quadrados, encontrando os melhores valores para c e d e, então, achamos $a = 10^c$ e $b = 10^d$.

Regressão linear**Atividade 29**

Utilizando os dados reais do número de casos nos Estados Unidos (fonte: *Our World in Data*) entre 22/01/2020 e 21/03/2020, aplicamos regressão linear com uma ferramenta computacional para estimar o número de casos pela fórmula $f(t) = 0,000275279 \times 1,36451^t$, onde $t = 0$ representa o dia 22/01 e $t = 59$ o dia 21/03.

Utilizando a fórmula, quantos dias seriam necessários para que a pandemia ultrapassasse 100.000 infectados naquele país?

Vamos comparar os dados obtidos pela fórmula com os dados reais.

	22/03	23/03	24/03	25/03	26/03	27/03
Dados reais	33.404	44.183	54.453	68.440	85.356	103.321
Previsão da função	34.544	47.136	64.317	87.762	119.752	163.403

Tabela 7.8: Total de Casos nos E.U.A.

Os valores são próximos no começo, mas começam a ficar distintos. Explicamos isso pelo fato da pandemia não se desenvolver livremente, mas há reações da população e das autoridades, como medidas sanitárias, que podem reduzir as taxas de infecção.

PARA SABER + LOGARITMOS E PROGRESSÕES

Napier pensava nos logaritmos como produzidos por um movimento dinâmico. Traduzimos isso pensando em dois objetos P e Q movendo-se sobre duas semi-retas, um partindo da origem 0 e o outro do número 1, de modo que o primeiro desloca-se com velocidade constante, mas o segundo tem velocidade proporcional a distância que ele está da origem da semi-reta. Assim, se tomarmos intervalos de tempo igualmente espaçados $T, 2T, 3T, 4T, \dots$, obtemos posições distintas $P_1, P_2, \dots$ e $Q_1, Q_2, \dots$ para os dois objetos, como ilustra a [figura 7.24](#).

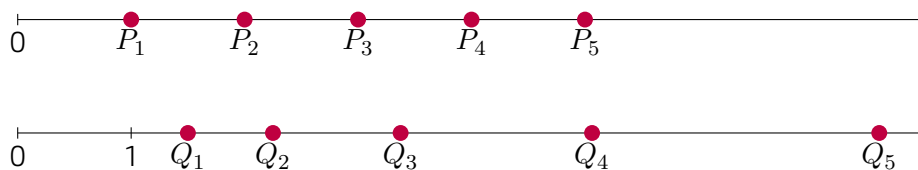


Figura 7.24: Objetos movendo-se com velocidades distintas.

Podemos, então, associar os pontos das duas semi-retas entendendo que dois pontos P_t e Q_t estão associados se os objetos P e Q estão nessas respectivas posições no mesmo instante t . Assim, Q_1 está associado à P_1 , Q_2 está associado à P_2 e assim por diante.

Progressões

Atividade 30

Vamos pensar que o objeto P na primeira reta move-se, a cada segundo, uma unidade para a direita e que inicia na origem. Já o objeto Q inicia a duas unidades da origem e move-se, a cada segundo, uma quantidade de unidades igual à distância que está da origem. Escreva os 10 primeiros termos da sequência de distâncias à origem de cada um dos objetos.

- Você reconhece as duas sequências que estão se formando?
- Quais os valores dos logaritmos em base 2 dos valores encontrados na segunda sequência?
- Você consegue reconhecer esses logaritmos na primeira sequência?

Observamos que a sequência das distâncias do ponto Q à origem forma a P.G. $Q_n = r^n$, de razão r , e a sequência das distâncias do ponto P à origem forma uma P.A. $P_n = n$. A interpretação de Napier é que o logaritmo do número r^n da P.G. é o número associado na P.A., n . Assim, Napier associava os conceitos de P.A. e P.G. ao conceito de logaritmo.

PARA SABER + A LEI DE WEBER

Vamos considerar as seguintes situações:

- Uma lanchonete vende um hambúrguer por R\$ 30,00 e outra lanchonete vende um hambúrguer similar por R\$ 20,00. A diferença de preço parece significativa para você? Seria importante na decisão de qual lanchonete visitar?
- Uma loja de eletrodomésticos vende uma geladeira por R\$1.837,00 e outra loja vende uma geladeira similar por R\$1.847,00. A diferença de preço parece significativa para você? Seria importante na decisão de qual geladeira comprar?

Muitas pessoas diriam que a diferença de R\$ 10,00 no primeiro caso é significativa, mas que a mesma diferença é irrelevante no segundo caso. Isso ocorre porque nossos sentidos percebem as mudanças de acordo com a magnitude dos valores envolvidos. Vimos exemplos de situações similares no Decibel, no pH e nas escalas Richter e de Magnitude de Momento Sísmico, nas quais são necessárias alterações significativas nos estímulos para percebermos diferença nos eventos.

A Lei de Weber, ou Lei de Weber-Fechner, foi proposta (para a percepção de pesos) por Ernst Heinrich Weber em 1834 e afirma que nossas percepções aos estímulos do mundo real variam de acordo com o tamanho dos estímulos e, deste modo, em escala logarítmica.

Essa lei empírica é utilizada para determinar alterações nos preços e nos tamanhos de embalagens de produtos (como o chocolate, por exemplo, cujas embalagens são frequentemente reduzidas).

Criando a própria escala.

Atividade 31

Vamos desenvolver a nossa própria escala para compararmos preços distintos? Isso precisará ser feito em etapas:

- escolha uma categoria de produto, como automóveis, televisores, motocicletas, videogames, ...;
- escolha dois produtos dentro da categoria, A e B, com preços a e b , significativamente distintos, que tenham o mesmo custo-benefício para você;
- determine um percentual $0 < p < 1$, que o produto mais caro é melhor do que o produto mais barato para você (o que é subjetivo e não precisa estar diretamente ligado aos preços dos produtos);
- escreva a sua própria função de valor relativo percentual através da expressão

$$v(x) = p \log_{b/a} \left(\frac{x}{a} \right),$$

de modo que $v(b) = p$ e $v(a) = a$, ou seja, $v(x)$ tenta estimar a diferença percentual no valor relativo do produto B com o produto A (para você);

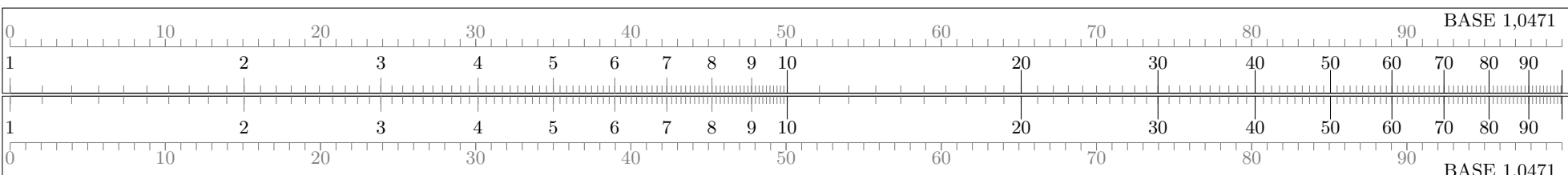
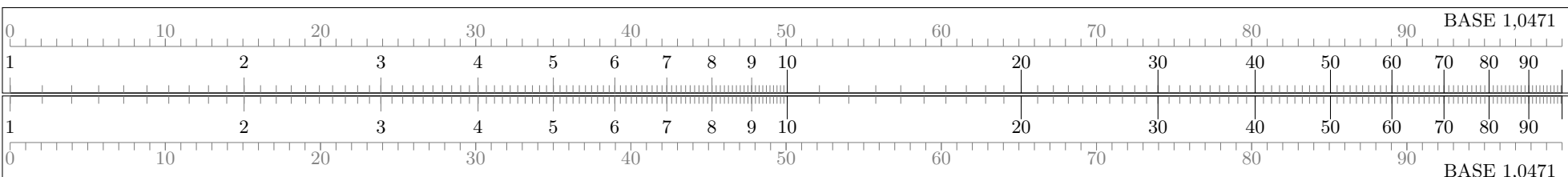
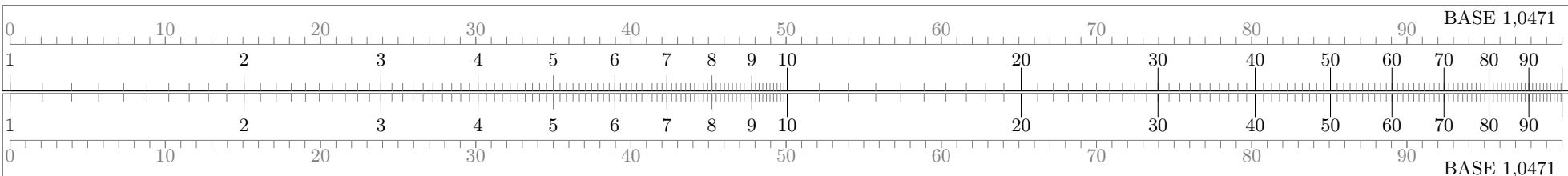
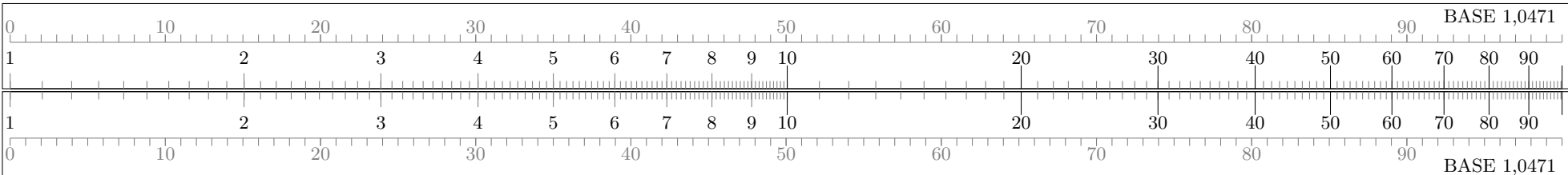
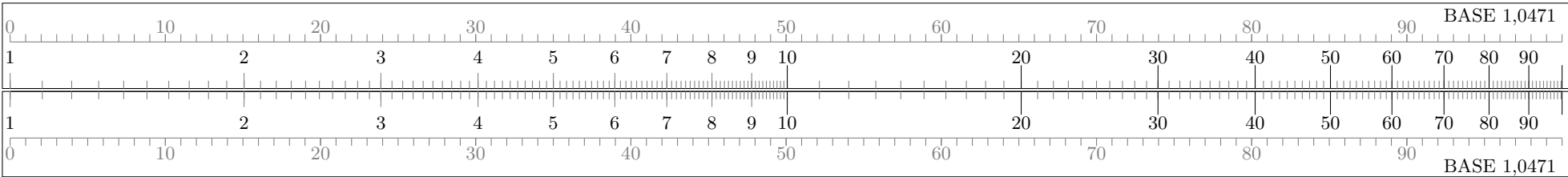
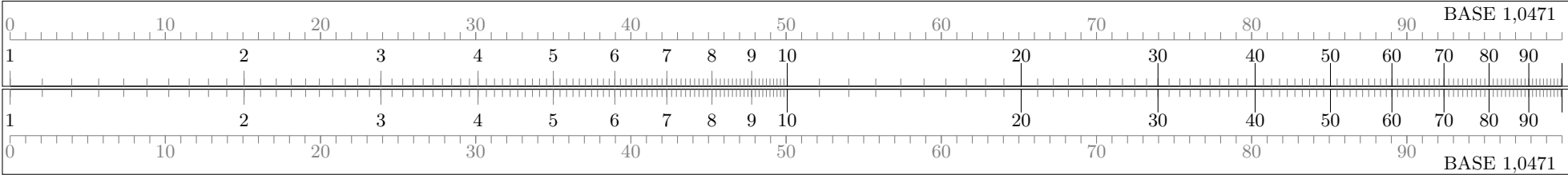
- e) encontre três produtos C , D e E , na mesma categoria dos anteriores, anote os preços deles c , d e e , e determine os percentuais p_c , p_d e p_e que eles são melhores ou piores do que o produto A (o que é subjetivo);
 - f) calcule $v(c)$, $v(d)$ e $v(e)$ e observe se os valores concordam com os percentuais que você estimou;
 - g) p_c , p_d , p_e são maiores, menores ou iguais a $v(c)$, $v(d)$, $v(e)$, respectivamente? o que essa informação diz sobre o custo benefício dos produtos?
 - h) você acha que os resultados obtidos condizem com as suas percepções ou a fórmula apresentou grandes distorções?
-

Um banco tem 4 opções de investimento (A : sem risco, B: baixo risco, C: médio risco e D: alto risco), com taxas de juros mensais de 1%, 2%, 5% e 7% respectivamente. Você investirá R\$10.000,00 em um desses investimentos e quer obter R\$15.000,00.

- a) Quantos meses você levará para atingir seu objetivo em cada um dos Planos?

Plano	A	B	C	D
Taxa	1%	2%	5%	7%
Tempo				

- b) Nesse item propomos um jogo. "JOGO DE RISCO" depois que os alunos calcularem o tempo (em meses) para acumular o valor desejado eles devem escolher um dos planos possíveis para investir seu capital. Cada aluno escolhe, então, 0, 1, 2 ou 3 "números do azar" de 0 a 9. Quem escolheu o plano A escolhe 0 números de azar e quem escolheu D deve escolher 3 números. A cada mês o professor sorteará um número de 0 a 9 e aqueles que tiverem o número sorteado perdem tudo e saem do jogo. O primeiro a atingir o montante desejado vence.



Referências Bibliográficas

- ADW Team (2013). Animal diversity web - quardvark. University of Michigan - Museum of Zoology. Disponível em: <https://animaldiversity.ummz.umich.edu/quardvark/help/howto/>.
- Ball, P. (2008). Why we should love logarithms. *Nature*.
- Berezovski, T. (2010). *An Inquiry into High School Students' Understanding of Logarithms*. VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, Alemanha.
- Bortolossi, H. J., Queiroz, J. J. D. B. e da Silva, M. M. (2016). A lei de zipf e outras leis de potência em dados empíricos. Relatório técnico, Instituto de Matemática e Estatística Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil.
- Brasil (2016). *Brasil no PISA 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil.
- Brasil (2018a). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.
- Brasil (2018b). *Sistema de Avaliação da Educação Básica - Documentos de Referência, Versão 1.0*. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Brasília, Brasil.
- Buck, R. P., Rondinini, S., Covington, A. K., Baucke, F. G. K., Brett, C. M. A., Camões, M., Milton, M. J. T., Mussini, T., Naumann, R., Pratt, K., Spitzer, P. e Wilson, G. S. (2002). Measurement of ph. definition, standards, and procedures (iupac recommendations 2002). *Pure and applied chemistry*, 74(11):2169–2200.
- Encyclopaedia Britannica, T. E. o. (2020). Weber's law. Em *Encyclopædia Britannica*. Encyclopædia Britannica.
- Flerlage, K. (2017). The solar system to scale. Disponível em: <https://www.flerlagetwins.com/2017/04/all-us-of-remember-learning-about.html>. An optional note.
- Heuvel-Panhuizen, M. v. d. e Drijvers, P. (2020). *Realistic Mathematics Education*, página 521–525. Springer Netherlands, Dordrecht, Holanda,.
- Kenney, R. e Kastberg, S. E. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27:12–20.
- Liang, C. B. e Wood, E. (2005). Working with logarithms: Students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, 8(2):53–70.
- Meyer-Vernet, N. e Rospars, J. (2015). How fast do living organisms move: Maximum speeds from bacteria to elephants and whales. *American Journal of Physics*, 83:719–722.
- OCDE/IMPA (2018). *10 Questões para Professores de Matemática ... e como o PISA Pode Ajudar a Respondê-las*. SBM, Rio de Janeiro, Brasil.
- Panagiotou, E. (2010). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Science & Education*, 20:1–35.
- Pedrosa, R. E. M. e Adames, M. R. (2018). *Logaritmos e a régua de cálculo: Uma proposta de ensino*. Edição do autor, Curitiba, Brasil. Disponível em: <http://paginapessoal.utfpr.edu.br/marcioadames/pesquisa>.

Webb, D., Kooij, H. e Geist, M. (2011). Design research in the netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2.

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible — operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37:69–98.



Funções Trigonométricas

O QUÊ?

Fenômenos Periódicos, Radiano, Funções Seno e Cosseno, Senóides.

POR QUÊ?

Fenômenos periódicos são aqueles que se repetem com o tempo. Alguns exemplos de tais fenômenos são os batimentos cardíacos, as fases da lua, do nascer do sol, o movimento dos ponteiros de um relógio ou de um pêndulo. O próprio movimento de rotação da Terra é um fenômeno periódico que se repete em períodos de 24 horas, sendo o responsável pelas noções de dia e de noite. As funções trigonométricas, diferente das demais que estudamos até aqui, têm a propriedade de serem periódicas, isto é, seus gráficos se replicam ciclicamente em intervalos determinados do seu domínio. Esta característica faz dessas funções as mais adequadas para modelar matematicamente e prever informações sobre os fenômenos periódicos.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título: Funções Trigonométricas

Ano/ Versão: 2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021

Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Produção: Associação Livro Aberto

Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)

Autores: Douglas Monsôres de Melo Santos (UFRRJ)
Gisela Maria da Fonseca Pinto (UFRRJ)
Luciano Vianna Félix (UFRRJ)

Revisão: Wanderley Rezende

Design: Andreza Moreira (Tangentes Design)

Diagramação: Tarso Caldas

Ilustrações: Miller Guglielmo

Capa: Foto de Kayra Ranai no Unsplash
<https://unsplash.com/photos/lt00tR5ti2I>

Desenvolvido por

Licença:



Patrocínio:



EXPLORANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS

Iniciaremos este capítulo estudando exemplos de fenômenos do nosso cotidiano que têm uma propriedade até então não observada nos capítulos anteriores do livro de Funções: são fenômenos que se repetem com o passar do tempo. Um dos objetivos desse capítulo é estudar técnicas de modelagem matemática desse tipo de fenômeno, visando antever situações relacionadas a ele. Quais seriam as funções adequadas para realizar essa modelagem? Realizando as atividades a seguir, você irá aos poucos descobrir que funções são essas e que características algébricas e gráficas elas possuem.

Pêndulo de um relógio

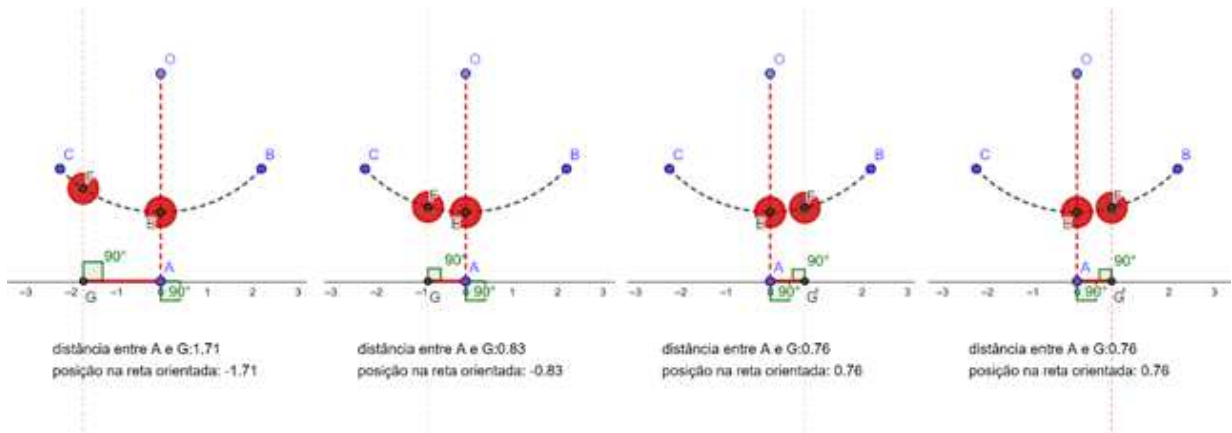
Atividade 1

(Adaptado de Costa (2017))

Alguns relógios rústicos têm um pêndulo, composto por uma bolinha presa à parte de baixo de uma haste que oscila continuamente de um lado para o outro. O fato de o pêndulo estar em movimento mostra que o relógio está em pleno funcionamento.



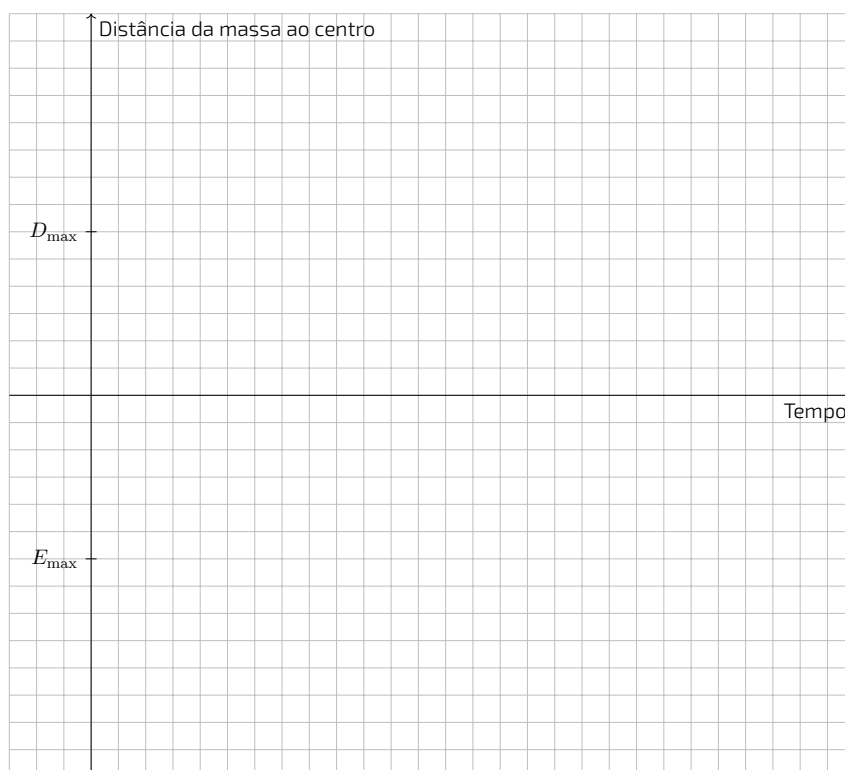
Vamos estudar o comportamento da projeção do centro dessa bola numa reta horizontal localizada abaixo desse relógio, supondo que a origem dessa reta coincida com a projeção do centro da bola quando a haste do pêndulo está na posição vertical. Em outras palavras, vamos estudar as variações dos pontos da reta alcançados pela projeção do centro da bola. As imagens a seguir ilustram algumas possíveis posições do pêndulo. O centro do pêndulo está representado pelo ponto E ; os pontos C e B são os pontos extremos do caminho percorrido pelo pêndulo. O ponto O é aquele em que o pêndulo se encontra preso ao relógio. O ponto F indica possíveis posições do pêndulo, e o ponto G indica a projeção de E na reta orientada a seguir. Observe as diferentes posições de F ilustradas e os valores da distância entre A e G (A é a projeção de O na reta orientada). A construção no GeoGebra do movimento de um pêndulo similar a esse pode ser acessada no link <https://www.geogebra.org/classic/uxcqamaz>



Suponha que no tempo t , a função que descreve o deslocamento dessa projeção seja $d(t)$. Note que, como estabelecemos uma posição como origem, esta função é considerada com sinal assumindo um valor positivo quando o pêndulo estiver à direita do segmento OA ($d(t_1) \geq 0$) e assumindo um valor negativo quando estiver à esquerda de OA ($d(t_2) \leq 0$), conforme é possível ver na ilustração acima: a distância entre A e G é um módulo, é absoluta; no entanto, quando consideramos a posição na reta orientada, atribuímos um sinal a essa distância.



- a) Na malha quadriculada abaixo, considere $D_{\max}$ e $E_{\max}$ o maior e o menor valor assumidos pela função d . Repare que $D_{\max}$ corresponde à projeção do ponto B na reta horizontal, que é o ponto mais à direita que é atingido pelo centro da bolinha ao longo da oscilação do pêndulo. Da mesma forma, $E_{\max}$ corresponde à projeção de C, que é o ponto mais à esquerda que é atingido pelo centro da bolinha durante o movimento. Tente esboçar o gráfico da função $d(t)$, supondo que $d(0) = D_{\max}$.



- b) Que aspectos você percebe que esse gráfico possui? Cite algumas diferenças entre ele e os gráficos das funções que você estudou até aqui.

Construindo o próprio pêndulo

Atividade 2

(Adaptado de Costa (2017))

Com madeira, um prego, barbante e uma bolinha de gude, construir um pêndulo como o da figura.

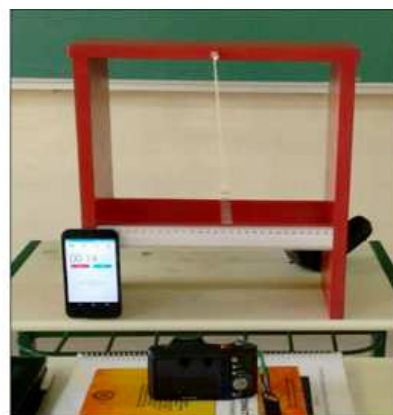
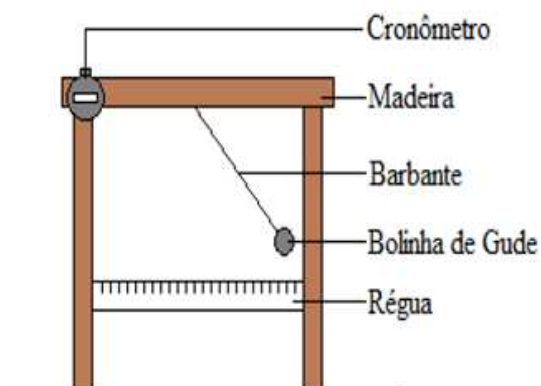


Figura 8.1: Costa (2017)

Será necessário o uso de dois celulares ou um celular e uma câmera. Um dos celulares irá cronometrar o tempo durante a oscilação do pêndulo e o outro, deverá tirar sucessivas fotografias do movimento do pêndulo e do primeiro celular. Uma régua deve ser utilizada também para medir o deslocamento horizontal da projeção do pêndulo, como na figura acima. Posicione o pêndulo exatamente sobre o zero da régua e solte-o no momento em que cronômetro for ligado e as fotos comecem a ser tiradas. Fotografar o movimento ao longo de 4 oscilações completas do pêndulo.

- Analise as fotografias e forme pares ordenados (x, y) onde x representa o tempo e y , a medida na régua na qual estará a projeção horizontal do pêndulo.
- Plote os pontos no GeoGebra. Que comportamento você consegue perceber no caminho que os pontos vão percorrendo?
- Compare o esboço que você obteve aqui com o da atividade anterior. Que conclusões você consegue tirar?

Construindo uma Roda Gigante

Atividade 3

Utilizando papelão, tampinhas de garrafa, cola e um lápis, construir uma roda gigante como a da figura.

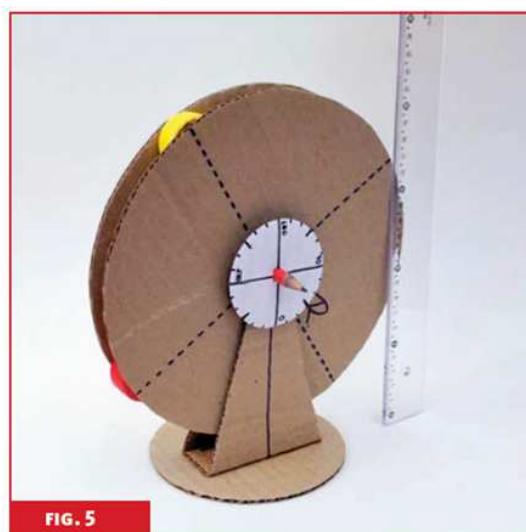


Figura 8.2: Fonte: Soares (2010)

Será necessário também o uso de um transferidor para medir os ângulos e uma régua para medir a altura das “cabines”.

Um passageiro entra na cabine quando essa está em seu ponto mais baixo. A partir daí, a roda

começa a girar no sentido anti-horário, numa velocidade constante de 20 graus por segundo. Considere $h = h(t)$ a altura em centímetros da cabine no instante de tempo t , medido em segundos.

- Calcule a medida do raio da roda gigante e também as alturas mínima e máxima que a cabine pode assumir.
- Quantos segundos a roda gigante demora para dar uma volta completa?
- Com o auxílio dos seus colegas, encontre a altura da cabine em cada segundo do movimento da roda gigante até ela completar uma volta. Marque num papel milimetrado os pontos $(t, h(t))$ obtidos.
- Entre a altura máxima e a altura mínima, há alguma altura intermediária que a cabine atinge mais de uma vez ao longo de cada volta da roda gigante? Quanto mede essa altura intermediária?
- Determine todos os valores assumidos pela altura h da cabine ao longo de uma volta completa da roda gigante.
- Observando os pontos marcados no item **c)** e a dinâmica do giro da roda gigante, responda: apesar da velocidade com que a roda gigante gira ser constante, também será constante a taxa de variação da altura da cabine?
- Esboce no papel milimetrado uma curva que represente o gráfico de função $h = h(t)$. Como será o gráfico da função para valores de t maiores que 18 s?
- Como seria o gráfico de $h = h(t)$ se a velocidade do giro da roda gigante duplicasse, ou seja, se ela demorasse apenas 9 s para dar uma volta completa? Que alterações podem ser observadas em relação ao gráfico traçado no item **g)**?

PARA REFLETIR

Roda Gigante Virtual

Acesse o link de uma roda gigante construída virtualmente no GeoGebra através do seguinte link <https://www.geogebra.org/m/g8mnpqpx>

Também é possível visualizar nesse link o gráfico que relaciona a altura da cabine da roda gigante virtual com o tempo.

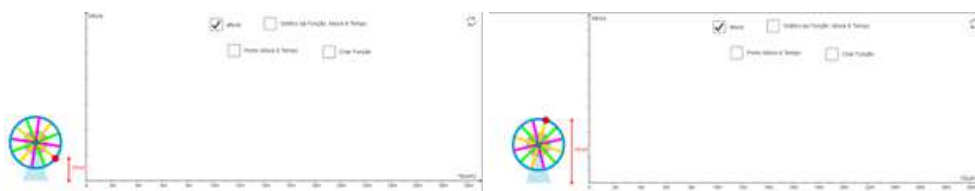


Figura 8.3: Observação da altura da cabine

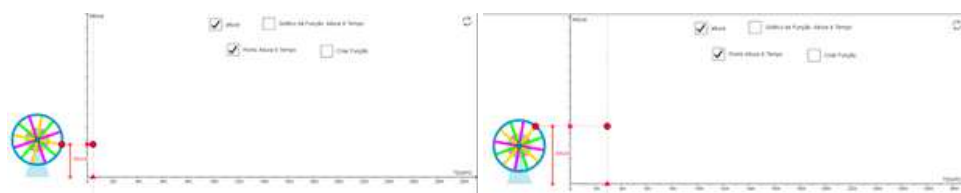


Figura 8.4: Observação do ponto do plano que associa a x o tempo e a y a altura da cadeira

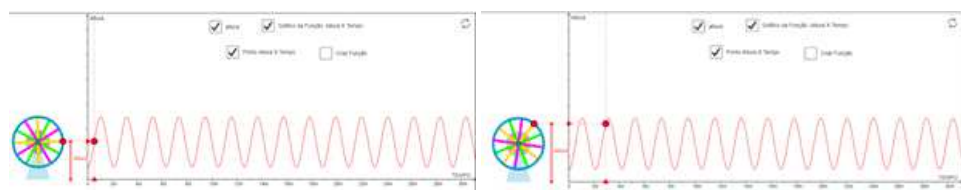


Figura 8.5: Observação do gráfico da função que associa a x o tempo e a y a altura da cadeira

Compare esse gráfico com o gráfico obtido por você e seus colegas na atividade anterior. Como você acha que deveria ser o gráfico se o movimento começasse quando a cabine estivesse no ponto mais alto da roda? E como seria o gráfico se a velocidade com que a roda gigante gira fosse reduzida à metade?

ORGANIZANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS.

O que os fenômenos apresentados nas atividades anteriores têm em comum? Se considerarmos uma situação ideal em que o mesmo fenômeno se repete *exatamente* da mesma maneira ao longo do tempo, podemos dizer que o pêndulo do relógio sempre vai e volta ininterruptamente e que a roda gigante dá várias voltas sem parar. Fenômenos assim são chamados de *periódicos*, ou seja, que se repetem exatamente da mesma forma ao longo do tempo. Ao estudarmos matematicamente as situações que usamos como exemplo aqui, consideramos um modelo. Um *modelo matemático* é uma descrição matemática a partir da observação de algum fenômeno observado no mundo físico. Claro que, ao fazermos essa descrição em termos matemáticos, precisamos fazer algumas restrições e suposições que não necessariamente ocorreram ou ocorreriam de fato no fenômeno observado – mas, com um modelo, é razoável que consideremos essas restrições. Por exemplo, a suposição de que um pêndulo como o da primeira ou da segunda atividade oscila ininterruptamente não ocorre no mundo real: o relógio pode atrasar por algum problema no mecanismo ou até mesmo parar, por exemplo. A roda gigante precisa parar sempre que alguém vai subir ou descer do brinquedo. Mas, as restrições que são feitas para criar o modelo possibilitam que o fenômeno seja estudado, que previsões sejam feitas, além de permitir que outros fenômenos sejam classificados por semelhanças ou diferenças.

Você conhece mais alguns fenômenos periódicos que acontecem na vida?



Figura 8.6: Fonte: [Solar System Scope](#)

O movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo é um movimento periódico que demora 24 h para completar um ciclo (período de 24 h) e o movimento de translação da Terra ao redor do Sol demora 365 dias e 6 h para completar um ciclo (período de 365 dias e 6 h).

Nas atividades anteriores você fez os gráficos de funções que representam fenômenos periódicos. Por esse motivo elas também serão chamadas de *funções periódicas*, ou seja, funções cujos valores da imagem se repetem em intervalos fixos. Mais precisamente, uma função $y = f(x)$ é chamada de periódica, se existe algum valor p tal que $f(x) = f(x + p)$, para todos os valores de x tais que x e $x + p$ pertençam ao domínio dessa função. O menor valor positivo de p que satisfizer a essa propriedade será chamado o período dessa função.

Para entender melhor os conceitos que estamos apresentando, vamos discutir um pouco sobre

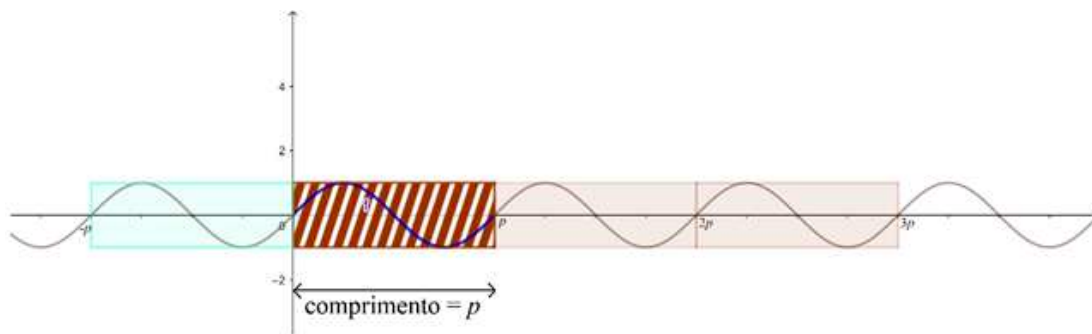
a Atividade “Construindo uma Roda Gigante”. Nela, você foi orientado a observar o comportamento de uma cabine em específico. Como a roda gigante tem velocidade de rotação constante, o comportamento se repete a cada volta. Isso significa que o gráfico que você gerou para a primeira volta completa da roda gigante vai se repetir exatamente dessa mesma forma por todo o tempo em que a roda gigante permanecer girando. Esse é, portanto, um *fenômeno periódico*.

A velocidade de rotação é de 20 graus por segundo; logo, uma volta completa (360°) será alcançada após 18 segundos. Decorridos os primeiros 18 segundos de movimento, a roda gigante vai ter dado uma volta completa e a cabine observada terá voltado para sua posição inicial. Matematicamente, podemos escrever que $h(0) = h(18)$. Independentemente da posição ocupada pela cabine no instante t , após 18 segundos a roda gigante dará uma volta completa e a cabine voltará para a mesma posição em que estava quando começamos a marcar o tempo. Matematicamente, essa observação pode ser registrada como $h(t) = h(t + 18)$. É interessante observar que isso é verdade para outros valores: por exemplo, após 36 segundos, a roda gigante terá dado 2 voltas, portanto $h(t) = h(t + 36)$. De maneira mais geral, considerando um número inteiro positivo k , a roda gigante terá dado k voltas após $18k$ segundos e, portanto, $h(t) = h(t + 18k)$, o que indica que essa função é periódica de período 18, pois esse é o menor valor necessário para que se tenha um ciclo completo do fenômeno observado, ou seja, da roda gigante em movimento.

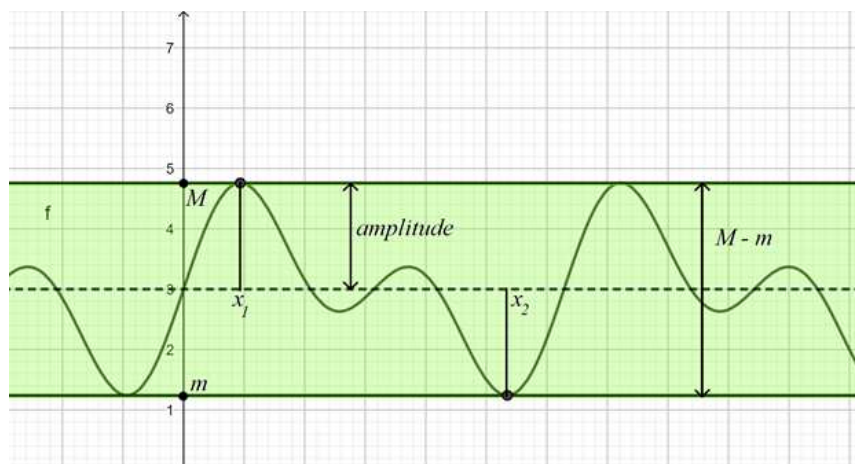
Mas será que esse é de fato o menor valor para o qual esse ciclo se repete? Note que, por exemplo, quando $t = 4,5$, a roda gigante terá dado $\frac{1}{4}$ de volta, e portanto, $h(4,5) = r$. Após 9 segundos, a roda gigante terá dado mais $\frac{1}{2}$ volta, assim, a cabine estará a mesma altura que estava no instante $t = 4,5$, o que indica que $h(4,5) = h(4,5 + 9)$. Será que isso significa que 9 pode ser o período dessa função? Se isso fosse verdade, precisaríamos ter $h(t) = h(t + 9)$, para todos os valores t do domínio; no entanto, isso não é verdade, uma vez que no instante $t = 0$ a cabine está na posição mais baixa e no instante $t = 9$, a roda gigante terá dado $\frac{1}{2}$ de volta e, portanto, a cabine estará na posição mais alta e não de volta ao início, como seria necessário. Note ainda que depois do instante $t = 0$, a cabine só voltará para a posição inicial após dar uma volta completa, portanto, após 18 segundos. Logo, não existe $p < 18$ tal que $h(0) = h(0 + p)$; ou seja, o período é, de fato 18.

Repare que, uma vez conhecido o comportamento do gráfico dessa função na faixa $0 \leq t \leq 18$, também conhecemos o comportamento dela na faixa $18 \leq t \leq 36$: será exatamente a repetição do gráfico da faixa anterior, uma vez que a partir de $t = 18$ a função se comporta da mesma maneira que se comportava entre $t = 0$ e $t = 18$. De maneira mais geral, o gráfico na faixa $18k \leq t \leq 18(k + 1)$ será uma cópia da faixa do gráfico na faixa $0 \leq t \leq 18$.

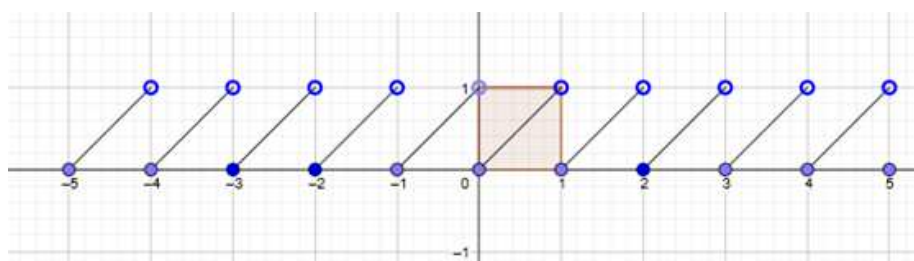
O período desempenha um papel importante no gráfico de uma função periódica: se conhecermos o desenho do seu gráfico num trecho sobre um intervalo do domínio de comprimento p então podemos esboçar o gráfico inteiro da função, “copiando e colando” esse trecho ao longo de todo o domínio.



A amplitude é outra característica importante quando estudamos uma função periódica. Quando a imagem $f(x)$ de uma função periódica assumirem um valor máximo M e também um valor mínimo m , definimos a *amplitude* de f como sendo $a = \frac{(M-m)}{2}$. Geometricamente, a menor faixa horizontal que contém o gráfico da função f terá largura igual ao dobro da amplitude.



Na figura a seguir, vemos o gráfico de uma função f definida no intervalo $[-5, 5]$, conhecida na literatura como *função dente de serra*.



Podemos perceber que este gráfico é formado por um conjunto de segmentos de reta que são paralelos, sendo que um desses segmentos tem extremidades nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e os outros são réplicas desse mesmo trecho do gráfico que se repetem para a esquerda e para a direita. Repare que o ponto $(1, 1)$ do segmento replicado é omitido, senão a figura resultante não representaria o gráfico de uma função (Por quê?).

Repare que, para qualquer número $0 < p < 1$, o trecho do gráfico que fica sobre o intervalo $[0, p]$ no eixo x corresponde apenas a uma parte de um desses segmentos de reta, de forma que ao replicarmos essa parte para a esquerda e para a direita, obteríamos uma figura diferente do gráfico da função. Portanto, nenhum número menor que 1 pode ser o período de f . Concluimos que $p = 1$ é o **período** da função.

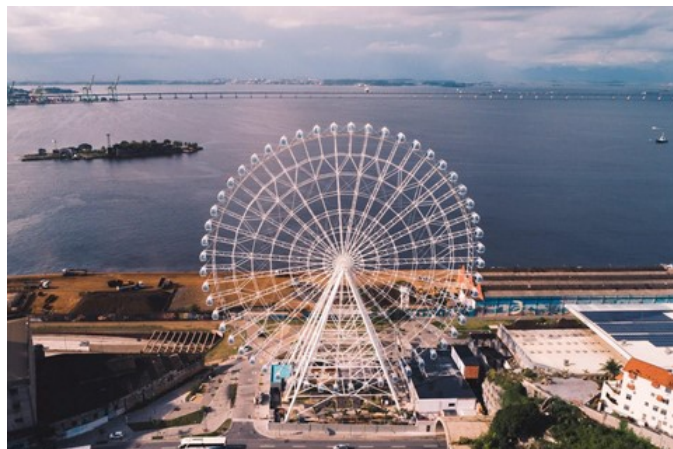
Como o menor valor e o maior valor assumidos pela imagem são 0 e 1 respectivamente, temos que a amplitude é igual $\frac{(1-0)}{2} = \frac{1}{2}$.

Isso nos mostra que podemos criar uma infinidade de funções periódicas agindo exatamente dessa mesma forma! Podemos definir uma função em um determinado intervalo, por exemplo, $[-2, 0]$, e a partir daí reproduzir por intervalos sucessivos translações horizontais que tenham como fator de translação o mesmo comprimento do intervalo usado como base para criar a função.

PRATICANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS

Rio Star

Atividade 4



A Rio Star é a maior roda gigante da América Latina e está localizada na cidade do Rio de Janeiro. Ela tem 88 metros de altura. A atração turística conta com 54 cabines climatizadas que podem receber até 8 pessoas cada, totalizando 432 visitantes que poderão apreciar a vista da Zona Portuária, do Relógio Central, Morro da Providência, Cristo Redentor, Pão de Açúcar, Pedra do Sal, Ponte Rio-Niterói e da Cidade do Samba durante 18 minutos - tempo necessário para a volta completa no brinquedo. (Fonte: [Casa Vogue](#))

Suponha que o ponto mais baixo da roda gigante que qualquer uma das cabines pode atingir se encontra a 3 metros de altura do chão. Beatriz e Gabriela embarcam em uma das cabines e a partir daí, a roda gigante gira continuamente com a mesma velocidade e dá duas voltas sem parar, finalizando o movimento com a cabine das meninas retornando ao ponto mais baixo.

- Qual é o raio da roda gigante?
- Existe algum momento em que a altura da cabine em relação ao chão será nula? Justifique.
- Em quais instantes do movimento a cabine estará na mesma altura do centro da roda gigante? E no ponto mais alto da roda? E no ponto mais baixo?
- Você acha que a altura a que a cabine sobe nos primeiros dois minutos do movimento é a mesma que nos dois minutos seguintes? Justifique sua resposta?
- No plano cartesiano, plote no plano cartesiano os pontos (t, h) com os dados obtidos no item **c)**, em que t é o tempo e h é a altura da cabine. Em seguida, esboce a curva por meio desses pontos que você acha que representa o gráfico da função altura $h = h(t)$. Compare seu gráfico com o de seus colegas.
- Qual o período, a amplitude e o conjunto imagem da função $h = h(t)$?

Construa sua própria função periódica!

Atividade 5

Vamos fazer a nossa própria função periódica?

- a) Usando a malha quadriculada proposta a seguir, defina, a origem, os eixos Ox e Oy e desenhe, usando até 6 unidades horizontais da malha, uma curva que possa representar o gráfico de uma função, de modo que o ponto inicial da curva tenha mesma altura que o ponto final.
- b) Agora, reproduza exatamente esse mesmo trecho por toda a largura da malha, do mesmo jeito como foi feito com a função dente de serra, construindo assim o gráfico de uma função periódica.
- c) Qual o período e a amplitude da sua função periódica?
- d) Compare o seu gráfico com o de seus colegas. Será que em pelo menos algum deles, você consegue imaginar um contexto real (climática, biológica, doméstica, tecnológica ou outras quaisquer) que ele poderia representar?



Veja um trecho da reportagem a seguir, disponível no endereço <http://www.ihu.unisinos.br/78-noticias/591422-uso-excessivo-do-celular-pode-causar-dependencia-e-problemas-psicologicos>



Dados mostram que 12% dos americanos já desenvolveram dependência dos smartphones; psicólogo explica os riscos para a saúde mental.

A reportagem é de Giulia El Halabi, publicada por EcoDebate, 06-08-2019.

Quem nunca pegou o celular apenas para checar mensagens e passou dezenas de minutos - ou até mesmo algumas horas - vidrado na telinha? Esse comportamento cada vez mais comum pode se tornar um vício que já atinge 12% dos americanos, segundo dados do *Center for Internet and Technology Addiction*.

"O celular ativa continuamente o Sistema de Recompensa, estrutura do cérebro que recebe toda atividade prazerosa. Esse estímulo constante é o que gera dependência, em um processo similar à atuação de drogas ilícitas", diz o psicólogo e professor do Centro Universitário Internacional Uninter, Ivo Carraro.

O uso abusivo dos smartphones pode gerar transtornos psíquicos, como ansiedade e, posteriormente, depressão. O transtorno já tem um nome: nomofobia, medo de ficar sem o celular. Longe do aparelho, o indivíduo fica ansioso, com a sensação de estar perdendo informações importantes, ou ainda excessivamente entediado.

Outro prejuízo é a dificuldade de sociabilização e isolamento. "Os humanos são seres de linguagem verbal e sociabilidade acentuadas. Quando se comunicam somente por mensagens, que são 'mudas', a palavra falada é eliminada e a inépcia social aumenta, agravando quadros depressivos", explica o professor.

A exposição excessiva ao celular também pode causar insônia. Isso acontece porque a luz azul do aparelho 'diz' ao cérebro que ele deve ficar alerta. Assim, a produção de melatonina, o hormônio do sono, é inibida.

(Fonte: [Instituto Humanitas Unisinos](#))

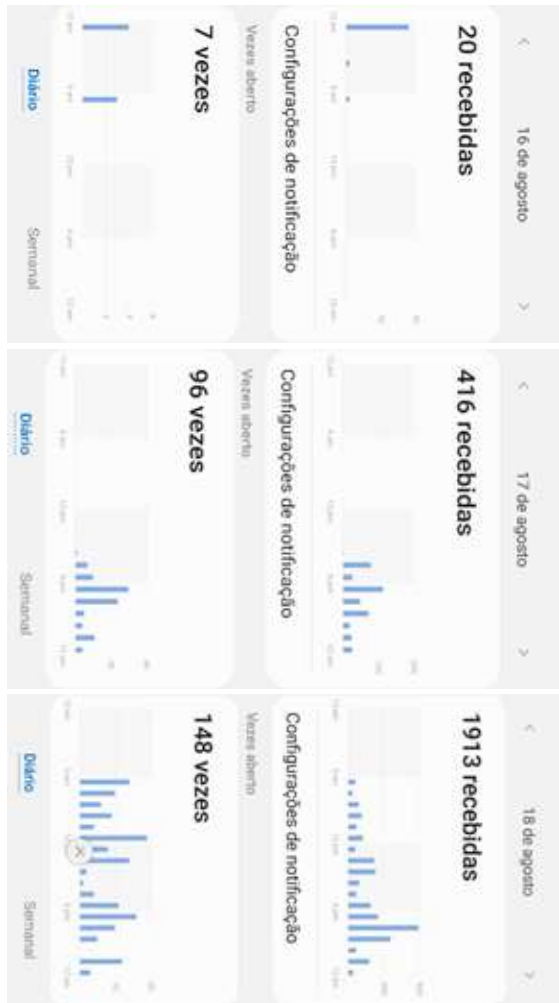
Como forma de contribuir com os usuários, as plataformas têm disponibilizado algumas ferramentas de registro de acesso aos ambientes mais acessados. Experimente olhar em seu

smartphone, nas configurações, se há essa ferramenta - normalmente, o nome é *bem estar digital*.



Por exemplo, alguns registros diários de uso de um aplicativo de mensagens bastante popular no smartphone de uma professora (observando o período de uma semana) estão exibidos a seguir. A primeira informação diz respeito ao número de mensagens recebidas e a segunda informação mostra quantas vezes o aplicativo foi aberto ao longo daquele dia. O dia 13 de agosto foi uma quinta-feira.





- a) Preencha a tabela a seguir com os dados apresentados na figura anterior.

Dia da Semana	Nº de mensagens recebidas	Nº de vezes que o aplicativo foi aberto
1 (qui)		
2 (sex)		
3 (sáb)		
4 (dom)		
5 (seg)		
6 (ter)		
7 (qua)		

- b) Marque num plano cartesiano (físico ou digital) pontos (x, y) correspondendo às duas primeiras colunas da tabela, onde x representa o dia da semana e y o número de mensagens recebidas pela professora naquele dia. Em seguida, construa um segmento de reta ligando o ponto correspondente ao dia 1 ao ponto correspondente ao dia 2, um segmento de reta ligando o ponto correspondente ao dia 2 ao ponto do dia 3 e assim sucessivamente até chegar ao ponto associado ao dia 7.
- c) Faça o mesmo que foi pedido no item b), agora considerando que, nos pares (x, y) , x representa o dia da semana e y o número de vezes que para a quantidade de vezes em que a professora abre esse aplicativo.
- d) Que observações você pode fazer sobre a rotina dessa professora?
- e) As funções com domínio sendo o intervalo $[1, 7]$ da reta e cujos gráficos foram esboçados nos itens b) e c) podem ser ditas periódicas? Se sim, justifique; se não, analise as fotos do enunciado de forma a descobrir ao menos algum padrão de regularidade no comportamento da rotina da professora que poderiam dar ideia de periodicidade.
- f) Suponha que os mesmos dados de números de mensagens recebidas e de vezes que o aplicativo foi aberto sejam reproduzidos nos dias seguintes: no dia 8, a professora recebe o mesmo número de mensagens que no dia 1, no dia 9 ela recebe o mesmo número de mensagens que no dia 2 e assim sucessivamente (mesmo raciocínio para o número de vezes que o aplicativo foi aberto). As linhas poligonais construídas ligando pontos consecutivos, como feito nos itens b) e c), agora representam gráficos de funções periódicas? Se sim, qual será o valor do período e da amplitude delas?
- g) Se você ou alguém de sua família tiver um smartphone com essa função, veja que aplicativos aparecem com registro nessa ferramenta e que parâmetros são exibidos (tempo de tela, número de vezes em que o aplicativo é aberto, número de notificações, entre outros).
- h) Colete os dados referentes a algum aplicativo de mensagens e anote, reproduzindo os passos a), b), c) e d).

VOCÊ SABIA?

O Som e as Ondas Sonoras

O som é resultante de uma vibração, que se transmite em meios materiais de propagação, como sólidos, líquidos e gasosos. Quando uma fonte sonora produz uma vibração, esta é transmitida a todo o meio material que a envolve e em todas as direções. Esta vibração é comunicada aos constituintes mais próximos da matéria, que sucessivamente a transmite aos constituintes seguintes através de choques entre eles.

A vibração de uma fonte sonora causa uma onda no meio de propagação. O som propaga-se por ondas invisíveis: as ondas sonoras ou acústicas. Portanto, o som pode ser descrito através de uma sequência de ondas sonoras, que são ondas de deslocamento, densidade e pressão que se propagam pelos meios compressíveis. Quando uma onda sonora se propaga através de qualquer gás, ocorrem várias compressões e rarefações de pequenos volumes do gás.

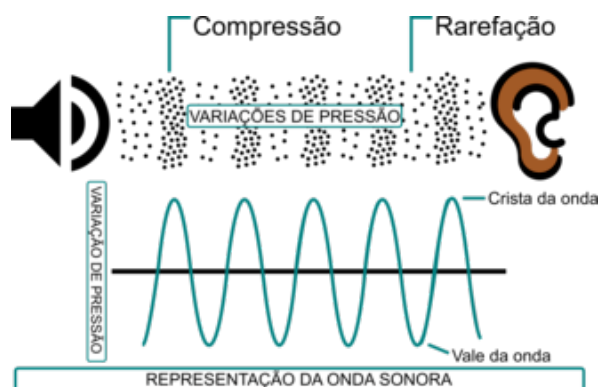
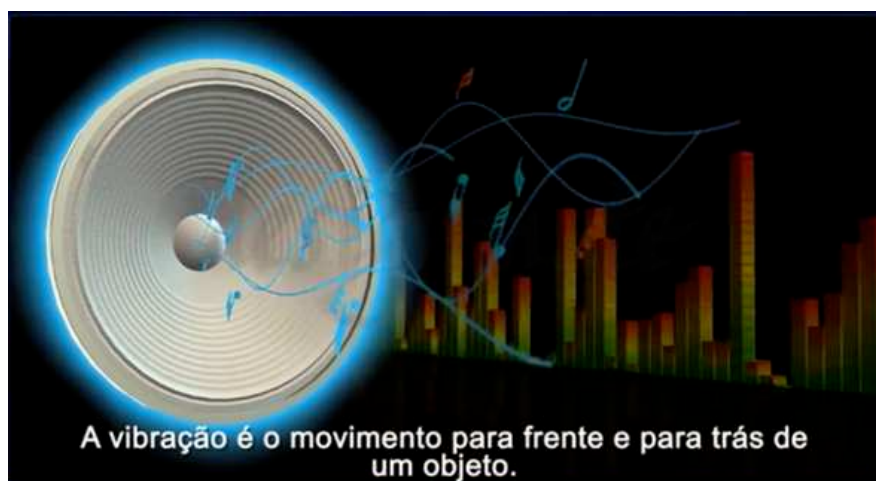


Figura 8.7: Fonte: [Wikipedia](#)

Assista ao vídeo a seguir para compreender melhor o que são as ondas sonoras e como o som se propaga: <https://www.youtube.com/watch?v=sEa0dvnqrnw>



As ondas sonoras mais simples são representadas por gráficos de um tipo muito específico de função periódica. Em estudos avançados de Física e Matemática constataram que toda onda sonora é gerada a partir de uma combinação dessas ondas sonoras mais simples, ou seja, de funções periódicas.

Podemos enxergar estas ondas? Há um equipamento muito *utilizado* por profissionais da área de elétrica e eletrônica é o osciloscópio, que permite a visualização de formas de ondas eletromagnéticas. Esses dispositivos também são capazes de “ler” sinais sonoros, acoplando a eles um microfone.

Faça o *download* em seu celular do aplicativo gratuito *Oscilloscope*. Ele é capaz de captar os sons e reproduzir o que seriam as suas ondas sonoras correspondentes.



Figura 8.8: O aplicativo Oscilloscope. Fonte: Os autore

- a) Capture com o aplicativo sons em diferentes volumes (clitando no ícone da câmera no topo à direita da tela é possível capturar a imagem da onda sonora). Qual é a diferença nas ondas geradas?
- b) Capture com o aplicativo sons graves e agudos. Qual a diferença nas ondas geradas?
- c) Procure gerar sons cujas ondas sonoras tenham trechos representados por um gráfico de funções periódicas como a da figura. Explore a relação entre a **amplitude** e o **período** da função associada a essa onda.

VOCÊ SABIA?

O eletrocardiograma (ECG) é um exame médico simples, indolor e rápido, levando em média 3 minutos para fazê-lo, no qual os impulsos elétricos do coração são amplificados e registrados. Em geral, um paciente faz um ECG quando há suspeita de doença cardíaca, mas ele também costuma ser feito como parte de exames físicos de rotina para pessoas de meia-idade e idosas, mesmo que elas não tenham nenhuma evidência de doença cardíaca.

Para realizar o ECG, um examinador coloca eletrodos (sensores redondos e pequenas que aderem à pele) nos braços, pernas e tórax da pessoa. Esses eletrodos medem a magnitude e a direção das correntes elétricas no coração durante cada batimento cardíaco. Os eletrodos são ligados por cabos a uma máquina que produz um registro (traçado) para cada eletrodo. Cada traço mostra a atividade elétrica do coração a partir de ângulos diferentes. No ECG são produzidos esses traços.

A figura a seguir ilustra as ondas associadas às atividades elétricas do coração. O batimento cardíaco começa com um impulso que ativa as câmaras superiores do coração (átrios). A onda P representa a ativação dos átrios. Em seguida, a corrente elétrica flui para as câmaras inferiores do coração (ventrículos). O trecho QRS representa a ativação dos ventrículos. A corrente elétrica, em seguida, espalha-se para trás, ao longo dos ventrículos no sentido oposto. Esta atividade é chamada onda de recuperação, representada pela onda T.

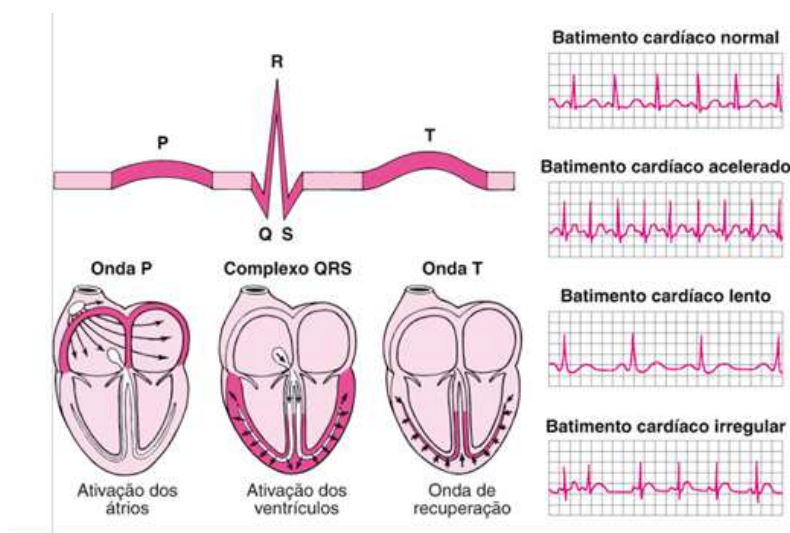


Figura 8.9: Fonte: [Manual MSD](#)

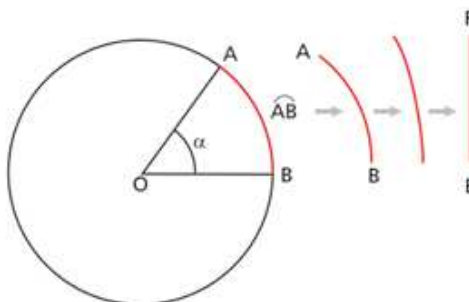
Como a mecânica do coração se repete constantemente, a sistematização dessas ondas gera uma onda contínua que é impressa ao longo do exame. Em geral, esta onda é representada pelo gráfico de uma função periódica. Quando isto não ocorre, tem-se um indício de arritmia cardíaca, ou seja, um batimento cardíaco irregular. Mesmo que a onda impressa seja representada por uma função periódica, nem sempre o coração do paciente estará sadio: o batimento cardíaco pode estar mais acelerado ou mais lento do que o normal para uma situação de repouso, o que fica visível através do período da função periódica associada ser muito baixo ou muito alto, comparado ao de um batimento cardíaco normal (vide [figura 8.9](#)).

Cobrimos circunferências com seus raios

Atividade 7

Vamos propor agora uma atividade para você fazer com os seus colegas na sala de aula. Se organizem em duplas ou grupos e sigam os passos a seguir:

1. Providencie objetos redondos que você possa levar para a sala de aula (rodinhas de carrinho de brinquedo, copos, garrafas, tampas de potes e panela, etc);
2. Use esses objetos para desenhar circunferências numa folha suficientemente grande, contornando-as com um lápis;
3. Determine o centro dessas circunferências. Para isso, tome três pontos sobre a circunferência e trace as mediatrizes de dois segmentos distintos com extremidades nesses pontos. O encontro entre essas mediatrizes é o centro da circunferência;
4. Meça o raio dessas circunferências;
5. Para cada uma das circunferências, corte um pedaço de barbante que tenha essa medida e ajuste-o sobre a circunferência, colando-o no papel.



- a) Qual o nome do objeto geométrico equivalente à parte das circunferências coberta pelo barbante?
- b) A partir de cada extremidade dos pedaços de barbante colados sobre cada circunferência, trace dois segmentos que unam as extremidades dos barbantes ao centro de cada circunferência. Meça os ângulos centrais que ficam assim determinados em cada circunferência. Qual a medida do ângulo central encontrada em cada uma delas?
- c) Compare a sua resposta do item c) com as de outras duplas ou grupos de sua turma. Há algo que você consegue notar nos valores obtidos?
- d) Quantas vezes o raio da circunferência cabe no comprimento da mesma?

- e) É possível cobrir toda a circunferência com uma quantidade inteira de segmentos com medida igual à do seu raio? Se sim, diga quantos segmentos são necessários; se não, estime o valor da fração do raio do círculo correspondente ao pedacinho que ficou descoberto.

Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra

Atividade 8

Abra o GeoGebra e crie um controle deslizante a variando de 0 a 10. Crie o ponto A e construa uma circunferência de centro A com raio a . Tome um ponto B sobre a circunferência e construa o segmento AB , cujo comprimento ficará registrado na janela da álgebra. Agora, crie um ponto C sobre a circunferência e construa o (menor) arco circular de centro A e extremidades C e B , cujo comprimento ficará indicado na Janela da Álgebra.

- a) Usando o GeoGebra, determine a razão k entre o comprimento do arco BC e o raio da circunferência. Movimente o controle deslizante do parâmetro a . O que você observa em relação ao valor de k ?
- b) Altere a medida do comprimento do arco BC movendo o ponto C ao longo da circunferência. Qual o intervalo de variação da razão k ?
- c) Movimente C de forma que o comprimento do arco BC fique igual ao comprimento do raio da circunferência. Qual o valor da razão k nesse caso? Movimente o controle deslizante novamente e registre o que você observa.
- d) Construa e meça o ângulo central $B\hat{A}C$ e modifique a unidade de medida para “radianos”. Movimente o ponto C sobre a circunferência. O que você pode observar em relação ao valor de k e a medida do ângulo central da circunferência em radianos?
- e) Movimente o controle deslizante a e observe o valor da razão k .
- f) Reproduza a atividade, agora com uma circunferência que tenha um raio fixo e igual a 1. Comente como ficam os valores de k e do ângulo $B\hat{A}C$.

ORGANIZANDO O RADIANO

Na atividade [Cobrindo circunferências com seus raios](#), você pôde observar que, mesmo que variemos o raio da circunferência, o ângulo central (com vértice no centro da circunferência) determinado por um arco da circunferência que tem comprimento igual à medida do raio é o mesmo. Além disso, também foi possível verificar que cabem sobre a linha da circunferência 6 "pedaços" inteiros de barbante com o comprimento igual ao raio da circunferência, faltando um arco cujo comprimento é menor que o comprimento do raio da circunferência em questão.

Na segunda atividade - [Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra](#) - você pôde observar que a razão entre o comprimento de um arco qualquer na circunferência e o seu raio varia entre 0 e valores menores que 6,3 - ou seja, isso indica que o raio da circunferência "cabe" sobre o seu contorno pouco mais de 6 vezes inteiras. Mas exatamente, quantas vezes será que o raio de uma circunferência cabe sobre o seu contorno?

Para determinar esse valor, vamos nos lembrar que, no Ensino Fundamental, você aprendeu que o comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2\pi r$. A operação que nos permite verificar quantas vezes uma grandeza "cabe" em outra de mesma natureza é a divisão; então, como queremos verificar quantas vezes o raio cabe na circunferência, vamos dividir o comprimento da circunferência pelo raio. Temos então:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Isso quer dizer que o raio de uma circunferência cabe sobre o seu contorno 2π vezes - o que é coerente com o que encontramos na atividade [Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra](#) ou ainda na atividade [Cobrindo circunferências com seus raios](#). Tomando para o valor aproximado de 3,14 (lembrando que esse é uma aproximação, na verdade, π é um número irracional!), encontramos $2 \cdot \pi \cong 2 \cdot 3,14 = 6,28$, ou seja, pouco menos do que 6,3. E observe: esse resultado não depende do raio da circunferência!

O que estamos fazendo aqui é uma ação de **medir arcos de circunferências** (e seus respectivos ângulos centrais), mas usando o **raio da circunferência como unidade de medida** e não os já conhecidos graus, que remetem ao ângulo central da circunferência que determina o arco que desejamos medir. A unidade de medida de arcos provenientes dessa ação é o **radiano**. Escrevemos rad para denotar esta nova unidade medida. Então, o radiano é uma unidade de medida de arcos tal que 2π rad é a medida do arco que cobre completamente a circunferência, sem sobreposições. Assim sendo, podemos estabelecer uma correspondência entre a nossa já conhecida unidade de medida de arcos em graus e a nova unidade radianos: como o arco de uma volta inteira mede, em graus, 360° , então podemos escrever que:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 2, teremos de forma mais simplificada que $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Podemos usar essa relação para poder ler a medida de qualquer arco em graus ou em radianos, convertendo de uma à outra sempre que necessário. Em particular, a medida em graus de um arco cujo comprimento é de 1 rad (um arco cujo comprimento é exatamente 1 raio) pode ser determinada dividindo-se ambos os termos na igualdade acima por π :

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \therefore \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} \text{ rad} \therefore 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

É interessante observar que, ao tratar dessas duas unidades de medida, estamos percebendo duas características importantes do arco: a medida do ângulo central que o determina sobre a circunferência e a quantidade de vezes que o raio da circunferência cabe sobre aquele arco. Quando desejamos nos remeter à medida do arco correspondente ao ângulo central, a medida em graus é a mais esclarecedora; por outro lado, quando desejamos indicar quantos raios cabem no comprimento do arco, então a medida em radianos é a mais adequada. E note que podemos facilmente transitar de uma à outra a partir do uso da relação $180^\circ = \pi \text{ rad}$.

Para podermos ter uma boa ideia do que estamos tratando, vamos considerar dois relógios analógicos: o relógio de Meca, dito o maior do mundo, que tem 4 faces com 43 metros de diâmetro em cada face e um relógio de pulso comum, que tem em torno de 3 cm de diâmetro.



Figura 8.10: Fonte: [Gigantes do Mundo](#)



Figura 8.11: Fonte: [Mercado Livre](#)

Vamos considerar que os dois relógios estão marcando corretamente as horas, sem atrasar nem adiantar, e que ambos estejam marcando exatamente 3 h - ou seja, o ponteiro pequeno aponta para o número 3 e o ponteiro grande para o número 12. Vamos observar os arcos determinados nos dois relógios pelas semirretas que têm origem no centro dos relógios e que passam pelo 12 e pelo 3, respectivamente.



Figura 8.12: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gTMSvJTB>

Nos dois relógios, a medida do arco de extremidades C e E tem a medida de 90° - essa é a medida angular desse arco, pois remete à medida do ângulo central de vértice D que mede também 90° . Por outro lado, evidentemente, a medida do *comprimento* do arco de extremidades C e E é diferente nos dois relógios: no relógio de pulso, de diâmetro 3 cm (e raio 1,5 cm), o comprimento desse arco será de $C = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 1,5)}{4} = \frac{3}{4}\pi$ cm, ou seja, aproximadamente 2,35 cm. Por outro lado, no relógio de Meca com 43 m de diâmetro, temos $21,5 \text{ m} = 2150 \text{ cm}$ de raio e então o arco CE terá comprimento

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2.150}{4} = 1.075\pi \cong 3375,5 \text{ cm}.$$

Porém, a medida em radianos do arco CE em ambos os relógios será a mesma! Lembre-se: medir um arco em radianos significa que queremos saber quantas vezes o raio da circunferência cabe naquele arco. No relógio de pulso, a medida em radianos de CE será o quociente entre a medida do seu comprimento pelo raio da circunferência, isto é, $\frac{\frac{3}{4}\pi}{1,5} = \frac{\pi}{2}$ rad, enquanto que no relógio de Meca será $\frac{1.075\pi}{2.150} = \frac{\pi}{2}$ rad. Repare que, segundo a regra de conversão $108^\circ = \pi$ rad, estabelecida entre graus e radianos dividindo ambos os lados da igualdade por 2, obtemos $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad. Em particular, arcos correspondendo a ângulos retos medem $\frac{\pi}{2}$ rad.

PRATICANDO O RADIANO

Medindo ângulos centrais em nosso planeta

Atividade 9

Um dos resultados mais fascinantes que já existiram na História da Matemática é decorrente do experimento realizado pelo matemático e astrônomo grego Eratóstenes. Estudando o comportamento das sombras de varetas nas cidades Alexandria e Syene (Assuã, nos dias atuais) ao meio dia, ele não só conseguiu perceber que a superfície da Terra não era plana como conseguiu calcular, com uma precisão surpreendente, o comprimento de uma volta completa ao redor da Terra!

Eratóstenes sabia que a distância entre as cidades de Alexandria e Syene era aproximadamente igual a 800 km. Percebeu também que ao meio dia, o sol estava a pino em Syene de forma que nesse horário, podia-se ver o sol completamente refletido no interior do poço. Além disso, às 12 h, nenhuma sombra era formada pelas colunas daquela cidade. O mesmo não ocorria em Alexandria: ao meio dia, uma vareta colocada de pé no chão apresentava uma sombra substancial e com ela, Eratóstenes conseguiu provar que o arco sobre a superfície da Terra, que compreende as cidades de Alexandria e Assuã media cerca de $\frac{\pi}{25}$ rad (7,2 graus) e que corresponde ao ângulo central $\hat{A}$ da [figura 8.13](#):

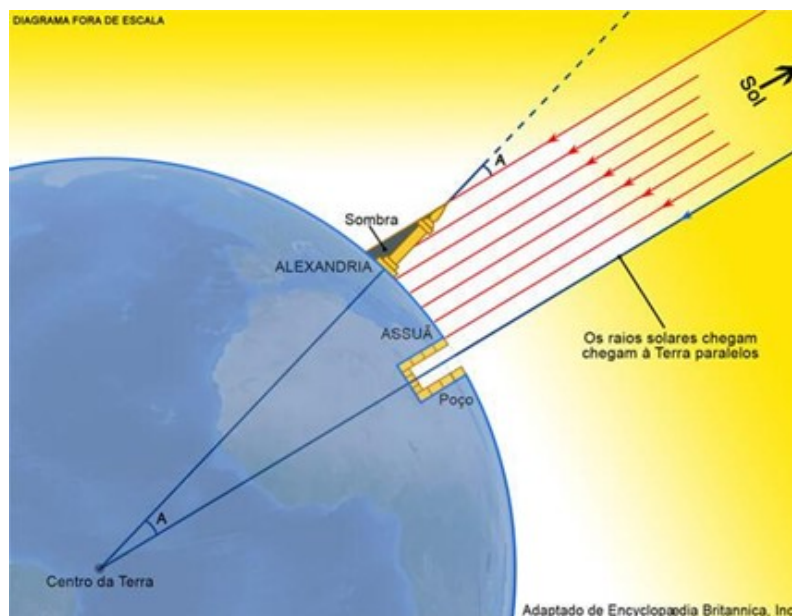


Figura 8.13: Costa, J. R. V. Eratóstenes e a circunferência da Terra. [Astronomia no Zênite](#), jul 2000.

Eratóstenes utilizou a seguinte regra de três para calcular o comprimento de uma volta completa ao redor da Terra:

$$\frac{\pi}{25} \text{ rad} \quad \text{—————} \quad 800 \text{ km}$$

$$2\pi \text{ rad} \quad \text{—————} \quad C$$

Resolvendo a regra de três, obtemos $C = 40.000 \text{ km}$. Utilizando instrumentos tecnológicos muito mais avançados dos quais dispunha Eratóstenes, hoje se sabe que o comprimento de uma volta completa na Terra é de 40.072 km , ou seja, o erro de cálculo do matemático grego foi de menos de 100 km ! O vídeo a seguir, apresenta parte de um episódio famosa série Cosmos, e narra com mais detalhes a ideia do experimento de Eratóstenes.



Figura 8.14: Acesse pelo link: <https://www.youtube.com/watch?v=fu9Z7YuXLVE>

Vamos utilizar o raciocínio de Eratóstenes, com o auxílio do Google Earth para medir arcos em graus e radianos, limitados por duas cidades brasileiras! Baixe e instale no seu smartphone o aplicativo Google Earth.



- a) Use a ferramenta medir para encontrar uma aproximação para distância, ao longo do globo terrestre, entre as capitais Rio de Janeiro e Belo Horizonte.

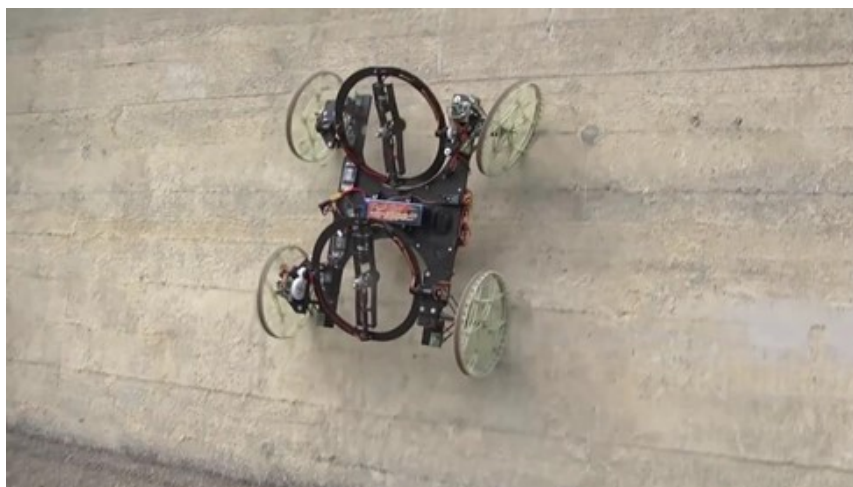
- b) Usando o fato que uma volta completa na Terra tem 40.072 km, determine a medida aproximada do valor do arco (em radianos) sobre a superfície da Terra que liga as duas capitais do item a).
 - c) Reproduza os itens a) e b) para a cidade onde você mora e qualquer outra cidade de sua escolha no Brasil.
-

Carrinho VertiGo

Atividade 10

Pesquisadores da Disney Research, em parceria com o Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, demonstraram esta semana um carrinho de quatro rodas capaz de escalar paredes e andar normalmente em superfícies verticais. À primeira vista, parece um brinquedo, mas, segundo os criadores, a tecnologia pode ampliar os limites de exploração para equipamentos robóticos. Batizado como VertiGo, o carrinho é “capaz de mover em uma parede rapidamente e com agilidade”, informam os pesquisadores. Para realizar a façanha, ele possui duas hélices propulsoras móveis que fornecem o impulso necessário para o início da escalada e, depois, mantém o VertiGo junto à parede.”

Fonte: [Gizmodo](#)



Neste link é possível ver o VertiGo em ação: <https://www.youtube.com/watch?v=KRYT2kYbgo4>

Suponha que foi colado um pequeno selo em uma das rodas do VertiGo. O carrinho começará a descer em um paredão vertical bem alto, seguindo um caminho reto e paralelo ao paredão. Ele começa o movimento “colado” ao paredão, quando o selo está em contato com o mesmo. Conforme o carrinho vai descendo, o selo se movimenta conforme o giro da roda. A figura abaixo ilustra o movimento realizado por essa roda ao descer o paredão e os pontos A_1 , A_2 e A_3 ilustram posições do selo ao longo do movimento. Suponha que o raio da roda seja de 1 dm

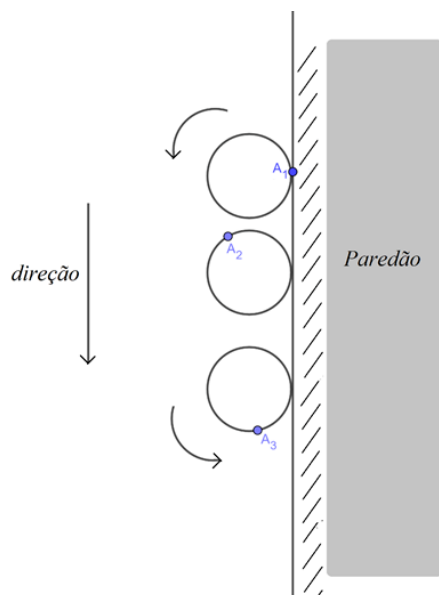


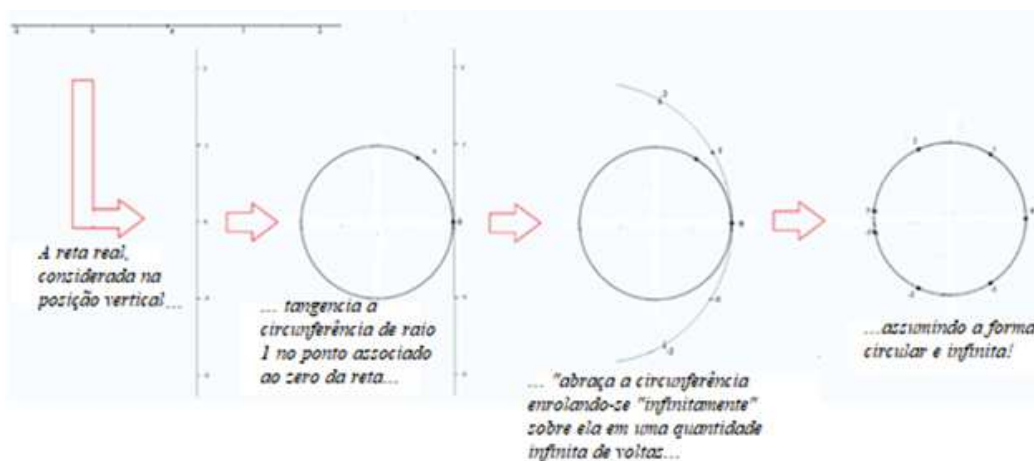
Figura 8.15: Fonte: Adaptado de Ekici (2010)

- a) Indique a posição do selo na circunferência da roda quando o VertiGo tiver descido as seguinte distâncias:
- 0 dm, 1 dm, 2 dm, $\frac{3}{2}$ dm, $\frac{\pi}{2}$ dm, π dm, 3π dm, 2π dm, 7 dm, 4 dm
- b) Suponha que, do ponto de repouso do VertiGo, agora ele irá **subir** parte do paredão. Usando a mesma vista lateral dada pela figura 8.15, qual será a posição do sela para as mesmas medidas do item a)?

"Abraçando" um círculo com uma reta

Atividade 11

Observe a imagem a seguir e responda às perguntas:



- Quantos pontos da circunferência estarão "cobertos" pelo número real 1?
- A cada ponto da circunferência, quantos números reais ficam associados?
- Considerando o ponto A na circunferência sobre o qual encontra-se o número real 1. Qual o próximo número real positivo que também estará localizado em A ? E qual será o primeiro número negativo associado a A ?
- Se reproduzimos a construção exibida acima usando, em lugar da reta real, o intervalo $[-5, 5]$ em uma circunferência de raio 2, tangenciando esta circunferência no ponto 0 do intervalo, qual será a medida do menor arco encontrado entre os pontos da circunferência associados a -5 e 5 ?

ORGANIZANDO FUNÇÃO DE EULER

Nas atividades *Carrinho VertiGo* e *"Abraçando" um círculo com uma reta* você aprendeu que é possível associar números reais a pontos de uma circunferência de raio 1. Considere que no plano tem-se um sistema de coordenadas cartesianas, no qual C^1 representa a circunferência de centro na origem e raio 1. Repare que $A = (1, 0) \in C^1$ pois esse ponto tem distância 1 para a origem. A *Função de Euler*, que será denotada pela letra E , é uma ferramenta matemática que permite corresponder formalmente qualquer número real a um ponto de C^1 . Definimos $E : \mathbb{R} \rightarrow C^1$, da seguinte maneira: dado qualquer número real $t > 0$, construiremos um arco de comprimento $|t|$ na circunferência C^1 , com uma de suas extremidades no ponto A e a outra extremidade num ponto $E(t)$ percorrendo C^1 no sentido contrário aos ponteiros do relógio (anti-horário). Se $t < 0$ fazemos o mesmo procedimento, porém percorrendo a circunferência em sentido horário. Finalmente, se $t = 0$, definimos $E(0) = A$.

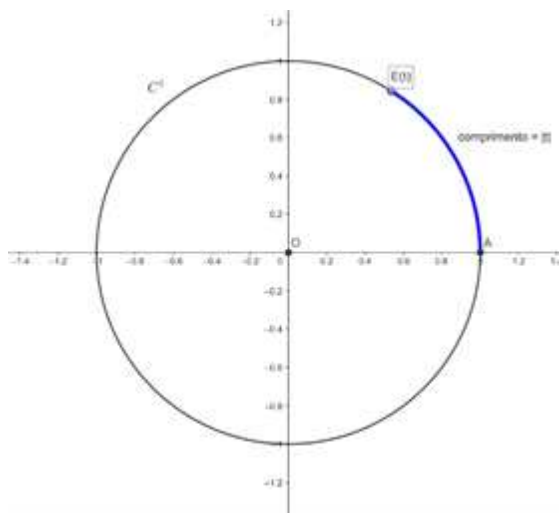


Figura 8.16: $E(t)$ para $t > 0$

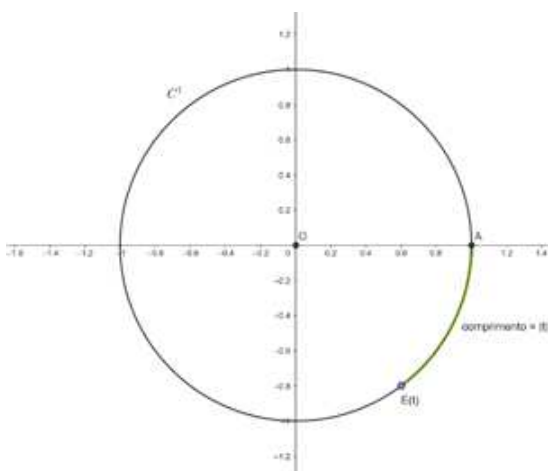


Figura 8.17: $E(t)$ para $t < 0$

Repare que eventualmente, o valor de $|t|$ pode ser maior que a medida do comprimento da circunferência C^1 . Se isto ocorrer, o arco de extremidades A e $E(t)$ será construído de forma

que se percorrerá a linha da circunferência dando mais que uma volta em torno da origem do plano cartesiano: por exemplo, se $t = -4\pi$, então, como C^1 tem comprimento $2\pi \cdot 1 = 2\pi$, $E(t)$ será obtido construindo um arco partindo de A e fazendo-se um percurso de $|-4\pi| = 4\pi$ unidades ao longo de C^1 no sentido horário, o que corresponde exatamente a dar umas voltas completas na circunferência, finalizando o percurso em A . Logo, $E(-4\pi) = A$. Por outro lado, para encontrar $E(7\pi)$, começamos percorrendo 7π unidades de comprimento ao longo de C^1 , mas agora em sentido anti-horário. O percurso termina no ponto $(-1, 0)$ pois $7\pi = 3 \cdot (2\pi) + \pi$, o que corresponde a dar 3 voltas em C^1 a partir de A no sentido anti-horário e depois percorrer mais meia volta. Logo, $E(7\pi) = (-1, 0)$.

A dinâmica do cálculo de imagens pela Função de Euler motiva a definição do **círculo (ou ciclo) trigonométrico** que consiste essencialmente em três ingredientes: circunferência de raio unitário, sistema de eixos cartesianos e orientação. Vamos falar um pouco sobre cada um deles.

Circunferência de raio unitário

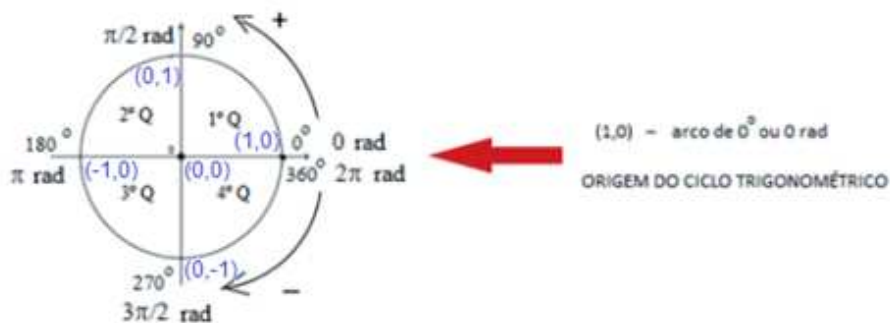
Vimos na seção "O radiano" que a medida de um arco em radianos indica a quantidade de vezes que o raio da circunferência na qual o arco está contido "cabe" sobre esse arco, ou seja, a medida angular do arco é o resultado da razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência que contém esse arco. Lembre-se que a medida em radianos de um arco em uma circunferência é calculada através do quociente entre o comprimento do arco e o raio. Esse cálculo fica mais fácil quando o raio mede 1 unidade, o que nos dá uma equivalência direta entre C^1 o comprimento do arco e a medida angular em radianos desse arco. Então, considerar arcos em uma circunferência de raio unitário traz a vantagem de termos medidas de mesmo valor para as medidas angular (relacionada ao ângulo central, à abertura do arco) e linear (relacionada ao comprimento do arco).

Sistema de eixos cartesianos

O sistema de eixos cartesianos é o sistema com um par de retas perpendiculares orientadas e graduadas, em cuja interseção se localiza o ponto de coordenadas $(0, 0)$, denominado *origem do sistema de eixos cartesianos*. A associação entre o sistema de eixos cartesianos e a circunferência de raio unitário nos possibilitará associar coordenadas aos pontos sobre a circunferência.

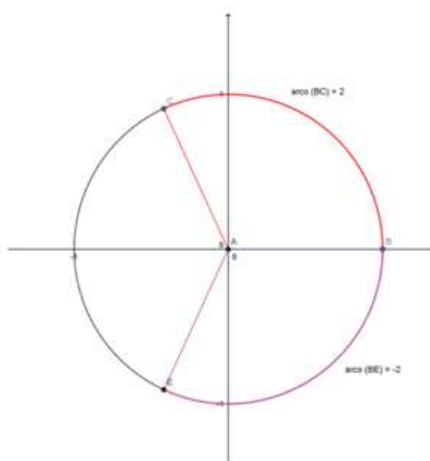
Orientação

A circunferência que representa o círculo trigonométrico é orientada, o que indica que há um ponto tomado como origem e uma orientação que atribui um sentido positivo (sentido anti-horário) e um sentido negativo (sentido horário) para os arcos tomados sobre essa circunferência. A seguir podemos ver uma imagem que representa o círculo trigonométrico e seus pontos notáveis.



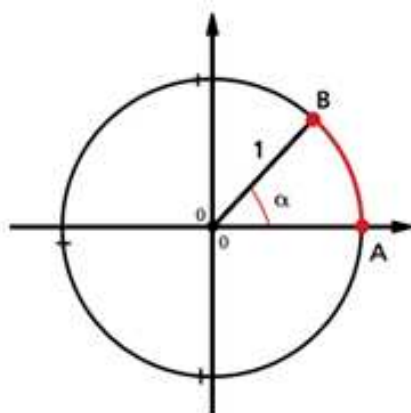
A partir do momento em que conseguimos associar comprimentos com arcos no círculo trigonométrico, já podemos pensar em associar números reais ao círculo trigonométrico. Um arco de comprimento 2, por exemplo, seria um arco de 2 rad — mas onde ele começa? Onde acaba? E o arco de -2 rad, onde o marcamos?

Determinar a origem do círculo trigonométrico como sendo o ponto $(1, 0)$ e estabelecer o sentido positivo como o anti-horário e negativo como o horário torna essa missão mais simples. Um arco de 2 rad tem origem em $(1, 0)$ e estende-se por um comprimento igual a 2 unidades no sentido anti-horário. E o arco de -2 rad? Esse arco também tem origem em $(1, 0)$, mas estende-se com comprimento 2, mas no sentido horário do círculo, pois é negativo. Na figura a seguir vemos esses arcos.



Por sua vez, o número zero será associado a um "arco" que consiste em um único ponto, a saber, a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.

Vamos generalizar essas ideias? Na figura a seguir, o ângulo $\widehat{BOA}$ tem medida α , em graus. A medida do arco AB será $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi$ rad. A razão $\frac{\alpha}{360^\circ}$ indica que parte da circunferência inteira (de comprimento 2π pois o raio é 1) é ocupada pelo arco AB . Se α é dado em radianos, então a medida do arco AB será, da mesma forma que vimos acima, $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi$ rad, ou seja, é α .



Por essa razão é tão interessante usar a unidade radianos para medir arcos e ângulos em trigonometria: esta unidade é flexível e pode ser entendida tanto como medida angular quanto como medida linear.

Arcos Côngruos

Agora vamos pensar em outra questão: qual é o maior arco que pode ser tomado no círculo trigonométrico? E qual é o menor? Eles existem? A resposta é **não**. Basta considerarmos que um arco pode dar um número arbitrário de voltas em torno do círculo trigonométrico, gerando o que chamamos de *arcos côngruos*, ou seja, arcos que têm a mesma origem e a mesma extremidade, mas que diferem pelo número de voltas inteiras dadas no círculo trigonométrico.

Considere, como exemplo, um arco AB de medida $\frac{\pi}{6}$ rad, por exemplo, e outro arco AC de medida $\frac{13\pi}{6}$ rad. Como,

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

então temos que o arco AC tem a mesma extremidade do arco AB , ou seja, os pontos B e C são coincidentes. Geometricamente, o arco orientado AC é construído traçando o arco AB e em seguida, a partir de B , se dá uma volta completa no círculo no sentido positivo, de forma que C coincida com o ponto B . Arcos que têm esta característica são aqueles que chamamos de arcos côngruos. Outros arcos côngruos ao arco AB seriam $\frac{25\pi}{6}$ rad (2 voltas inteiras e mais $\frac{1}{12}$ de volta, no sentido positivo), $\frac{11\pi}{6}$ rad ($\frac{11}{12}$ de volta no sentido negativo) ou ainda $-\frac{23\pi}{6}$ rad (uma volta inteira e mais $\frac{1}{12}$ de volta no sentido negativo), entre *infinitas* outras possibilidades.

Para um arco AB medindo x rad, a *expressão geral da medida de um arco côngruo a AB* , é dada por, $x + 2k\pi$ onde k é um número inteiro. Quando dois arcos de medidas x e y são côngruos, escrevemos $x \equiv y$. Então, segundo essa notação, temos $x \equiv x + 2k\pi$. Se a medida x do arco AB for feita em graus ao invés de radianos, teremos que todos os arcos côngruos a AB terão medida em graus dadas por $x + 360^\circ \cdot k$ com k inteiro. A menor medida x de um arco côngruo a AB (em graus ou radianos) positivo, será chamada de *menor determinação positiva* do arco AB (ou *primeira determinação positiva*).

PRATICANDO FUNÇÃO DE EULER

Círculo trigonométrico no GeoGebra

Atividade 12

Abra uma tela nova no GeoGebra e exiba os eixos coordenados. Construa os pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$ e construa o círculo de centro A que passa por B .

- Qual o raio dessa circunferência?
- Quais os pontos de interseção entre a circunferência e os eixos coordenados? Quanto mede cada um dos arcos compreendidos entre esses pontos?
- Os pontos que se localizam na circunferência cujas coordenadas são positivas são pontos que estão no 1º quadrante. Faça uma figura indicando onde estão esses pontos. Da mesma forma, indique onde se localizam os que estão no 2º quadrante (abscissa negativa e ordenada positiva), no 3º quadrante (coordenadas negativas) e no 4º quadrante (abscissa positiva e ordenada negativa).

- d) Considere a reta real “enrolada” na circunferência conforme vimos no exercício anterior, com a mesma unidade dos eixos coordenados. Em que quadrante fica o número real 1? E o número real -1 ? E o número real π ? E o número real $\sqrt{2}$?
- e) Marque um ponto C sobre a circunferência de forma que o ângulo $B\hat{A}C$ meça 60° . Que número real está associado ao ponto C ?

Quantas voltas tem o arco e qual é o seu quadrante?

Atividade 13

Considerando os quadrantes no círculo trigonométrico, indique em qual quadrante se localiza a extremidade de cada arco indicado a seguir. Informe também qual o número de voltas completas em torno do círculo é possível se dar com cada um desses arcos.

- a) $8,5$ rad
- b) $-1,37$ rad
- c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ rad
- d) $-0,03$ rad
- e) $17\frac{3}{5}$ rad
- f) $-20,42$ rad

Marcando ângulos no círculo trigonométrico

Atividade 14

Dê a menor determinação positiva dos arcos a seguir e indique sua expressão geral dos arcos.

- a) 1047°
- b) 327π rad
- c) 247 rad
- d) 247°
- e) 247π rad
- f) -1032 rad

EXPLORANDO SENO E COSSENO DE UM NÚMERO REAL

Retornando à Roda Gigante Rio Star

Atividade 15

Na atividade *Rio Star* você analisou alguns aspectos da função $h = h(t)$ que descrevia a altura da cabine da roda gigante em função do tempo. Aqui completaremos essa análise.

- Use a figura a seguir e os conceitos de cosseno (ou seno) para determinar a altura da cabine em relação ao chão, em função do ângulo formado entre um segmento vertical que une o centro da roda gigante ao solo e o segmento de reta que une o centro à cabine;
- gora, encontre uma função que relacione o ângulo da questão anterior com o tempo, usando os valores determinados na atividade *Rio Star*;
- Finalmente, usando as informações dos itens **a)** e **b)** para encontrar uma fórmula para $h(t)$ quando $0 < t < 9$.

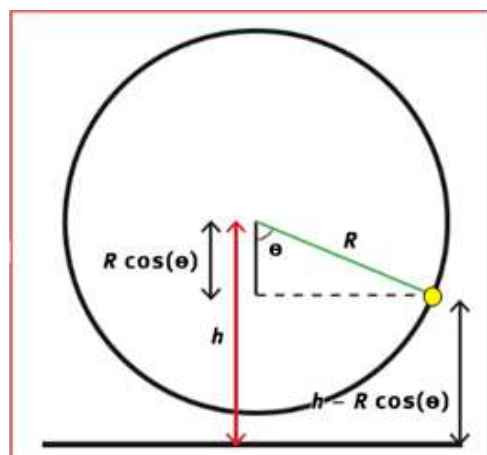


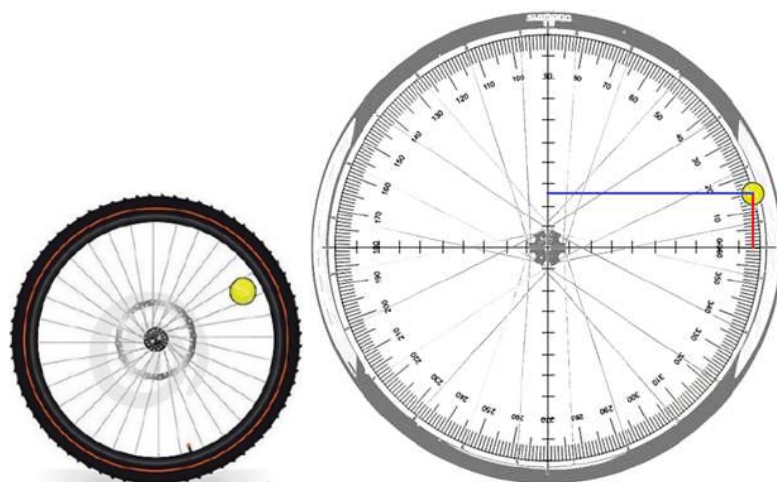
Figura 8.18: Fonte: Soares (2010)

Bolinha na roda da bicicleta

Atividade 16

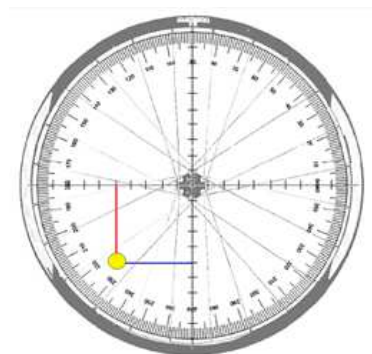
(Adaptado de Costa (2017))

Mateus gosta muito de andar de bicicleta e para enfeitar suas rodas, costuma prender bolinhas de tênis nelas (vide figura). Suponha que ele virou a bicicleta de cabeça para baixo, prendeu a bolinha e começou a girar a roda. Na figura a seguir, a imagem à direita ilustra uma representação da roda destacando eixos coordenados e ângulos em graus.



A roda da direita tem um transferidor de volta inteira sobreposto a sua imagem, de forma que é possível verificar a medida do ângulo entre o eixo horizontal e o raio da roda que passa pela bolinha.

Considere que r é o raio da roda, c é o comprimento do segmento horizontal azul (distância da bolinha amarela ao eixo y) e s é o comprimento do segmento vertical vermelho (distância da bolinha amarela ao eixo x). A razão $\frac{c}{r}$ indica a distância horizontal relativa entre a bolinha amarela e o eixo y , assim como a razão $\frac{s}{r}$ indica a distância vertical relativa entre a bolinha amarela e o eixo x . Por exemplo, se a roda tem raio de 30 cm e a bolinha estiver localizada a 27 cm do eixo vertical, então $\frac{c}{r}$ é $\frac{27}{30}$, ou seja, $\frac{9}{10}$. Dessa forma, para quaisquer outras rodas de bicicleta com outros raios, quando o ângulo entre o eixo horizontal e o raio que passa pela bolinha amarela for o mesmo em que é nessa situação, estamos aptos a determinar essa distância, fundamentados na semelhança de triângulos: em uma roda com 20 cm de raio, essa distância seria $\frac{9}{10}$ de 20, ou seja, 18 cm. Da mesma forma se dá para a distância relativa vertical. Observe ainda que essa "distância relativa" pode ser ainda negativa ou positiva, de acordo com a orientação dos eixos coordenados.



Por exemplo, na figura ao lado, tanto c quanto s valem 5, mas estão no sentido negativo de seus respectivos eixos, portanto, ao calcularmos as distâncias relativas teremos $\frac{c}{r} = \frac{s}{r} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$.

Nas tabelas a seguir, temos algumas possíveis posições para a bolinha e os ângulos associados a elas, medidos em graus. Para completar essa tabela, você precisará informar, a cada ângulo dado:

- A medida do arco, em radianos, associado ao ângulo dado;
- A razão $\frac{c}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo x ;
- A razão $\frac{s}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo y .

Vamos lá?

a)

Ângulo (grau)	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Arco (radiano)	$\frac{\pi}{12}$					
$\frac{c}{r}$	0,96					
$\frac{s}{r}$	0,26					

b)

Ângulo (grau)	105°	120°	135°	150°	165°	180°
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

c)

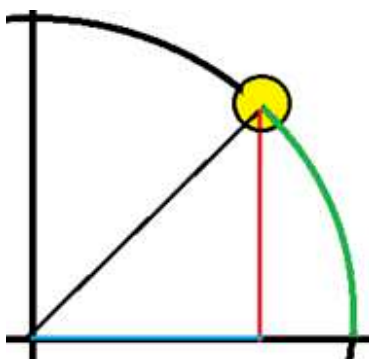
Ângulo (grau)	195°	210°	225°	240°	255°	270°
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

d)

Ângulo (grau)	285°	300°	315°	330°	345°	360°
Arco (radiano)						2π
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

ORGANIZANDO SENO E COSSENO DE UM NÚMERO REAL

Na atividade *Bolinha na roda da bicicleta* temos, a cada instante, um triângulo, conforme a figura a seguir:



Ainda na atividade anterior, você mediu os comprimentos dos segmentos azul e vermelho. O arco verde representa a trajetória da bola amarela. Considerando que as razões $\frac{c}{r}$ e $\frac{s}{r}$ nos retornam proporções que nos permitem considerar comprimentos em um círculo de raio unitário, o arco verde, medido em radianos, é determinado pelo ângulo, medido em graus, referente ao vértice desse triângulo que está sobre a origem do plano cartesiano.

A roda pode girar indefinidamente; assim, o arco verde pode atingir qualquer número real na circunferência orientada, assumindo-se valores positivos para quando a roda girar no sentido anti-horário e negativos quando ela girar no sentido horário. Dessa forma, podemos associar a qualquer número real uma projeção horizontal (segmento azul) e uma projeção vertical (segmento vermelho). Considerando ainda o triângulo da figura anterior, temos que os segmentos azul e vermelho são, respectivamente, o cosseno e o seno desse ângulo (que está medido em radianos, pelo comprimento do arco verde). Assim, se t é o comprimento do arco verde, temos que o comprimento do segmento azul e vermelho são, respectivamente $\cos(t)$ e $\sin(t)$. Mais do que isso, observe que o segmento azul, a distância horizontal, equivale à abscissa da extremidade do arco verde, assim como o segmento vermelho corresponde à ordenada da extremidade desse mesmo arco.

Quando nos referimos aos segmentos azul e vermelho, a palavra medir é um abuso de linguagem. O que estamos de fato verificando são as coordenadas x e y do ponto representado pela bolinha amarela no plano cartesiano, que serão dadas respectivamente por $\cos(t)$ e $\sin(t)$. Em outras palavras, $\cos(t)$ e $\sin(t)$ são as **coordenadas x e y do ponto $E(t)$** , ou seja, da função de Euler aplicada no número real t .

Vamos ver agora o comportamento das funções que associam comprimentos de arcos em um círculo trigonométrico com as coordenadas do ponto localizado na extremidade desse arco: as funções cosseno (associa o comprimento do arco com a abscissa de sua extremidade) e seno (associa o comprimento do arco com a ordenada de sua extremidade).

EXPLORANDO FUNÇÕES SENO E COSSENO

Seno e cosseno no GeoGebra

Atividade 17

Abra uma tela no GeoGebra (versão smartphone Classic ou versão computador Classic). Siga os passos orientados a seguir.

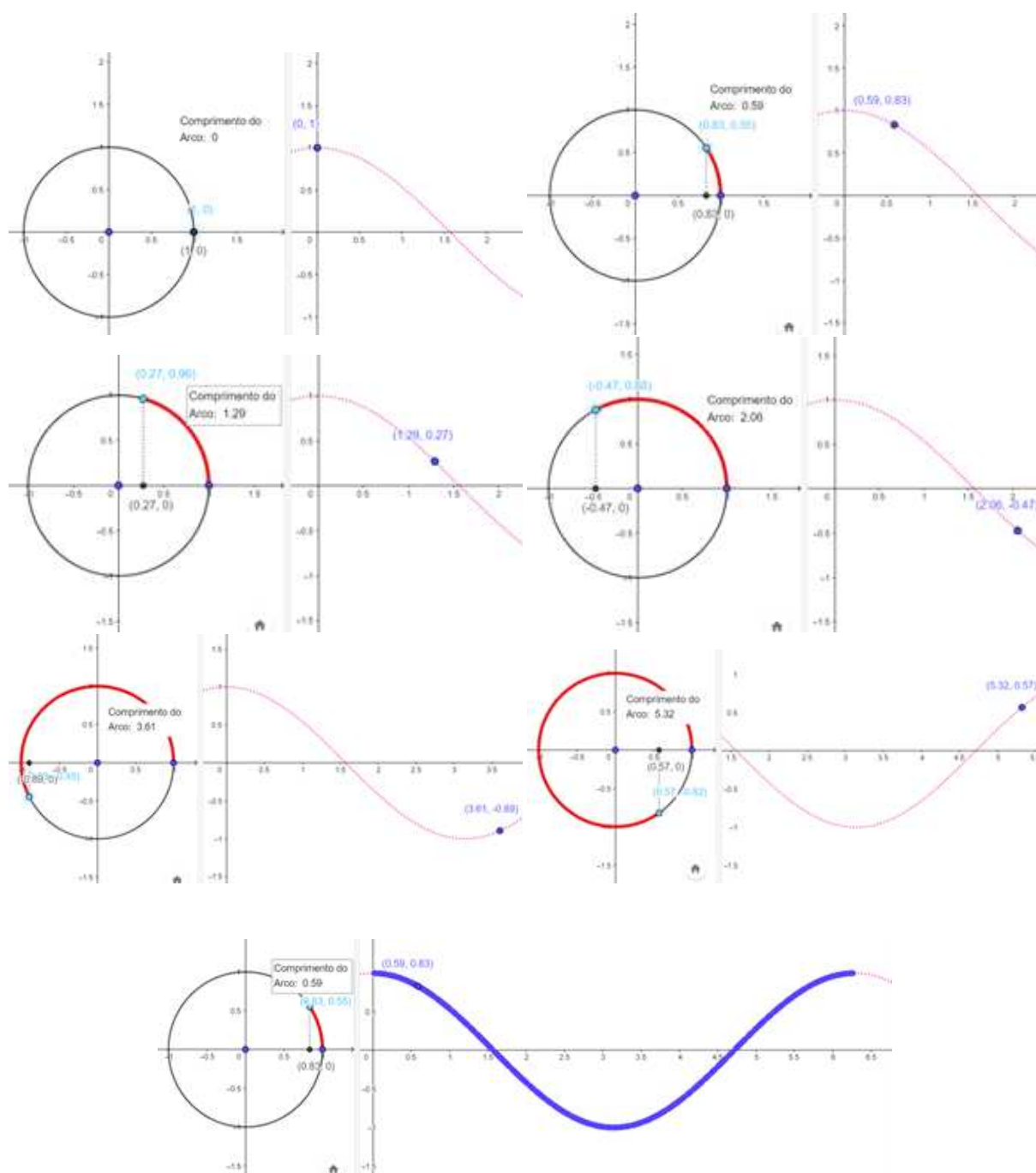
- a) Construa os pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$ e a circunferência de centro A que passa por B.
- b) Tome um ponto C qualquer (ponto em objeto) na circunferência.
- c) Trace as perpendiculares por C a Ox e a Oy , que encontrarão os eixos respectivamente nos pontos D e E (automaticamente denominados pelo GeoGebra).
- d) Construa os segmentos AD e AE --- o GeoGebra os nomeará automaticamente por h e i .
- e) Construa o arco circular de centro A e extremidades B e C, nessa ordem. O GeoGebra o denominará como d.
- f) Construa os pontos $F = (d, x(C))$ e $G = (d, y(C))$.
- g) Movimente o ponto C e observe o caminho percorrido por F e por G .
- h) Habilite o rastro de F e G e movimente C .
- i) Descreva o caminho percorrido por F e G .

Obs.: a construção descrita está disponível no link <https://www.geogebra.org/m/ze5k6ur9>.

ORGANIZANDO FUNÇÕES SENO E COSSENO

A Função Cosseno

Vimos anteriormente que podemos calcular o cosseno de qualquer número real. A função cosseno, definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ é a função que associa a cada número real x localizado sobre o círculo trigonométrico à abscissa da extremidade do arco que tem comprimento $|x|$ e origem no ponto $(1, 0)$, percorrido no sentido anti-horário, se $x > 0$ e percorrido no sentido horário, se $x < 0$. A seguir estão ilustradas a representação do arco e do seu cosseno no círculo trigonométrico para diversos arcos, bem como o ponto da função cosseno, no plano cartesiano, associado a esse arco.



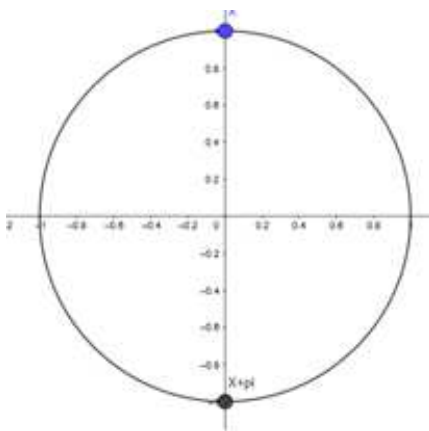
Obs.: As imagens anteriores foram geradas com o ambiente GeoGebra. A construção está disponível em <https://www.geogebra.org/classic/qks6uzqv>. A última imagem apresenta o conjunto de todos os possíveis pontos obtidos no plano cartesiano para a primeira volta no círculo trigonométrico (no sentido anti-horário).

Conforme podemos observar, o conjunto imagem dessa função é formado por todos os valores possíveis que o cosseno pode assumir. Relembrando a atividade da bolinha na bicicleta, percebemos que o cosseno é a abscissa do ponto do plano cartesiano associado à bolinha amarela. Como a circunferência tem raio 1, essa projeção assume todos os valores entre -1 e 1 , portanto o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

Periodicidade da Função Cosseno

Voltando à atividade da bolinha na roda, se essa bolinha descreveu um arco de comprimento $|a|$, ela está em uma determinada posição. Se, após isso, ela percorrer mais um arco de comprimento 2π , a bolinha estará novamente na mesma posição. Isso significa que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Observe que isso é verdadeiro para qualquer valor de x , o que indica que essa é uma função periódica. Mas qual será o seu período? Já temos que 2π é um candidato a período, mas será que ele é mesmo um período? Será que existe $p < 2\pi$ tal que $\cos(x) = \cos(x + p)$ para qualquer valor de x ?

Para verificarmos isso, vamos tomar inicialmente $x = \frac{\pi}{2}$. Nesse caso, se considerarmos o círculo trigonométrico no plano cartesiano, a bolinha estaria na posição $(0, 1)$ e, portanto, $\cos(x) = 0$. Estamos procurando um valor $p < 2\pi$ tal que $\cos(\frac{\pi}{2} + p) = 0$.



Olhando novamente para o círculo, vemos que, antes de dar uma volta completa, o próximo arco cujo cosseno é 0 é o arco de comprimento $\frac{3\pi}{2}$. Assim, temos

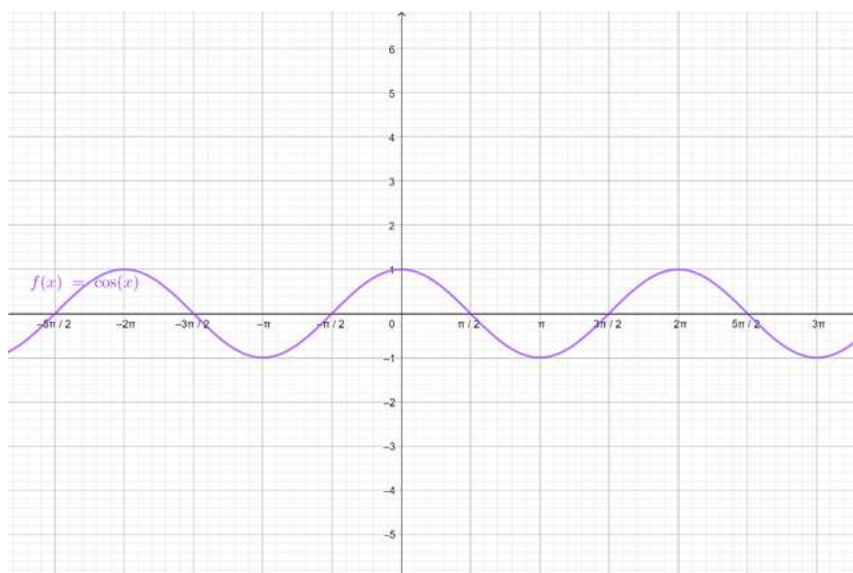
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

Como no intervalo aberto $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ não há outro arco cujo cosseno seja nulo, temos que π é nosso último candidato a período. Se mostrarmos que ele não pode ser um período, teremos que 2π será o menor valor para o qual ocorrem as primeiras repetições, ou seja, que 2π é o período dessa função.

Considere então $x = 0$; assim, temos que $\cos(0) = 1$, mas $\cos(0 + \pi) = \cos(\pi) = -1$, ou seja, π não satisfaz a condição de período. Isso significa que a função $f(x) = \cos(x)$ é periódica com período 2π .

Gráfico da função cosseno

Vimos anteriormente que o gráfico de uma função periódica pode ser obtido pela repetição de cópias de uma fatia do gráfico dessa função de largura igual ao período dessa função. Acabamos de ver também que a função $f(x) = \cos(x)$ é periódica, de período igual a 2π . Então, para construir o gráfico dessa função, basta que analisemos o comportamento dela num intervalo do tipo $(x, x + 2\pi)$ e repetir o gráfico encontrado, unindo-os. Dessa forma, obtemos a seguinte curva:

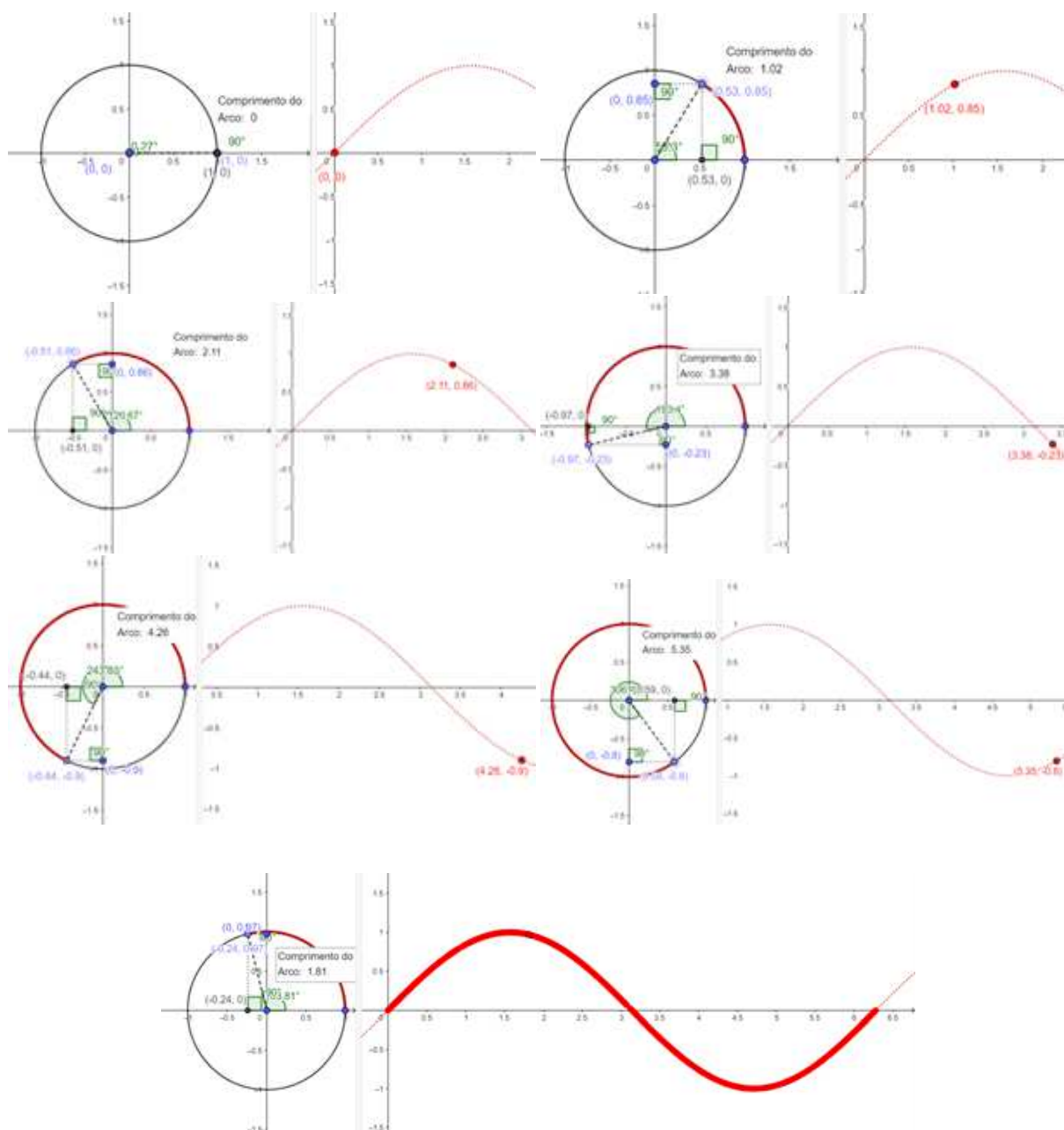


Observando o gráfico e as características dessa função, podemos destacar algumas propriedades:

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $Im(f) = [-1, 1]$
- Período: $p = 2\pi$
- Amplitude: $\frac{|-1 - 1|}{2} = 1$

A Função Seno

Vimos anteriormente que podemos calcular o cosseno de qualquer número real. A função seno, definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$, é a função que associa a cada número real x localizado sobre o círculo trigonométrico à ordenada da extremidade do arco de comprimento $|x|$ e origem no ponto $(1, 0)$, percorrido no sentido anti-horário, se $x > 0$ e percorrido no sentido horário, se $x < 0$. A seguir estão ilustradas a representação do arco e do seu seno no círculo trigonométrico para diversos arcos, bem como o ponto da função seno, no plano cartesiano, associado a esse arco.

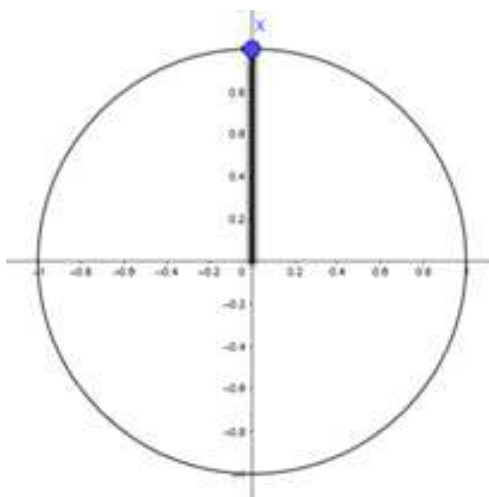


Obs.: As imagens anteriores também foram geradas com o ambiente GeoGebra. A construção está disponível em <https://www.geogebra.org/classic/nxmxxhqd> (onde é possível se desejar simultaneamente o gráfico do seno e do cosseno). A última imagem apresenta o conjunto de todos os possíveis pontos obtidos no plano cartesiano para a primeira volta no círculo trigonométrico (no sentido anti-horário).

Conforme podemos observar, o conjunto imagem dessa função é formado por todos os valores possíveis que o seno pode assumir. Relembrando a atividade da bolinha na bicicleta, percebemos que o seno é a ordenada do ponto do plano cartesiano associado à bolinha amarela. Como a circunferência tem raio 1, essa projeção assume todos os valores entre -1 e 1 , portanto o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

Periodicidade

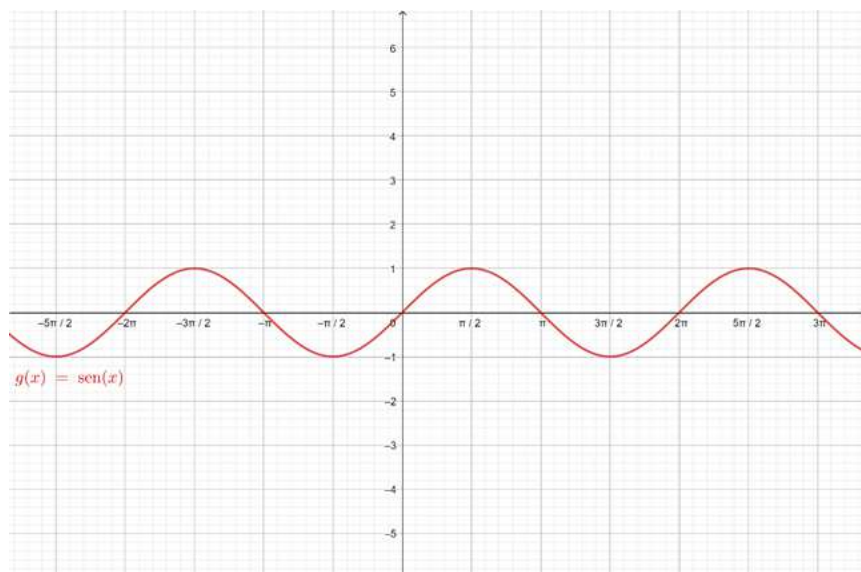
Vamos retomar a atividade da bolinha na roda e lembrar que uma bolinha que tenha percorrido dois arcos de comprimentos x e $x + 2\pi$ estão no mesmo lugar. Já sabemos, a partir daí, que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$. Isso já nos dá que a função seno é periódica e que 2π é um bom candidato a período. Mas novamente precisamos verificar se esse é o menor valor a partir do qual se iniciam as repetições. Considere inicialmente um arco de comprimento $x = \frac{\pi}{2}$. Fazendo a projeção no eixo vertical do segmento de reta que une o centro da circunferência e a bolinha que descreveu esse arco, temos que essa projeção assume o valor 1 e, portanto, $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$.



Quando, a partir do arco $\frac{\pi}{2}$, se descreve uma volta completa, ou seja, um arco de comprimento total $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, a projeção não assume mais o valor 1 — a imagem chega até -1 , o que ocorre quando o arco atinge $\frac{3\pi}{2}$. Isso mostra que 2π é o menor valor positivo de p tal que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + p)$; portanto, assim como na função cosseno, a função seno também é periódica com período igual a 2π .

Gráfico da função seno

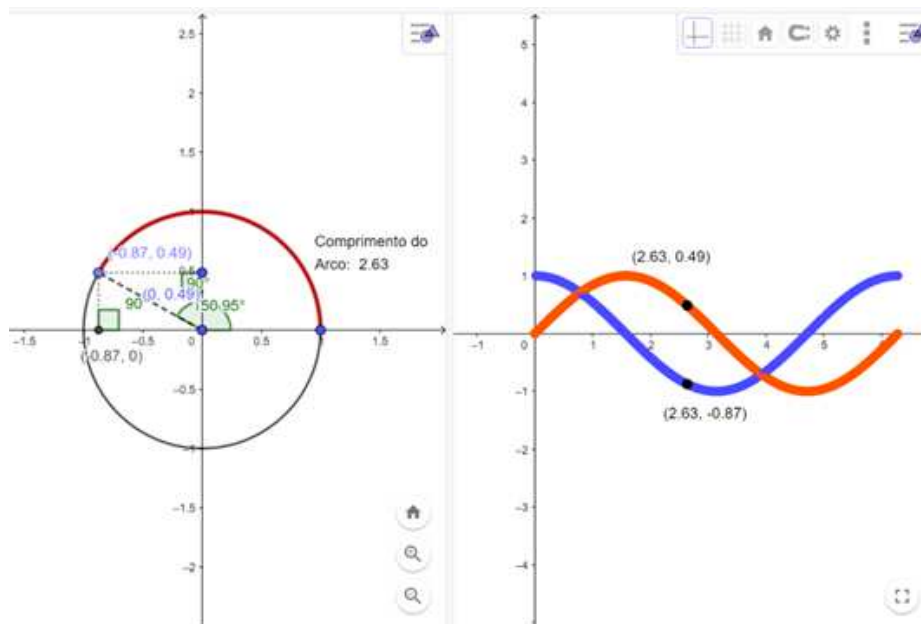
Conforme verificamos com a função cosseno, sendo a função seno também uma função periódica de período igual a 2π , seu gráfico será obtido pela repetição de um trecho largura igual ao período dessa função. Portanto, para construir o gráfico dessa função basta que analisemos o comportamento dela num intervalo do tipo $(x, x + 2\pi)$ e repetir o gráfico encontrado, unindo-os. Dessa forma, obtemos a seguinte curva:



Observando o gráfico e as características dessa função, podemos destacar algumas propriedades:

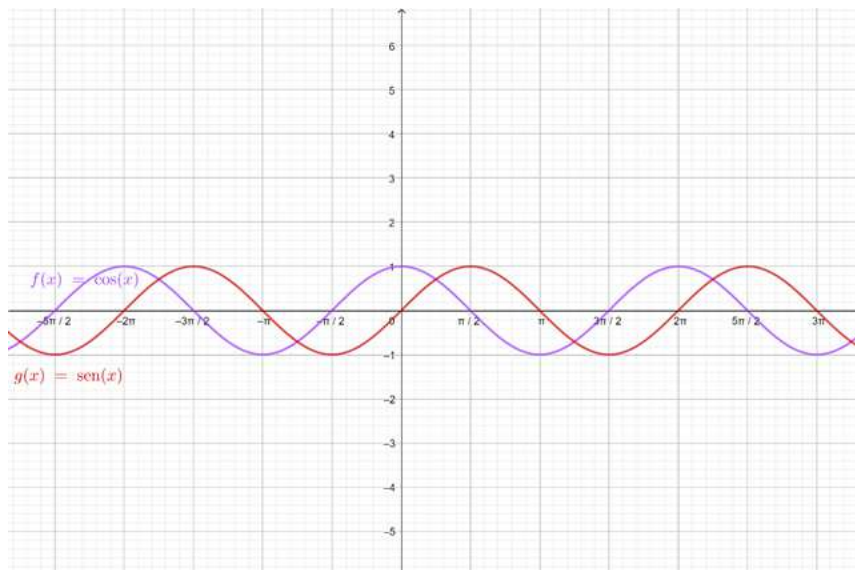
- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $\text{Im}(f) = [-1, 1]$
- Período: $p = 2\pi$
- Amplitude: $\frac{|-1 - 1|}{2} = 1$

Comparando os gráficos da função cosseno e da função seno



A imagem anterior ilustra um período do comportamento das funções seno e cosseno pensadas em um mesmo sistema de eixos coordenador, associados ao círculo trigonométrico. O percurso descrito pelos pontos na área gráfica à direita (vermelho para seno, azul para cosseno) indicam um período para cada uma dessas funções. Como são periódicas de período $p = 2\pi$, as duas curvas seguirão reproduzindo esses trechos infinitamente para a esquerda e para a direita.

Note como os gráficos de $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sin(x)$ são parecidos! Veja na figura abaixo, na qual os gráficos das duas funções aparecem esboçados em um mesmo sistema de eixos cartesianos:

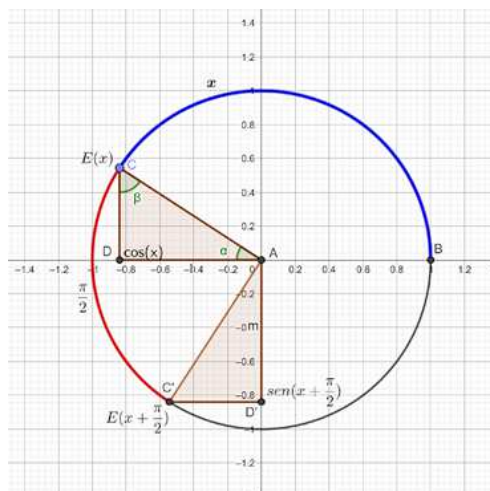


Visualmente, é possível intuir que o gráfico da função cosseno é obtido deslocando o gráfico da função seno exatamente $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Algebricamente, esta informação pode

ser traduzida através da seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Podemos justificar esta identidade analisando o círculo trigonométrico. Na figura abaixo, o arco BC mede x radianos enquanto o arco BC' mede $x + \frac{\pi}{2}$ radianos.



O ponto D é a projeção do ponto C sobre o eixo x , portanto, $D = (\cos(x), 0)$. Já o ponto D' é a projeção do ponto C' no eixo y , portanto, $D' = (0, \sin(x + \frac{\pi}{2}))$. Denotando por α e β os ângulos $C\hat{A}D$ e $A\hat{C}D$ do triângulo retângulo ACD , como soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° temos que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Como o ângulo $C\hat{A}C'$ é reto e $C\hat{A}D = \alpha$, e concluímos que $D\hat{A}C' = \beta$, mas como $D\hat{A}D'$ também é reto, obtemos que $C'\hat{A}D' = \alpha$ e $A\hat{C}'D' = \beta$. Portanto, os triângulos ACD e $AC'D'$ são congruentes e logo $\overline{AD} = \overline{AD'}$, isto é, $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, como queríamos.

A curva dada pelo gráfico da função seno (e também o da função cosseno!) é chamada de senóide.

Na atividade [Retornando à Rio Star](#), foi pedido que você

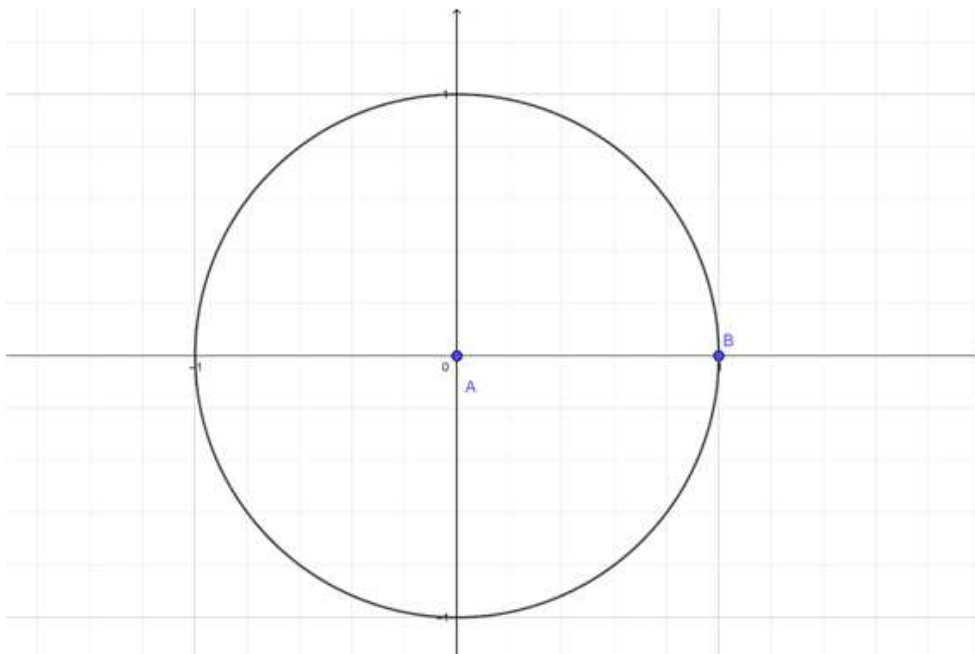
escrevesse a altura da cabine em função do tempo e você chegou na seguinte expressão para a função que descreve a altura da cabine ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 9$:

$$h(t) = 45,5 - 42,5 \cos\left(\frac{t\pi}{9}\right).$$

A definição feita para o cosseno de um número real qualquer, nos permite concluir que a fórmula acima pode ser usada para modelar o movimento em sua totalidade, ou seja, para todo $t \geq 0$.

EXERCÍCIOS

- 1 Observe a imagem do círculo trigonométrico exibida a seguir, onde o ponto A está na origem e B é o ponto $(1, 0)$.



- Tome um ponto C no círculo trigonométrico de forma que o arco $\widehat{BAC}$ meça 60° . Qual a medida desse arco em radianos?
- Trace por C uma reta paralela ao eixo y e seja C_x o ponto que essa reta tocar o eixo x . Trace o triângulo CAC_x . Quanto medem os ângulos desse triângulo?
- Quanto medem os segmentos AC , AC_x e CC_x ?
- Quais são as coordenadas do ponto C ?
- Indique mais dois arcos, um positivo e um negativo, que também tenham extremidade nesse ponto.
- Marque agora um ponto D de maneira que o arco $\widehat{BAD}$ meça 30° . Qual a medida desse arco em radianos? Repita o que fez nos itens **b)**, **c)**, **d)** e **e)** para o ponto D .
- O ponto E é tal que o arco $\widehat{BAE}$ mede 45° . Qual a medida desse arco em radianos? Repita o que fez nos itens **b)**, **c)**, **d)** e **e)** para o ponto D .

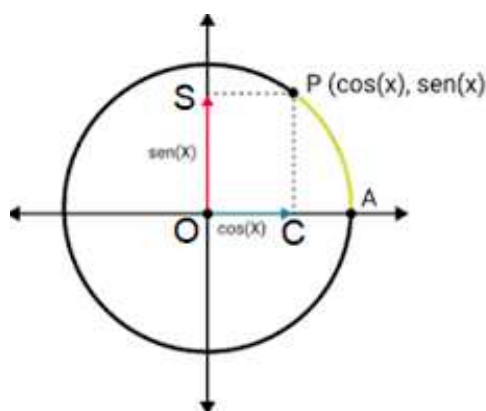
- 2 Retome o círculo trigonométrico do exercício anterior. Se P é um ponto qualquer no círculo trigonométrico tal que o arco $\widehat{BAP}$ mede α . Dessa forma, as coordenadas do ponto P são $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Assim, quais são os sinais das coordenadas de P quando:

- P está no primeiro quadrante
- P está no segundo quadrante
- P está no terceiro quadrante
- P está no quarto quadrante
- Você observa alguma regularidade nas respostas aos itens anteriores? Discuta com seus colegas e apresente suas ideias

- 3
 - a) Descreva como varia o sinal da função cosseno pelos quadrantes
 - b) Descreva como varia o sinal da função seno pelos quadrantes
 - c) Descreva como varia o crescimento da função cosseno pelos quadrantes
 - d) Descreva como varia o crescimento da função seno pelos quadrantes
- 4 Considere dois arcos no círculo trigonométrico: um com 180 radianos e outro com $|b| \neq 1$ graus. Localize esses arcos no círculo trigonométrico e usando transferidor e régua, obtenha um valor aproximado para o valor de seus senos. Utilize o GeoGebra para obter uma "prova real" das suas conclusões.

PARA SABER + IDENTIDADE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Observe a figura abaixo, onde x é um número real representado no 1º quadrante pelo ponto P .



O ponto P é a imagem de x pela função de Euler, logo, $P = (\cos(x), \sin(x))$. Como P está no primeiro quadrante, as suas coordenadas são positivas. O ângulo $\widehat{OCP}$ é reto, logo, o triângulo OPC é retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo OPC , temos:

$$\overline{OP}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{OC}^2$$

Como o raio é unitário, temos que $\overline{OP} = 1$. As medidas $\overline{PC}$ e $\overline{OC}$ correspondem exatamente às coordenadas do ponto P , portanto:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad (8.1)$$

onde $\sin^2(x)$ é o quadrado de $\sin(x)$ e $\cos^2(x)$ representa o quadrado de $\cos(x)$.

A igualdade 8.1 na verdade **vale para todo número real x** e não apenas para números que correspondem a pontos do círculo trigonométrico localizados no 1º quadrante. De fato, se o ponto $P = (\cos(x), \sin(x))$ estiver localizado sobre um eixo, então uma das suas coordenadas terá módulo 1 e a outra será nula, portanto, é imediato que neste caso, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Suponha agora que $P = (\cos(x), \sin(x))$ esteja localizado no 2º quadrante. Traçando uma reta paralela ao eixo x passando por P , obtemos um ponto Q no 1º quadrante que é a interseção dela com o círculo trigonométrico. O ponto Q corresponde à posição no círculo trigonométrico de um número real t . Observe que os triângulos OPC e OFQ da figura abaixo são congruentes.

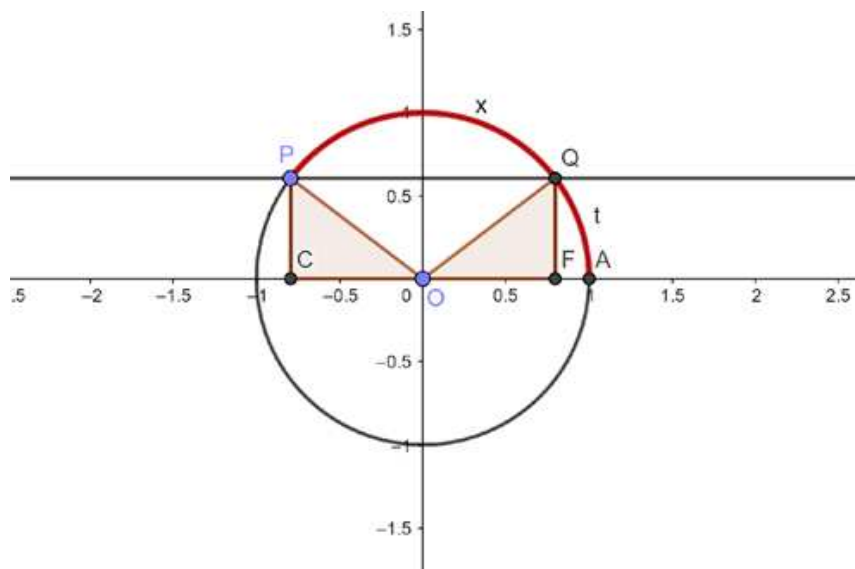
Portanto, $P = (\cos(x), \sin(x))$ e $Q = (\cos(t), \sin(t))$ tem mesma ordenada e abscissas simétricas, isto é:

$$\sin(t) = \sin(x) \text{ e } \cos(t) = -\cos(x)$$

Daí, temos

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2(t) + [-\cos(t)]^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1,$$

onde a última igualdade segue do fato de que a [identidade 8.1](#) vale para números reais que correspondem a pontos do 1º quadrante do círculo trigonométrico.



Utilizando triângulos retângulos congruentes e relacionando a medida do arco x com um arco t do primeiro quadrante de maneira similar como feita anteriormente, pode-se demonstrar (tente fazer para arcos do 3º e 4º quadrantes) que:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

A identidade anterior é conhecida como Identidade Fundamental da Trigonometria. Através dela, pode-se determinar o valor do cosseno de um número real x , sabendo-se o valor de seu seno e vice-versa. Por exemplo, se x é um arco do segundo quadrante tal que $\sin(x) = \frac{4}{5}$, vamos encontrar o valor de $\cos(x)$. Substituindo na Identidade Fundamental, obtemos:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2(x) = 1 \iff \cos^2(x) = 1 - \frac{16}{25} \iff \cos^2(x) = \frac{9}{25}.$$

Repare que como x está no 2º quadrante, necessariamente $\cos(x)$ deve ser um número negativo. Logo, a última igualdade implica que

$$\cos(x) = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

EXPLORANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Parâmetros na Rio Star

¹ Na atividade *Retornando à Rio Star* foi pedido que você escrevesse a altura da cabine e função do tempo e você chegou na seguinte expressão:

$$h(t) = 45,5 - 52,5 \cos\left(\frac{t\pi}{9}\right).$$

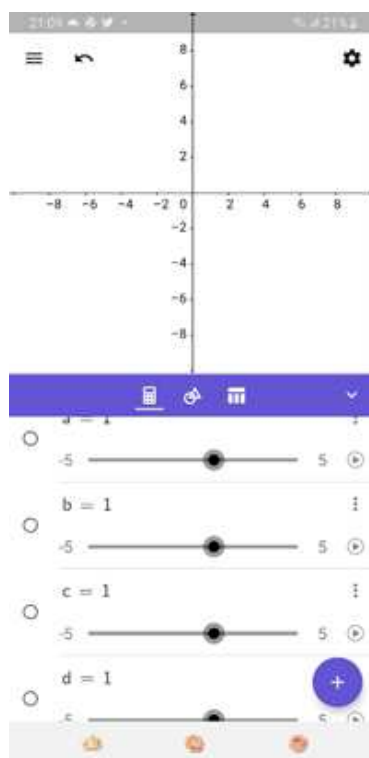
Essa expressão é uma função cosseno também, mas apresenta alguns parâmetros diferenciados. De fato, essa expressão é a função $f(x) = \cos(x)$ após passar por uma série de transformações gráficas. Vamos ver isso um pouco melhor?

Exploração de parâmetros da Função Seno

Atividade 18

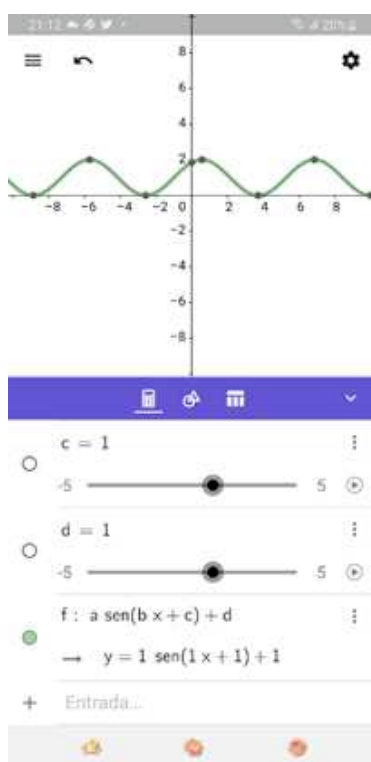
Abra uma tela nova no GeoGebra e siga os seguintes passos:

1. Crie controles deslizantes com nomes a , b , c e d . Para isso, basta digitar no campo Entrada: $a = 1$ e Enter; $b = 1$ e Enter e assim por diante. O GeoGebra criará automaticamente os controles deslizantes.

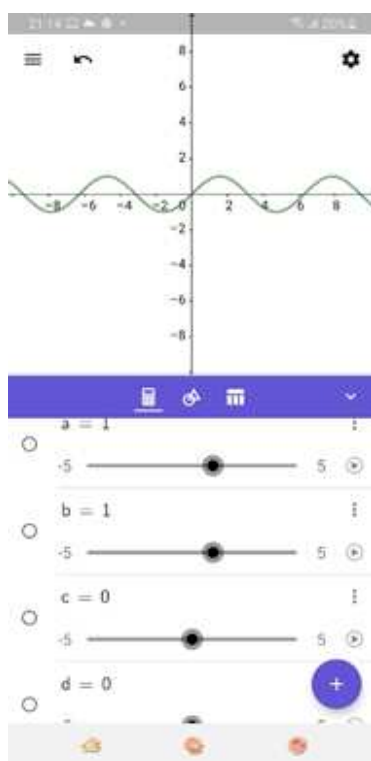


¹nota da diagramação: Havia dois explorando seguidos, juntei os dois em um e coloquei "parâmetros na rio star" como uma subseção

2. Digite no campo Entrada a função $y = a * \text{sen}(bx + c) + d$ e tecele Enter.



3. Mova os controles deslizantes a e b para o valor 1 e os controles c e d para zero. Se tiver dificuldade, você pode tocar sobre o valor do controle deslizante e fazer o ajuste digitando o valor desejado.



- Movimente lentamente o controle deslizante a para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.
- Retorne o controle deslizante a para o valor 1. Agora movimente lentamente o controle deslizante b para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.
- Retorne o controle deslizante b para o valor 1. Agora movimente lentamente o controle deslizante c para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.
- Retorne o controle deslizante c para o valor 0. Agora movimente lentamente o controle deslizante d para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.

ORGANIZANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

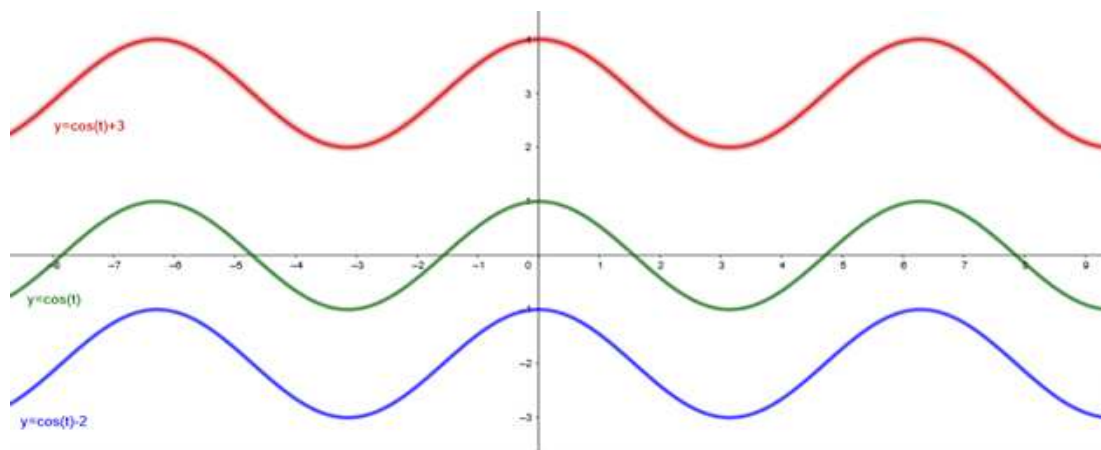
Generalizando a função cosseno, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$$

Os parâmetros nessa expressão são os números reais indicados pelas variáveis a , b , c e d . Vamos ver o impacto de cada um desses parâmetros no gráfico da função cosseno.

Translações Verticais

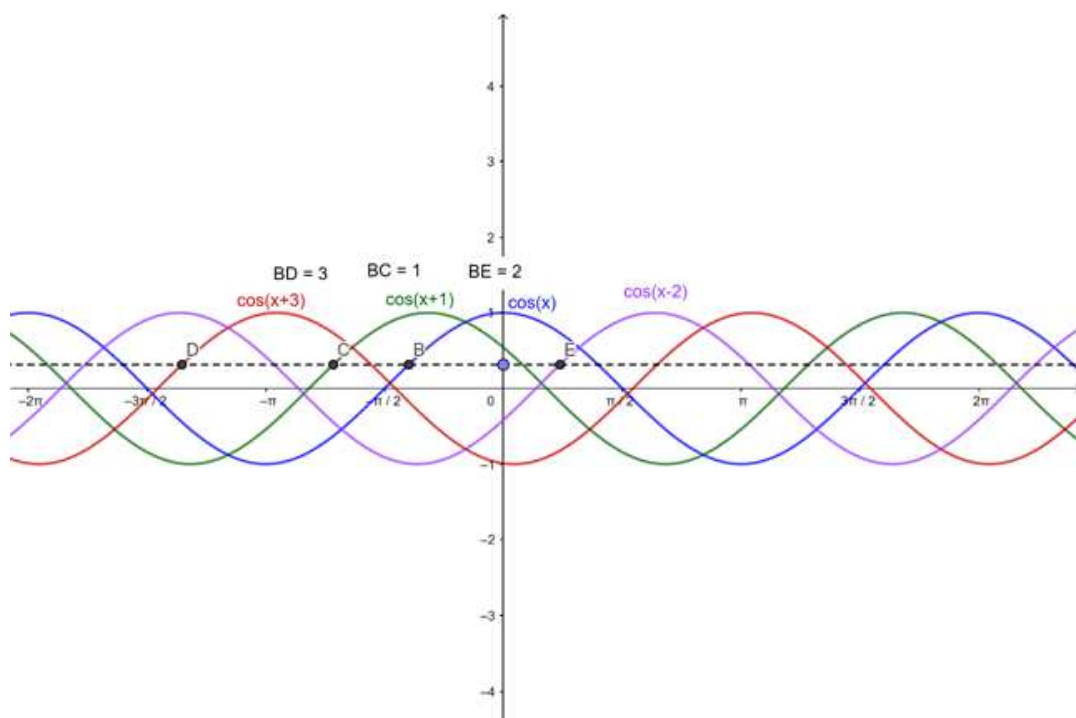
Vamos começar com o coeficiente d nessa expressão. Considere a expressão $y = \cos(x) + d$. Adicionar d unidades a uma função implica em deslocar essa função verticalmente em d unidades para cima, se d for positivo, ou para baixo, se d for negativo. Isso ocorre porque tomando um mesmo x para três funções $y_1 = \cos(x) + d_1$, $y_2 = \cos(x) + d_2$ e $y = \cos(x)$, os pontos $(x, \cos(x) + d_1)$, $(x, \cos(x) + d_2)$ e $(x, \cos(x))$ estão alinhados verticalmente, variando suas posições apenas pelos valores de d_1 e d_2 , de forma que se $d_1 < d_2$ então $(x, \cos(x) + d_1)$ estará abaixo de $(x, \cos(x) + d_2)$. A seguir temos um exemplo com as funções $y = \cos(x) + 3$, $y = \cos(x)$ e $y = \cos(x) - 2$ para as quais os valores de d são, respectivamente, 3, 0 e -2.



Em síntese, podemos dizer que se uma função é adicionada em d unidades, então o gráfico dessa função sofre translações verticais de d unidades para cima, se $d > 0$, ou para baixo, se $d < 0$. Nesse caso, a função não sofre variação nem de período nem de amplitude; apenas o seu conjunto imagem fica deslocado também em d unidades.

Translações Horizontais

Da mesma forma que o parâmetro d , o parâmetro c também gera translações no gráfico da função, porém em direção horizontal. Considere a expressão $y = \cos(x + c)$. Vamos tomar um mesmo y para três funções: $y = \cos(x + c_1)$, $y = \cos(x + c_2)$ e $y = \cos(x)$, considerando $c_1 < c_2$. Os pontos assim gerados serão $(x + c_1, y)$, (x, y) e $(x + c_2, y)$. O alinhamento observado será agora horizontal, mas em ordem invertida — ou seja, se temos $c_1 < c_2$, então $(x + c_1, \cos(x + c_1))$ estará à direita de $(x + c_2, \cos(x + c_2))$.

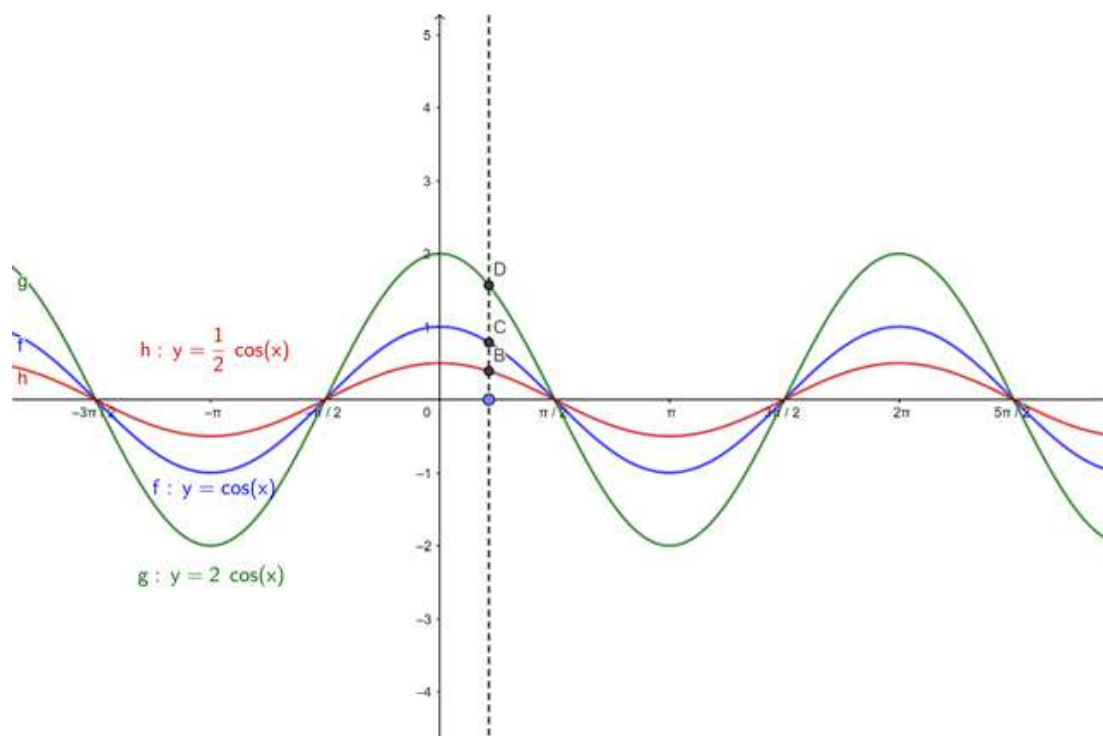


Observe que, no exemplo acima, as funções $y = \cos(x)$, $y = \cos(x + 1)$, $y = \cos(x + 3)$ e $y = \cos(x - 2)$ têm os valores do parâmetro c respectivamente iguais a 0, 1, 3 e -2 .

- A distância entre os pontos B , em $y = \cos(x)$, e D , em $y = \cos(x + 3)$ é igual a 3 unidades, o que mostra que $y = \cos(x + 3)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em três unidades para a esquerda, sendo $c = 3$, $c > 0$.
- A distância entre os pontos B em $y = \cos(x)$ e C em $y = \cos(x + 1)$ é igual a 1 unidade, portanto, $y = \cos(x + 1)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em 1 unidade para a esquerda, sendo $c = 1$, $c > 0$.
- A distância entre os pontos B em $y = \cos(x)$ e E em $y = \cos(x - 2)$ é de 2 unidades, portanto $y = \cos(x - 2)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em 2 unidades para a direita, sendo $c = -2$, $c < 0$. Em síntese, quando adicionamos c unidades aos valores de domínios de uma função, geramos um deslocamento horizontal para a direita, se $c < 0$, ou para a esquerda, se $c > 0$. Não há alteração nem de amplitude nem de período, nem tampouco de conjunto imagem.

Compressões ou expansões verticais

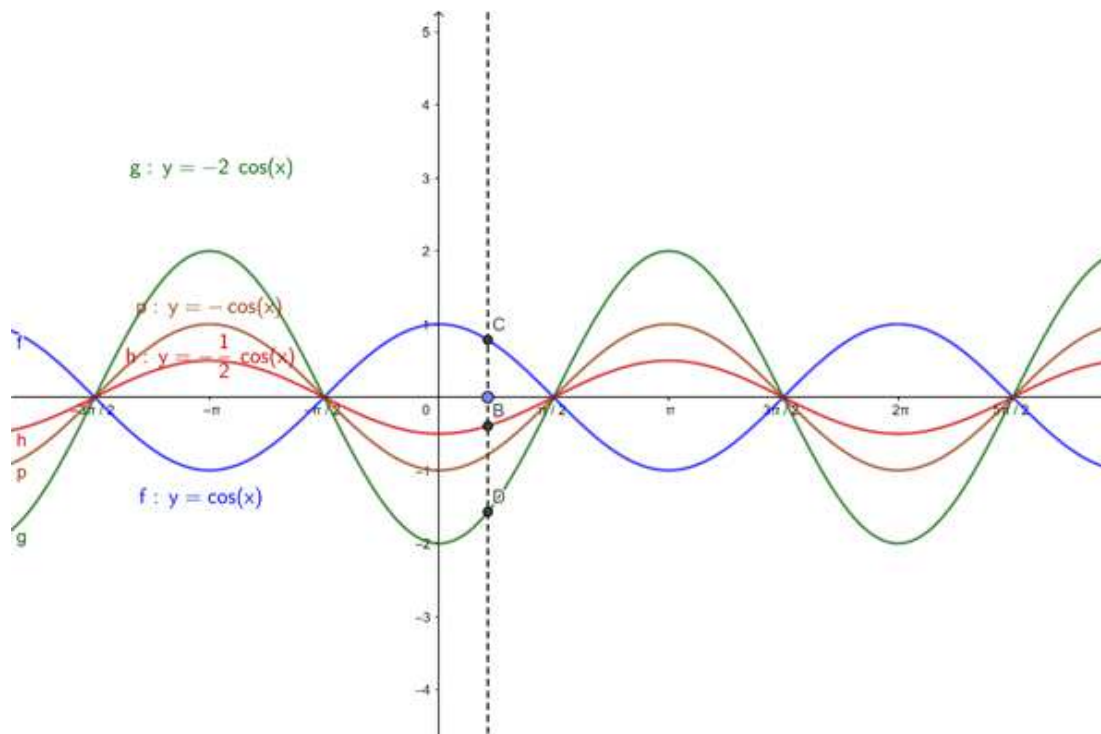
Vejamos agora o impacto do parâmetro a da expressão $y = a \cdot \cos(x)$ no gráfico da função $y = \cos(x)$. Vemos a seguir um exemplo em que os valores tomados para a foram w , 2 e $\frac{1}{2}$.



Observe que para valores positivos de a , há uma expansão ou compressão vertical:

- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por 2, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por 2, logo, há uma *expansão vertical* de fator 2.
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por $\frac{1}{2}$, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por $\frac{1}{2}$, logo, há uma *contração* vertical de fator 2.

E se a for um número negativo? As situações observadas serão as mesmas, mas refletidas em relação ao eixo x . Vamos tomar, como exemplo, valores para a iguais a 1, -1 , -2 e $-\frac{1}{2}$.



Observe que para valores negativos de a , também há uma expansão ou compressão vertical:

- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por -1 , estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por -1 , logo, há uma reflexão vertical em torno do eixo x .
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por -2 , estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por -2 , o que equivale a multiplicar por -1 e em seguida por 2 . Portanto, obtemos uma reflexão em relação ao eixo x seguida de uma expansão vertical de fator 2 .
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por $-\frac{1}{2}$, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por $-\frac{1}{2}$, o que equivale a multiplicar por -1 e em seguida por $\frac{1}{2}$. Portanto, obtemos uma reflexão em relação ao eixo x seguida de uma compressão vertical de fator $\frac{1}{2}$.

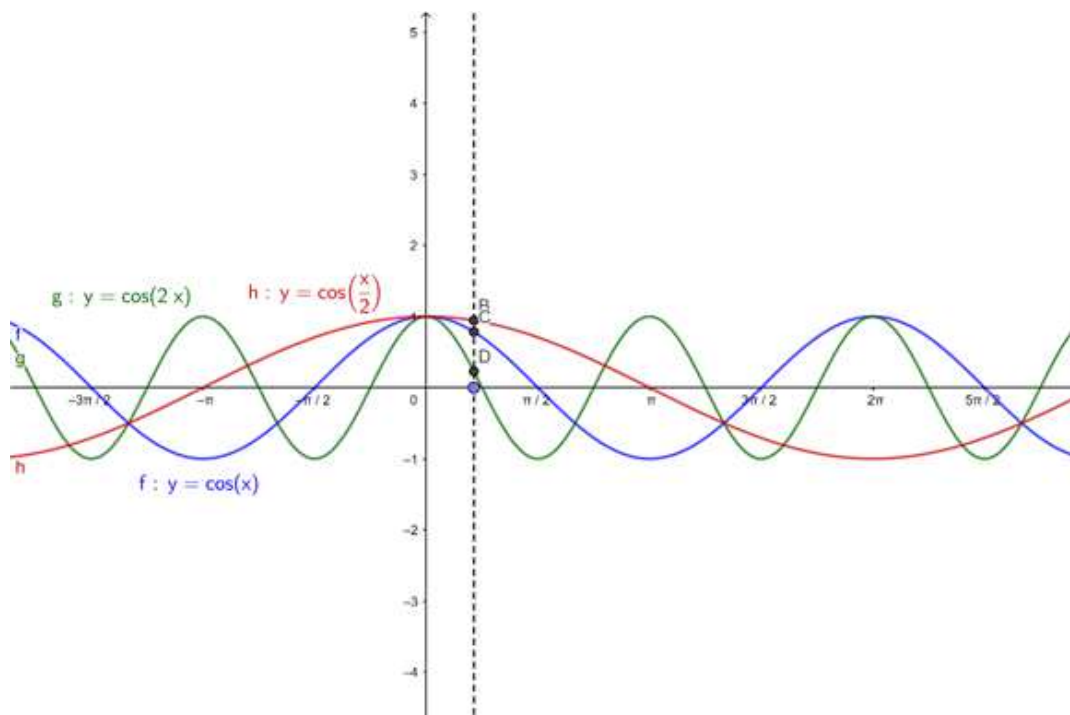
De forma mais geral, ao tomarmos a função, $y = a \cdot \cos(x)$ estamos multiplicando a coordenada y por a , o gráfico é expandido (se $|a| > 1$) ou contraído (se $0 < |a| < 1$) na direção vertical, além de ser refletido em relação ao eixo x , se $a < 0$.

Note que esse fator a influencia os valores máximos e mínimos atingidos pela função $f(x) = a \cdot \cos(x)$. Enquanto a função $g(x) = \cos(x)$ tem valor máximo igual a 1 e mínimo igual a -1 a função $f(x) = a \cdot \cos(x)$ tem valor máximo igual a $|a|$ e mínimo igual a $-|a|$ — o que indica que o valor da função oscila num intervalo de comprimento $2|a|$. Logo, multiplicar a função por um número real altera a amplitude dessa função, altera o conjunto imagem da função mas não interfere no período dessa função.

Compressões ou expansões horizontais

Vejam agora o impacto do parâmetro b da expressão $y = \cos(b \cdot x)$ no gráfico da função $y = \cos(x)$. Antes de qualquer coisa, note que se $b = 0$, temos que $y = \cos(0) = 1$ e, portanto, para esse valor, temos a função constante igual a 1. Desconsideremos esse caso então, ou seja, estamos assumindo que $b \neq 0$.

Para fixar, tomemos b igual a 1, 2 e $\frac{1}{2}$.



Para valores positivos de b , teremos uma expansão ou compressão horizontal, como ilustrado nos seguintes exemplos:

- Se $b = 2$, a função $y = \cos(2x)$ calculará a abscissa do ponto $E(2x)$, onde E é a função de Euler. Conforme se aumenta o valor de x , o ponto $E(2x)$ percorrerá o círculo trigonométrico com o dobro da velocidade percorrida pelo ponto $E(x)$. De fato, começando em $x = 0$, para que o ponto $E(x)$ dê uma volta completa no círculo trigonométrico, x precisa percorrer todo o intervalo $[0, 2\pi]$. Por sua vez, o ponto $E(2x)$ dá a mesma volta completa bastando que x percorra o intervalo $[0, \pi]$. Portanto o ciclo de repetição do gráfico de $y = \cos(2x)$ se dará num intervalo menor, de comprimento igual a π . Geometricamente, o gráfico de $y = \cos(2x)$ fica "comprimido horizontalmente" em relação ao de $y = \cos(x)$ (vide figura).
- Se $b = \frac{1}{2}$, a função $y = \cos(x/2)$ calculará a abscissa do ponto $E(\frac{x}{2})$, onde E é a função de Euler. Conforme se aumenta o valor de x , o ponto $E(\frac{x}{2})$ percorrerá o círculo trigonométrico com a metade da velocidade percorrida pelo ponto $E(x)$. De fato, começando em $x = 0$, para que o ponto $E(x)$ dê uma volta completa no círculo trigonométrico, x precisa percorrer todo o intervalo $[0, 2\pi]$. Por sua vez, o ponto $E(\frac{x}{2})$ dá a mesma volta completa apenas depois que x percorrer o intervalo $[0, 4\pi]$. Portanto o ciclo de repetição do gráfico de $y = \cos(x/2)$ se dará num intervalo maior, de comprimento igual a 4π . Geometricamente, o gráfico de $y = \cos(\frac{x}{2})$ fica "expandido horizontalmente" em relação ao de $y = \cos(x)$ (vide figura).

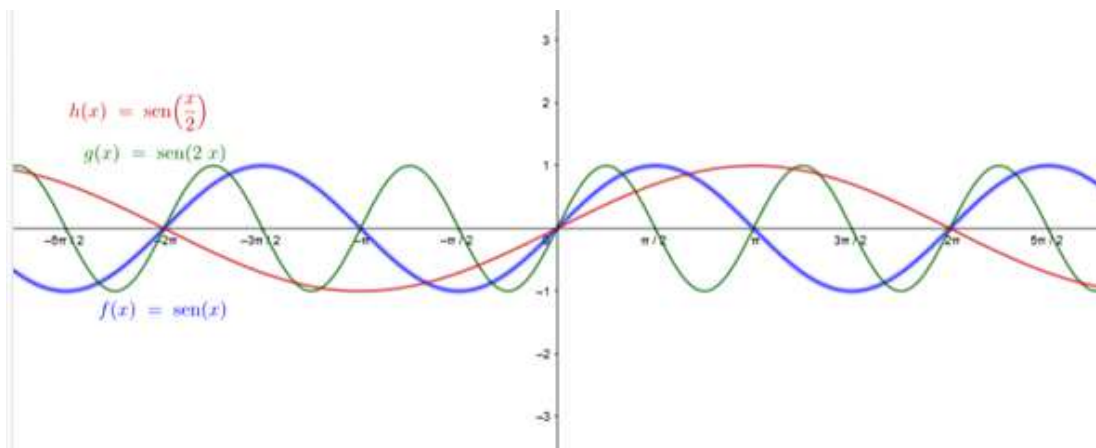
De maneira geral, se $b > 0$, a função $y = \cos(bx)$ calcula a abscissa do ponto $E(bx)$. Começando com $x = 0$ e aumentando o valor de x , para que esse ponto percorra uma volta completa no sentido no círculo trigonométrico, x deverá percorrer o intervalo $[0, \frac{2\pi}{b}]$. Como o ciclo de repetição do gráfico de $y = \cos(bx)$ se dará nesse último intervalo, o período desta função será $\frac{2\pi}{b}$.

Se $b < 0$ então, começando com $x = 0$, conforme x aumenta, o ponto $E(bx)$ percorrerá o sentido horário do círculo trigonométrico e dará uma volta completa no círculo quando x percorrer todo o intervalo $[0, \frac{2\pi}{b}]$. Por exemplo, se $b = -2$, então quando x varia no intervalo $[0, \pi]$ então $E(-2x)$ dá uma volta completa no sentido horário. Assim, $\frac{2\pi}{b}$ será o período de função $y = \cos(bx)$ neste caso.

Esta análise nos permite concluir que, o período da função $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ é alterado apenas pelo parâmetro b e seu valor será dado por:

$$P = |2\frac{\pi}{b}|.$$

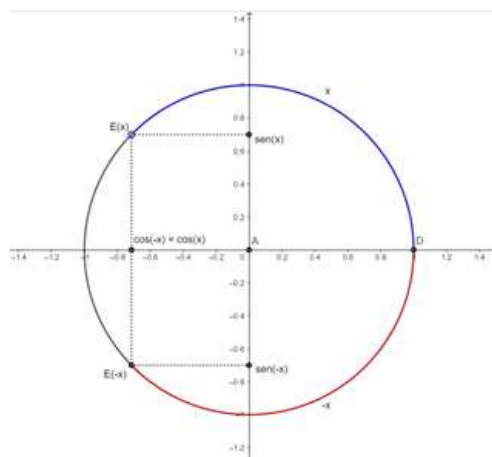
Para a função seno o comportamento será o mesmo, visto que ela calcula a ordenada do ponto $E(bx)$ ao invés da abscissa.



Observação: Na Atividade [Exploração de Parâmetros da Função Seno](#) você deve ter percebido que o gráfico da função $y = \sin(-x)$ é obtido pela reflexão em torno do eixo dos x do gráfico da função $y = \sin(x)$. Algebricamente isso significa que para todo número real x tem-se:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

. Esta última igualdade se justifica pelo fato do ponto $E(-x)$ no círculo trigonométrico associado o número $-x$ ser exatamente a reflexão, em relação ao eixo horizontal, do ponto $E(x)$ correspondente ao número x . Dessa forma, $E(-x)$ e $E(x)$ têm ordenadas opostas, isto é, $\sin(-x) = -\sin(x)$. (vide figura a seguir). Observe que a mesma figura também nos permite deduzir a igualdade $\cos(-x) = \cos(x)$.



PRATICANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Colhendo Estrelas

Atividade 19

Usando o link da plataforma Desmos (<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/566b317d4e38e1e21a10ab07#preview/df77bcd1-a128-4e8b-a1e6-6417acf42950>), altere os parâmetros da função seno para alterar o formato da senóide e conseguir pegar todas as estrelas da tela.

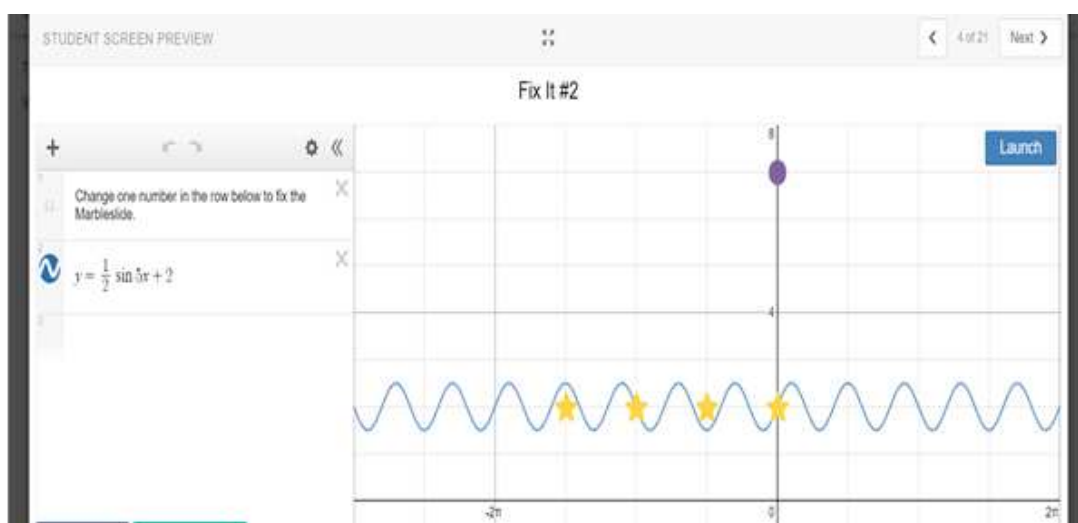
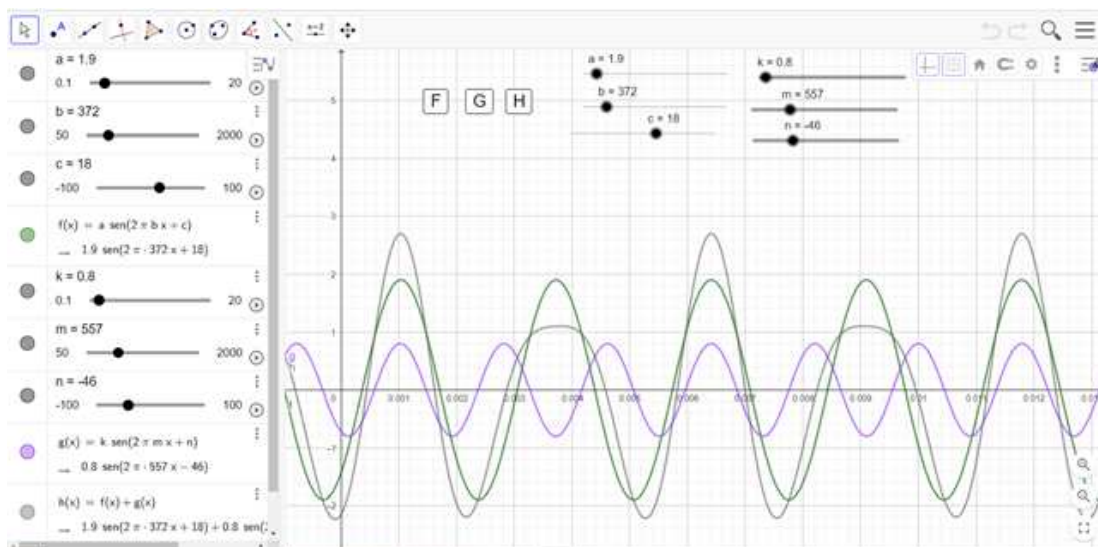


Figura 8.19: Fonte: Desmos – Marbleslides: Periodics

Ouvindo Funções Trigonométricas

Atividade 20

No "Você Sabia: O Som e as Ondas Sonoras", você foi capaz de enxergar as ondas sonoras associadas a sons produzidos próximo ao seu aparelho celular. Nesta atividade faremos o caminho contrário: produziremos ondas sonoras no GeoGebra e iremos ouvi-las. Acesse o seguinte link para realizar a atividade: <https://www.geogebra.org/classic/sdx68rqp>



As ondas sonoras que você irá ouvir correspondem aos gráficos das seguintes funções:

$$F(x) = a \cdot \sin(2\pi bx + c)$$

$$G(x) = k \cdot \sin(2\pi mx + n) \text{ e}$$

$$H(x) = F(x) + G(x)$$

Repare que a função H gera uma onda que é obtida combinando as ondas associadas a F e G , visto que H é dada pela soma de F com G . Movimente os controles deslizantes a , b e c para alterar o formato da onda F , os controles k , m e n para alterar o formato da onda G e qualquer um deles para alterar a onda H . Clique nos botões F , G ou H para ouvir o som associado à onda correspondente. Responda às perguntas:

- Quais parâmetros estão associados à intensidade do som produzido?
- Quais parâmetros estão associados à característica do som ser mais agudo ou mais grave?
- Há algum parâmetro que ao ser movido não altera nenhuma característica do som? Qual(is)?
- Há algum valor do parâmetro b para o qual você não consegue ouvir o som emitido pela onda F ? Qual?

VOCÊ SABIA?

Frequência do Som

A frequência do som associado a uma onda sonora é por definição o inverso multiplicativo do seu período. Na atividade anterior, a onda F tem período igual a $\frac{2\pi}{2\pi b} = \frac{1}{b}$. Portanto, a frequência do som associado à onda F é igual a b . Em Física, a unidade de medida utilizada para medir a frequência do som é o Hertz (Hz).

O ouvido humano é capaz de ouvir ondas sonoras entre 20 Hz a 20000 Hz. Acima disso temos os ultra-sons. Os morcegos utilizam os ultra-sons para detectar objetos e animais ao seu redor através da emissão de ondas sonoras que ecoam de volta para ele ao atingir obstáculos. É assim que eles se guiam no escuro.



Figura 8.20: Fonte: [Universidade de São Paulo](#)

No vídeo abaixo, você pode ouvir uma onda sonora que tem amplitude constante, com frequência variando de 20 Hz a 20.000 Hz. Será que você ouve bem? Assista-o para descobrir em quais intervalos de valor da frequência você consegue ouvir algum som:

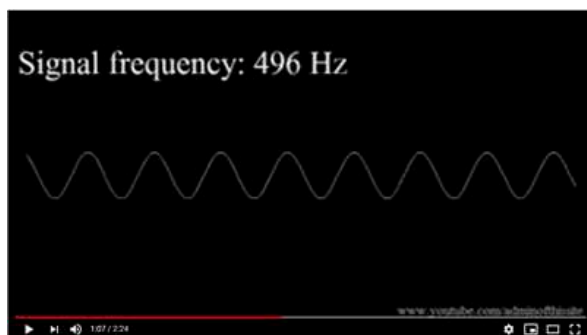


Figura 8.21: Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=-bjvZDhScbs>

EXERCÍCIOS

1 Elabore um quadro síntese das transformações gráficas causadas pelos parâmetros a , b , c e d nas funções $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ e $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$. Analise a influência dos parâmetros na imagem, no período e na amplitude dessas funções.

2 Esboçar o gráfico das funções, descrevendo as transformações ocorridas.

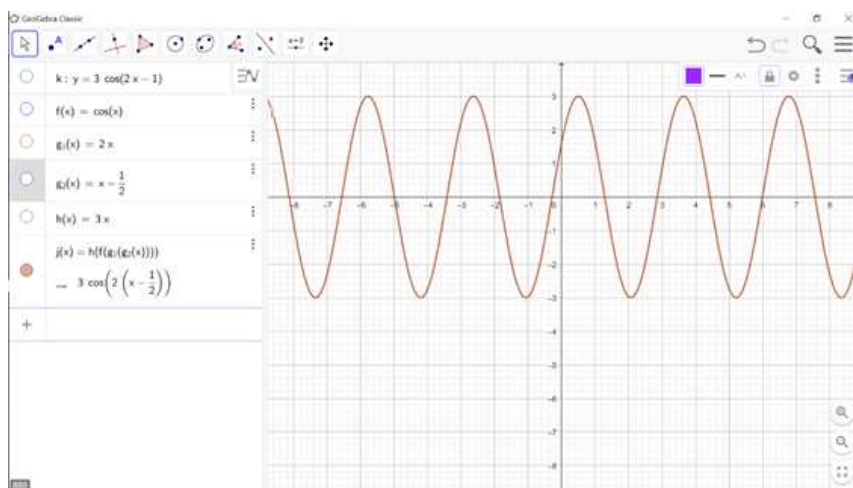
a) $f(x) = 3 \cos(2x - 1)$

b) $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{e} - \pi\right)$

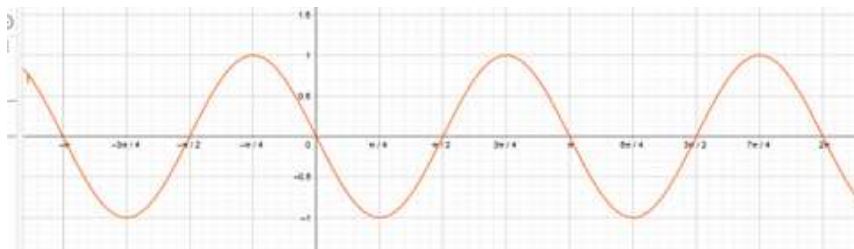
c) $f(x) = \left| \cos\left(\frac{x-1}{2}\right) \right|$

3 Em cada item a seguir, determine a , b e c para que a curva dada seja o gráfico de f .

a) $f(x) = a \cos(bx - c)$



b) $f(x) = a \sin$



PARA SABER + PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS

Funções periódicas apresentam algumas propriedades interessantes. Conforme alteramos alguns de seus parâmetros, podemos obter outras funções periódicas que podem ou não acarretar em mudança no valor de seu período e de sua amplitude. Vamos estudar aqui algumas dessas alterações. Se f é uma função periódica de período p , temos que:

■ Se k é uma constante real, a função $f_1(x) = f(x) + k$ também é periódica de período p .

Se $A = (x, f(x))$ é um ponto do gráfico qualquer de f , o ponto do gráfico de f_1 que tem abscissa igual a x é $A_1 = (x, f_1(x)) = (x, f(x) + k)$. Se $k > 0$, o ponto A_1 está k unidades acima do ponto A . Variando x ao longo do domínio de f vemos que o gráfico de f_1 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação vertical de k unidades para cima. Se $k < 0$, a situação é parecida: o gráfico de f_1 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação vertical de $-k$ unidades para baixo. Note que translações são *isometrias*, o que significa que não há alterações propriamente na figura transladada, a não ser em sua posição em relação à anterior. Logo, não havendo alterações no gráfico inicial, a função assim gerada também é naturalmente periódica de período p . Algebricamente temos que se $f_1(x) = f(x) + k$, então para todo x tal que x e $x + p$ pertençam ao domínio de f :

$$f_1(x + p) = f(x + p) + k = f(x) + k = f_1(x).$$

Logo, f_1 , obtida como uma translação vertical de f , é uma função periódica.

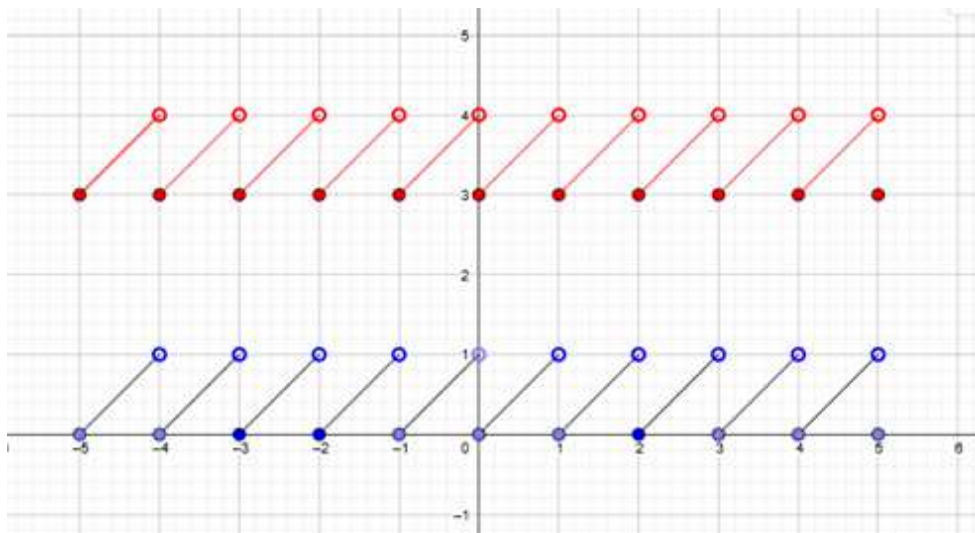
Quais serão os valores do período e da amplitude de f_1 ? Seja p o seu período. Como vimos acima, se p é o período de f , então $f_1(x + p) = f_1(x)$ para todo x . Portanto, somar p aos valores do domínio de f_1 não altera as suas imagens. Como p por definição é o menor valor com essa propriedade, temos que $p' \leq p$. Por outro lado, como $f(x) = f_1(x) - k$, temos que

$$f(x + p) = f_1(x + p) - k = f_1(x) - k = f(x),$$

onde a segunda igualdade vale porque p é o período de f_1 . Portanto $f(x + p) = f(x)$, o que significa que somar p aos valores do domínio de f não altera suas imagens. Mas como p é o período de f , devemos ter $p \leq p'$. Concluímos que $p = p'$. Se o maior e o menor valor assumidos por f são M e m respectivamente, o maior e o menor valor assumidos por f_1 serão $M + k$ e $m + k$. Portanto, a amplitude de f_1 será:

$$\frac{(M + k) - (m + k)}{2} = \frac{M - m}{2}$$

Concluímos então que f_1 tem mesmo período e amplitude que f . No exemplo a seguir vemos uma translação de 3 unidades verticalmente para cima da função dente de serra:



■ Se k é uma constante real, a função $f_2(x) = f(x + k)$ também é periódica de período p .

Observe que se $D \subset \mathbb{R}$, os valores de x pertencentes ao domínio D da função f_2 devem ser tais que $x + k \in D$, para que a expressão $f(x + k)$ faça sentido. Assim, o maior subconjunto D' que tem essa propriedade é $D = \{x \in \mathbb{R}; x + k \in D\}$.

Se $A = (x, f(x))$ é um ponto do gráfico qualquer de f , o ponto do gráfico de f_2 que fica sobre o número $x - k$ é

$$A_1 = (x - k, f_2(x)) = (x - k, f(x - k + k)) = (x - k, f(x)).$$

Se $k > 0$, o ponto A_1 está k unidades à esquerda do ponto A e ambos os pontos têm mesma altura $f(x)$. Variando x ao longo do domínio de f vemos que o gráfico de f_2 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação horizontal de k unidades para a esquerda. Se $k < 0$, a situação é parecida: o gráfico de f_2 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação horizontal de $-k$ unidades para a direita. Da mesma maneira que as translações verticais, as horizontais também são isometrias, o que indica que há apenas um deslocamento da posição do gráfico do f , mantendo o seu formato. Assim sendo, a função f_2 assim obtida também será periódica de período p . Algebricamente, podemos escrever que:

$$f_2(x + p) = f((x + p) + k) = f((x + k) + p) = f(x + k) = f_2(x),$$

onde a penúltima igualdade vem do fato de p ser o período de f . Portanto, $f_2(x + p) = f_2(x)$. Se p é o período de f_2 , concluímos que $p' \leq p$. Por outro lado, repare que $f(x) = f((x - k) + k) = f_2(x - k)$ para todo x no domínio de f . Logo:

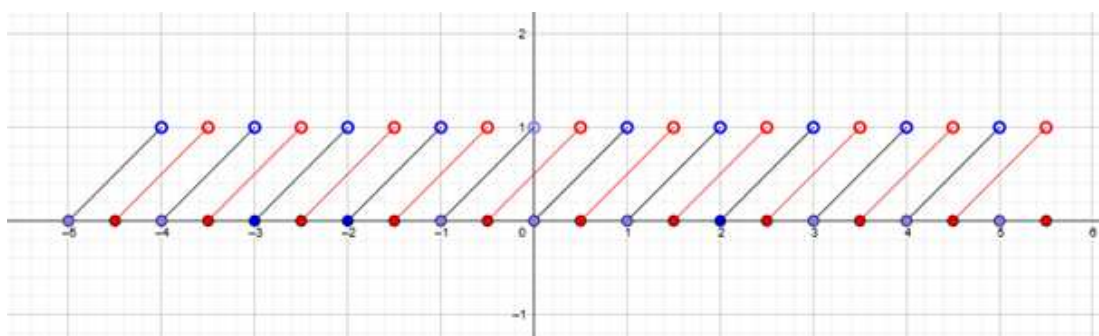
$$f(x + p) = f_2((x + p) - k) = f_2((x - k) + p) = f_2(x - k) = f(x),$$

onde a penúltima igualdade vem do fato de p ser o período de f_2 . Logo, $f(x + p) = f(x)$, portanto $p \leq p$. Concluímos que $p = p$, demonstrando assim que f_2 e f têm o mesmo período.

Repare que como o gráfico de f_2 é uma translação vertical do gráfico de f , o valor máximo assumido por f_2 é o mesmo que o assumido por f . Da mesma forma, os valores mínimos de f_2 e f são os mesmos. Portanto, a amplitude de f_2 será a mesma de f .

A figura a seguir mostra a função cujo gráfico é a translação horizontal de $\frac{1}{2}$ para a direita do gráfico da função dente de serra. Repare que como o domínio desta função é $D = [-5, 5]$, o

maior conjunto D que pode ser domínio da nova função será $D = \{x \in \mathbb{R}; x - \frac{1}{2} \in D\} = [-4, 5; 5, 5]$.



■ Se a é um número real não nulo, a função $f_3(x) = a \cdot f(x)$ obtida pelo produto da função f periódica de período p também é periódica de período p .

Temos:

$$f_3(x + p) = a \cdot f(x + p) = a \cdot f(x) = f_3(x)$$

logo $f_3(x)$ é uma função periódica. Se p é o período de f_3 temos que $p' \leq p$. Como $f(x) = \frac{f_3(x)}{a}$ para todo x , temos:

$$f(x + p') = \frac{f_3(x + p')}{a} = \frac{f_3(x)}{a} = f(x),$$

logo, $p \leq p'$ e concluímos que $p = p'$

Portanto, a função f_3 obtida como um produto da função f periódica de período p por um número real a não nulo também é periódica de período p . No entanto, a amplitude dessa função é alterada por essa transformação. De fato, suponha que M e m são respectivamente o maior e o menor valor assumido por f . Como $f_3(x) = a \cdot f(x)$, se $a > 0$, o maior e o menor valor assumidos por f_3 serão $a \cdot M$ e $a \cdot m$ respectivamente. Logo a amplitude de f_3 será igual a

$$\frac{a \cdot M - a \cdot m}{2} = a \cdot \frac{(M - m)}{2},$$

ou seja, será igual à amplitude de f multiplicada por a .

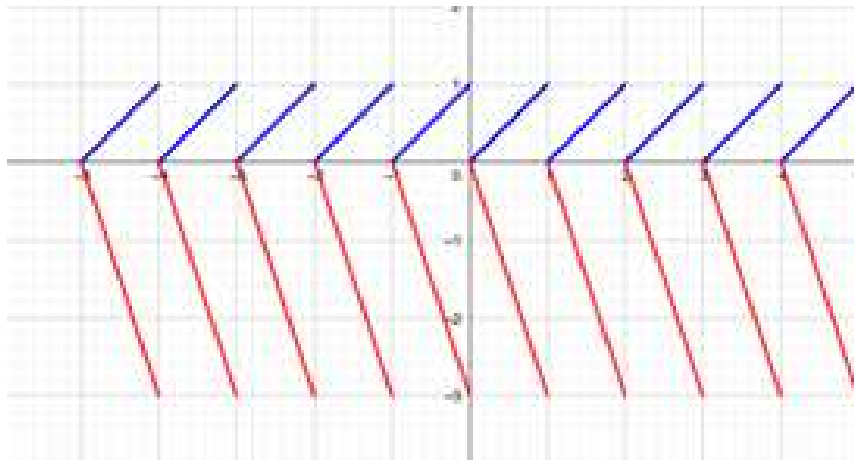
No caso em que $a < 0$, em virtude da regra de sinais, o maior valor de f_3 passa a ser $a \cdot m$ e o menor valor, $a \cdot M$. Tome, por exemplo, uma função cujo valor mínimo é -3 e o valor máximo é 5 . Se multiplicarmos a expressão dessa função por -2 , o valor máximo da nova função será 6 e o mínimo será -10 . Portanto, a amplitude de f_3 nesse caso será

$$\frac{a \cdot M - a \cdot m}{2} = (-a) \cdot \frac{(M - m)}{2}.$$

Observe que, se $a > 0$ ou $a < 0$, concluímos que a amplitude de f_3 será igual à amplitude de f multiplicada por $|a|$.

Geometricamente, o gráfico da função f_3 é uma compressão (se $0 < |a| < 1$) ou uma expansão (se $|a| > 1$) de direção vertical do gráfico da função f , não alterando assim as características de periodicidade.

Abaixo, vemos como fica o gráfico de função dente de serra ao multiplicarmos sua expressão analítica por -3 .



■ Se b é um número real não nulo, a função $f_4(x) = f(bx)$ também é periódica e seu período é $\frac{p}{|b|}$.

Observe que se $D \subset \mathbb{R}$, os valores de x pertencentes ao domínio D da função f_2 devem ser tais que $bx \in D$, para que a expressão $f(bx)$ faça sentido. Assim, o maior subconjunto D que tem essa propriedade é $D = \{x \in \mathbb{R}; bx \in D\}$. Podemos constatar que:

$$f_4\left(x + \frac{p}{|b|}\right) = f\left(b\left(x + \frac{p}{|b|}\right)\right) = f\left(bx + \frac{bp}{|b|}\right) = f(bx \pm p) = f(bx) = f_4(x),$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato que o valor da imagem de f não se altera quando somamos ou subtraímos o valor do seu período. A igualdade acima mostra que f_4 é uma função periódica e que, se representarmos seu período por p' , teremos $p' \leq \frac{p}{|b|}$. Decorre da igualdade que define a imagem da função f_4 que, para todo número t pertencente ao domínio de f , temos $f(t) = f_4\left(\frac{t}{b}\right)$. Assim:

$$f(t + p' \cdot |b|) = f_4\left(\frac{t + p' \cdot |b|}{b}\right) = f_4\left(\frac{t}{b} \pm p'\right) = f_4\left(\frac{t}{b}\right) = f(t)$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato da imagem de f_4 não se alterar quando somamos ou subtraímos seu período. Como p é o período de f e $f(t + p'|b|) = f(t)$ para todo t em seu domínio, concluímos que $p \leq p'|b|$, ou seja, $p' \geq \frac{p}{|b|}$. Provamos assim que $p' = \frac{p}{|b|}$.

Por outro lado, a igualdade $f_4(x) = f(bx)$ implica que os valores das imagens de f_4 também são imagens de f . Suponha que f atinge um máximo M e um valor mínimo m . Esses valores são atingidos em pontos x_1 e x_2 de seu domínio, ou seja, $M = f(x_1)$ e $m = f(x_2)$. Logo, temos que

$$f_4\left(\frac{x_1}{b}\right) = f\left(\frac{bx_1}{b}\right) = f(x_1) = M,$$

logo a imagem de f_4 em $\frac{x_1}{b}$ é M . Da mesma forma,

$$f_4\left(\frac{x_2}{b}\right) = f\left(\frac{bx_2}{b}\right) = f(x_2) = m$$

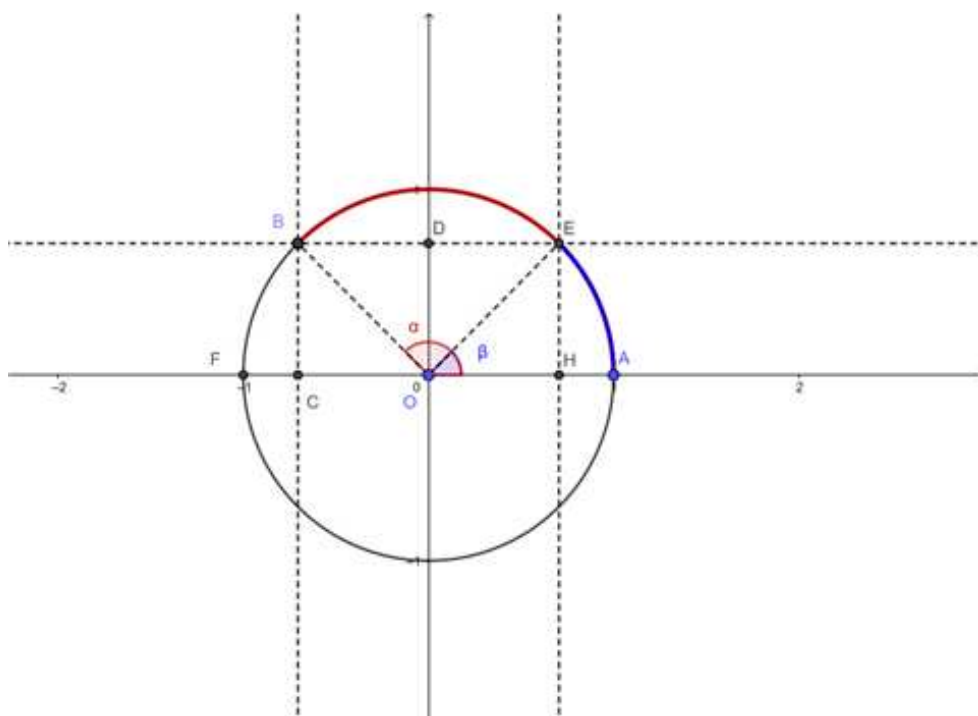
Logo, a amplitude de f_4 é a mesma de f , pois as duas funções assumem o mesmo valor máximo e o mesmo valor mínimo. sua amplitude não se altera, visto não haver alterações verticais na função.

PARA SABER + SIMETRIAS, SENOS E COSSENOS

Vamos conversar sobre as relações de simetria existentes entre valores de senos ou cossenos de arcos. Para compreendê-las bem, precisamos estudá-las quadrante a quadrante. Consideremos então no círculo trigonométrico o ponto B de coordenadas $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ - o arco $\widehat{AOB}$ medindo α .

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 2º quadrantes

Se B está no 2º quadrante, consideremos a paralela ao eixo horizontal que passa por B e encontra o círculo trigonométrico em E , onde E está no 1º quadrante, sendo β a medida do arco $\widehat{AOE}$.



Qual a relação que existe entre α e β , ou seja, qual a relação que existe entre os arcos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOE}$ quando B está no 2º quadrante?

Vamos começar observando os arcos $\widehat{BOF}$ e $\widehat{AOE}$ sendo A o ponto $(1, 0)$ e F o ponto $(-1, 0)$. Note que as coordenadas de E e B são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $(\cos \beta, \sin \beta)$ respectivamente. Mas B é simétrico a E em relação ao eixo vertical, então $x_B = -x_E$ e $y_B = y_E$, assim, temos $\cos \beta = -\cos \alpha$ e $\sin \beta = \sin \alpha$.

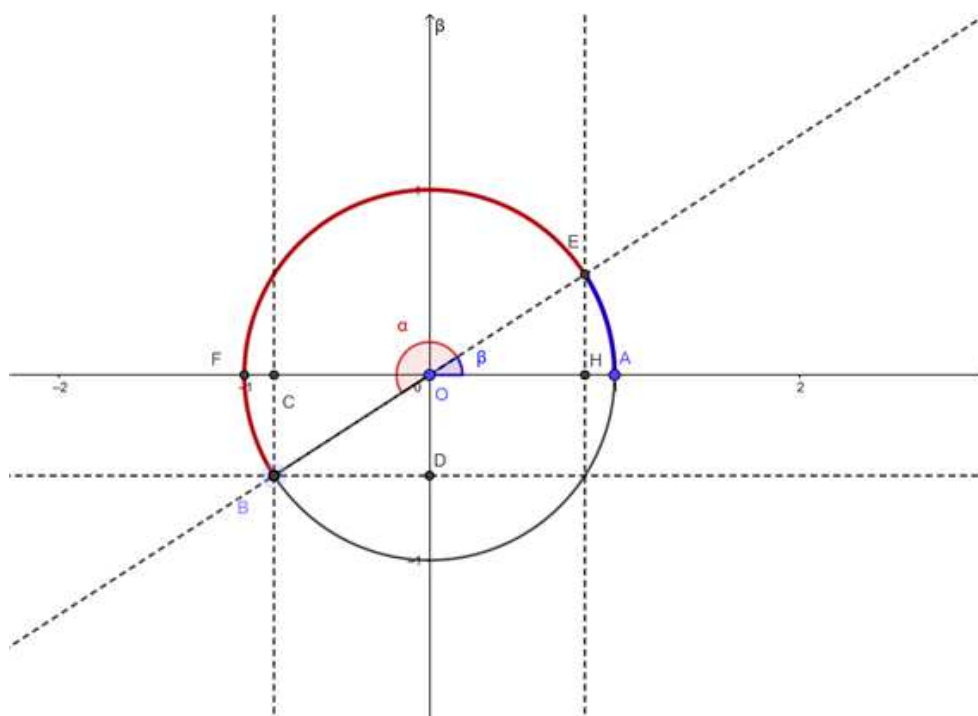
Podemos escrever essa relação de outra maneira. Sabemos que os arcos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOF}$ são suplementares, logo somam 180° ou π rad, assim

$$\alpha + \beta = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - \alpha \text{ ou } \alpha + \beta = \pi \text{ rad} \implies \beta = \pi \text{ rad} - \alpha$$

Essa relação é conhecida como *redução de arcos do 2º quadrante para o 1º quadrante* e pode ser assim descrita: "dado um arco qualquer de medida x com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos $\sin x = \sin(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$ ".

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 3º quadrantes

Considere na figura a seguir o ponto B no terceiro quadrante e a reta traçada por B passando pela origem do sistema cartesiano, que determina E sobre o círculo trigonométrico, E no 1º quadrante tal que β é a medida do $\widehat{AOE}$. As coordenadas de E e B são $B(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $E(\cos \beta, \sin \beta)$ respectivamente. Mas B é anti-simétrico a E em relação aos eixos coordenados, logo $x_B = -x_E$, ou seja, $\cos \beta = -\cos \alpha$, e ainda $y_B = -y_E$, o que implica que $\sin \beta = -\sin \alpha$.



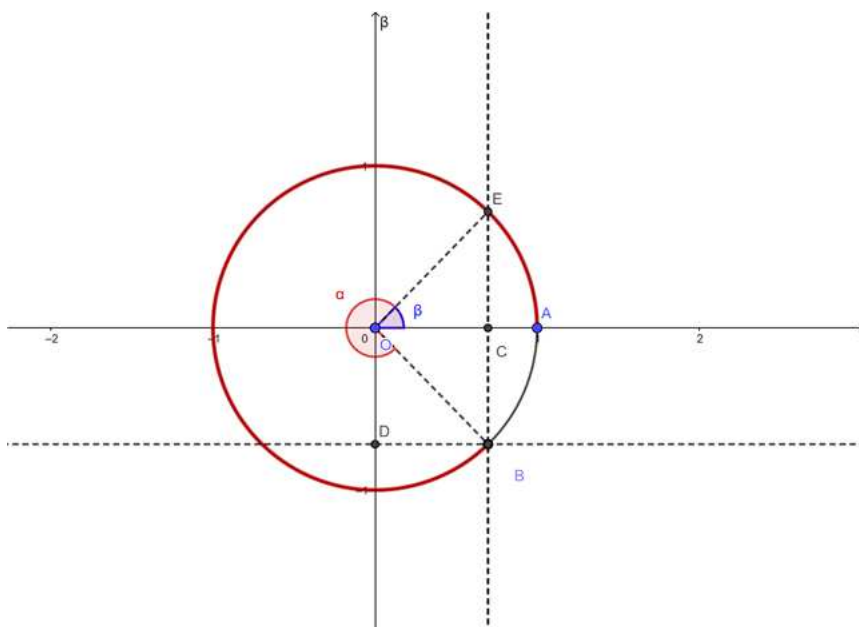
De outra forma, podemos escrever que se E está no 1º quadrante e B é simétrico a E em relação a $(0, 0)$, então, sendo α é a medida do arco $\widehat{AOB}$ e β é a medida do arco $\widehat{AOE}$:

$$\alpha - \beta = \pi \iff \alpha = \pi + \beta \text{ ou } \alpha - \beta = 180^\circ \iff \alpha = 180^\circ + \beta$$

Portanto, dado um arco qualquer de medida x com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos $\sin(x) = -\sin(\pi + x)$ e $\cos(x) = -\cos(\pi + x)$.

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 4º

No terceiro caso, consideremos B no quarto quadrante e a reta perpendicular ao eixo horizontal passando por B que determina E no 1º quadrante tal que β é a medida do arco $\widehat{AOE}$. As coordenadas de E e B são, respectivamente, $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $(\cos \beta, \sin \beta)$. Mas B é simétrico a E em relação ao eixo horizontal, então, $x_B = x_E$ ou seja, $\cos \beta = \cos \alpha$, e ainda $y_B = -y_E$, logo, $\sin \beta = -\sin \alpha$.



De outra forma, podemos escrever que se E está no 1º quadrante e B é simétrico a E em relação a eixo x , então, sendo α é a medida do arco $\widehat{AOB}$ e β é a medida do arco $\widehat{AOE}$:

$$\alpha + \beta = 2\pi \iff \alpha = 2\pi - \beta \text{ ou } \alpha + \beta = 360^\circ \iff \alpha = 360^\circ - \beta$$

Portanto, dado um arco qualquer de medida x com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, temos $\sin(x) = -\sin(2\pi - x)$ e $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$.

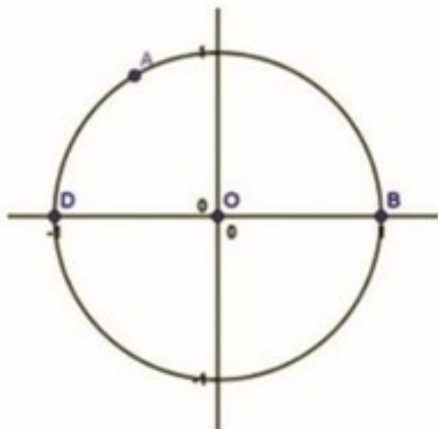
EXEMPLO 1 Síntese

Sintetizando o que vimos, podemos escrever a tabela abaixo:

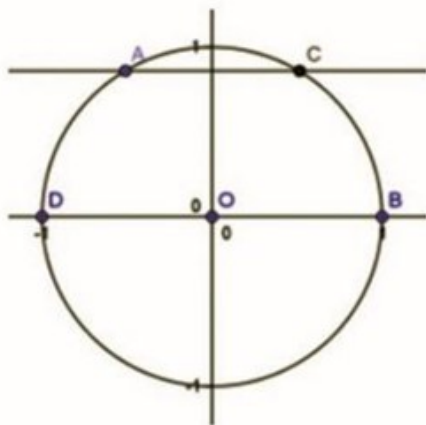
Redução do 2º para o 1º quadrantes $\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\cos x = \cos(\pi - x)$
Redução do 3º para o 1º quadrantes $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
Redução do 4º para o 1º quadrantes $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$\sin x = -\sin(2\pi - x)$	$\cos x = \cos(2\pi - x)$

Como exemplo, vamos determinar o valor do seno e do cosseno de um arco de $\frac{2\pi}{3}$ rad

Representando este arco no círculo trigonométrico, temos:



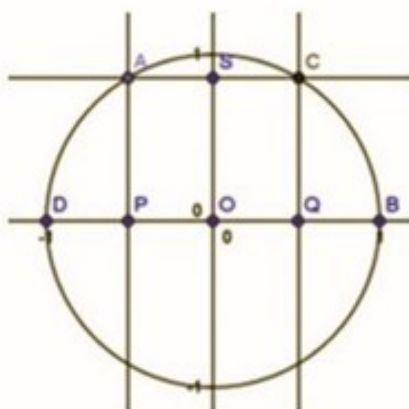
O ponto A é a extremidade do arco $\widehat{BOA}$ de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Traçando a reta a paralela ao eixo x , encontramos o ponto C na intersecção de a com o círculo trigonométrico.



Como o arco $\widehat{BOA}$ mede $\frac{2\pi}{3}$ rad e $\widehat{AOD}$ e $\widehat{BOC}$ são congruentes, então o arco $\widehat{BOC}$ mede $\frac{\pi}{3}$ rad. O ponto S é a intersecção da reta a com o eixo y e o comprimento do segmento $\overline{OS}$ é o seno dos arcos $\widehat{BOC}$ e $\widehat{BOA}$. Daí, temos

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Por outro lado, traçando B e D perpendiculares ao eixo x , encontramos os pontos P e Q , respectivamente, nas intersecções dessas retas com o eixo x .



Os comprimentos dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ representam, respectivamente, os cossenos dos arcos $\widehat{BOA}$ e $\widehat{BOC}$, que são simétricos. Podemos então escrever que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = \frac{-1}{2}$$

Você reparou que não fizemos uso algum de fórmula nesta resolução? Tente, como exercício, usar o mesmo método de análise no ciclo trigonométrico para determinar os senos e cossenos de arcos que estejam no 3º ou no 4º quadrante!

EXPLORANDO MODELANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS

Prevendo a altura da cadeira na Roda Gigante

Atividade 21

Na atividade *Retornando à Rio Star* foi pedido que você escrevesse a altura da cabine em função do tempo e você chegou na seguinte expressão:

$$h(t) = 45,5 - 42,5 \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{9}\right),$$

onde t representa o tempo, em minutos, após o início da observação, quando a cabine estava na posição mais baixa. Baseado nela, diga em qual altura a cabine estará nos seguintes instantes:

- a) 1 min e 30 seg após o início da observação;
- b) 2 min e 15 seg após o início da observação;
- c) 3 min após o início da observação;
- d) 7 min e 30 seg após o início da observação;
- e) 12 min após o início da observação;
- f) 15 min e 45 seg após o início da observação;
- g) 21 min após o início da observação;
- h) 7 min e 30 seg antes do início da observação;

Fases da Lua

Atividade 22

Plote no GeoGebra os pontos (t, y) , onde t é o dia e y é o percentual de visibilidade da lua no dia t . Faça isso para todos os dias de junho.

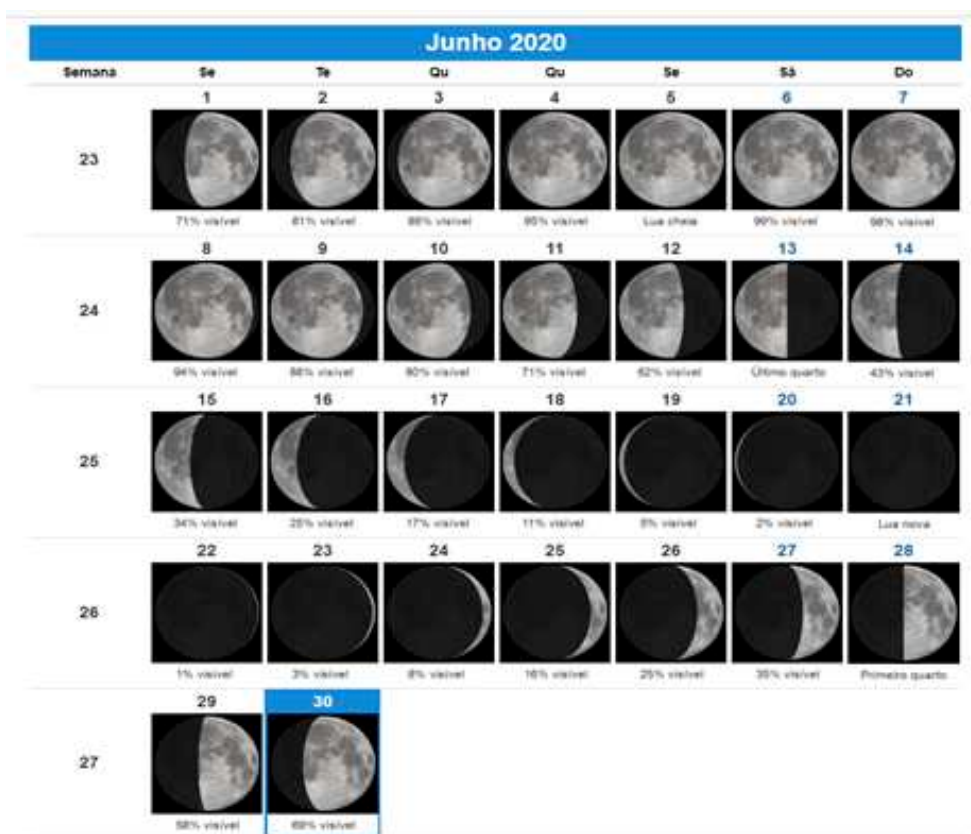
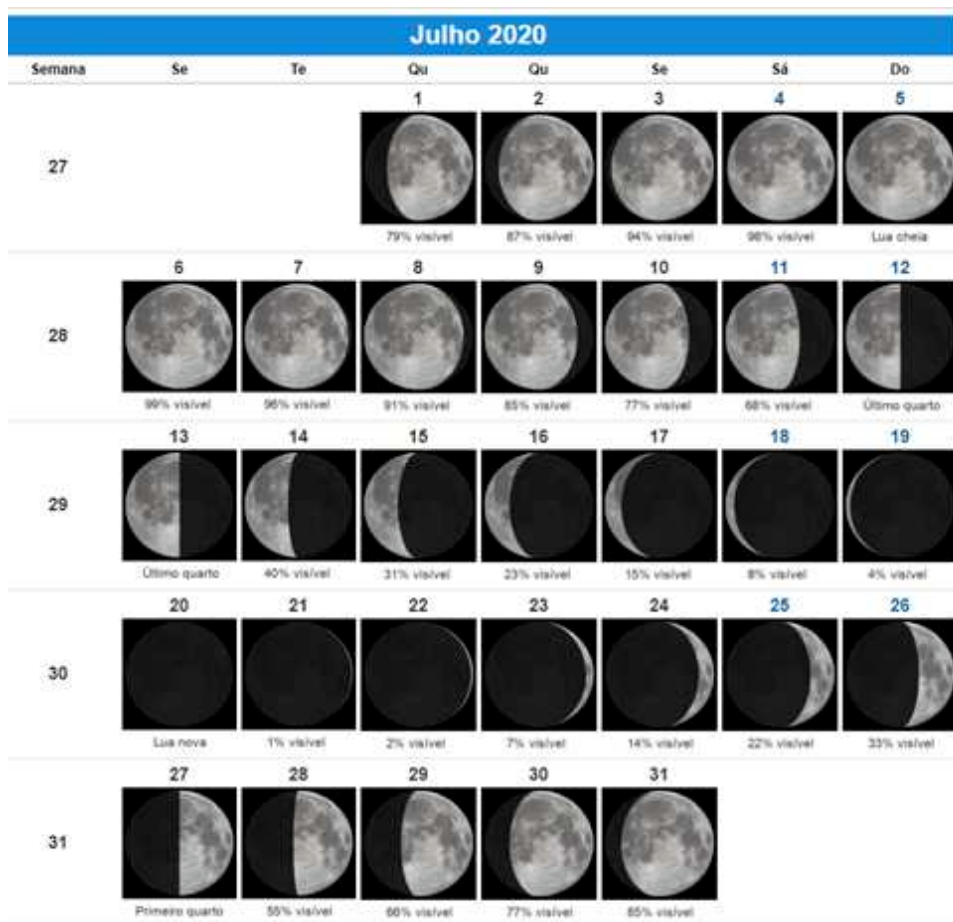


Figura 8.22: Fonte: [Calendário 365](https://www.calendario-365.com.br/calendario-lunar/2020/julho.html)

Encontre uma função trigonométrica da forma $y = a \cdot \sin(bt + c) + d$ que melhor se aproxima dos pontos traçados. Use-a para prever a fase da lua nos dias 01 a 14 de julho. Compare o resultado obtido por você com o que consta no site <https://www.calendario-365.com.br/calendario-lunar/2020/julho.html>



ORGANIZANDO MODELOS TRIGONOMÉTRICOS

Modelos Trigonométricos são os mais simples para se tentar compreender a natureza de um fenômeno periódico. Esses modelos são dados por senóides da forma:

$$f(x) = a \sin(bx + c) + d.$$

Conforme vimos na última seção, o módulo do parâmetro a é exatamente a medida da amplitude do gráfico da função f , b está associado ao período da função, calculado através da expressão $\frac{2\pi}{|b|}$, enquanto c e d correspondem às translações horizontais e verticais do gráfico. Note que o conjunto imagem de f será o intervalo $[d - |a|, d + |a|]$.

Vamos considerar que haja um fenômeno periódico para o qual saibamos o seu período de repetição, dado por um número real $T > 0$. Dada uma coleção de pontos no plano cartesiano que representam valores que relacionam duas grandezas x e y , onde x é o tempo e y está associada a este fenômeno periódico, podemos tentar ajustar esses pontos por um modelo trigonométrico. Observando nas ordenadas dessa coleção de pontos o maior $y_{\max}$ e o menor valor $y_{\min}$ que aparece, podemos estimar o módulo da amplitude pondo $|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$. Estimando também que $y_{\max}$ seja o maior valor assumido pela grandeza y , o maior valor assumido pela imagem de f é $|a| + d$, logo $|a| + d = y_{\max}$, portanto, $d = y_{\max} - |a|$. Conhecendo-se o valor y_0 associado ao instante inicial, estimamos que $(0, y_0)$ pertença ao gráfico de f . Fazendo $x = 0$, e

supondo que $a > 0$, obtemos que $y_0 = a \cdot \text{sen}(c) + d$, onde $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$. Um valor aproximado para c pode ser obtido através de uma calculadora científica ou gráfica (como o GeoGebra), ou até mesmo, de forma mais grosseira, utilizando papel, regra, lápis e transferidor. Por fim, como estamos admitindo que o período de repetição do fenômeno periódico é conhecido e igual a um número real $T > 0$, para calcular b , basta resolver a equação:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

o que nos dá $b = \pm \frac{2\pi}{T}$. Portanto, encontramos duas funções trigonométricas que são "boas candidatas" para modelar o fenômeno periódico dado (uma com $b > 0$ e outra com $b < 0$). O uso de uma calculadora gráfica a partir daqui é fundamental na validação do modelo trigonométrico, ou seja, na verificação se de fato a função f representa bem a variação da grandeza y . Todo o raciocínio acima foi descrito considerando $f(x) = a \text{sen}(bx + c) + d$, isto é, utilizando como base a função seno, porém poderia ter sido realizado também com a função cosseno.

PRATICANDO MODELOS TRIGONOMÉTRICOS

Pressão Arterial (ENEM 2017)

Atividade 23

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cos(Kt)$ em que A , B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundos. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

- a) $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$
- b) $P(t) = 78 + 42 \cos(3\pi t)$
- c) $P(t) = 99 + 21 \cos(2\pi t)$
- d) $P(t) = 99 + 21 \cos(t)$
- e) $P(t) = 78 + 42 \cos(t)$

Maré baixa para realizar Snorkel

Atividade 24

Taipu de Fora é um distrito da cidade de Camamu, localizada no Sul da Bahia, onde se pode visualizar belezas paradisíacas em suas praias, com mergulho de snorkel.



Figura 8.23: Fonte: [Guia Viagens Brasil.com](http://GuiaViagensBrasil.com)

É necessário pegar a maré com o nível mais baixo para curtir o mergulho com as maravilhas do mar. (<https://www.viajenaviagem.com/2013/04/como-usar-tabua-mares/>)

Quinta - 01/10		Sexta - 02/10		Sabado - 03/10	
Hora	Altura	Hora	Altura	Hora	Altura
03:14	↑ 2.09m	03:45	↑ 2.11m	04:16	↑ 2.10m
09:27	↓ 0.18m	09:58	↓ 0.19m	10:28	↓ 0.22m
15:29	↑ 2.04m	15:58	↑ 2.04m	16:28	↑ 2.01m
21:39	↓ 0.17m	22:09	↓ 0.16m	22:40	↓ 0.18m

Figura 8.24: Fonte: [Climatempo](#)

Assumindo que o comportamento periódico das marés seja definido por uma senóide da forma $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, encontre um modelo apenas usando os dados acima. Assuma também que o ponto mais alto assumido pela maré na semana das medições foi 2,11 m e o mais baixo, 0,16 m. Utilize o modelo para realizar uma previsão sobre os horários do dia de domingo, 04/10 onde a maré atingirá o ponto mais baixo e o mais alto. Quais os melhores horários para praticar snorkel naquele dia?

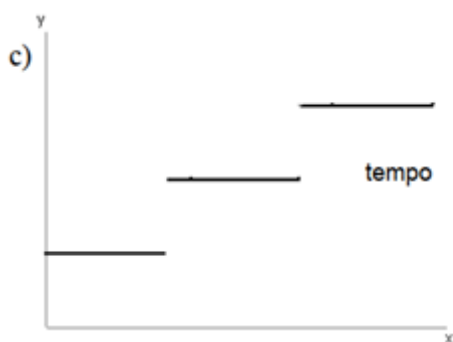
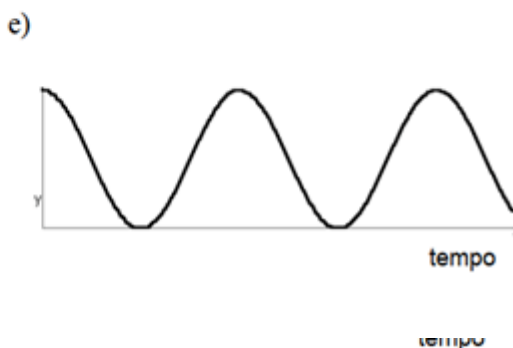
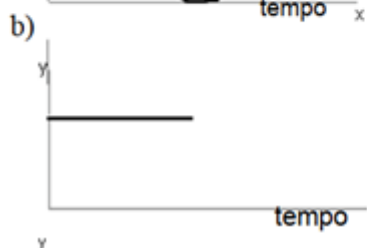
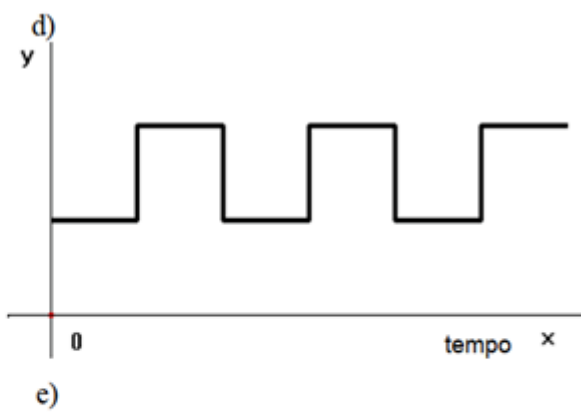
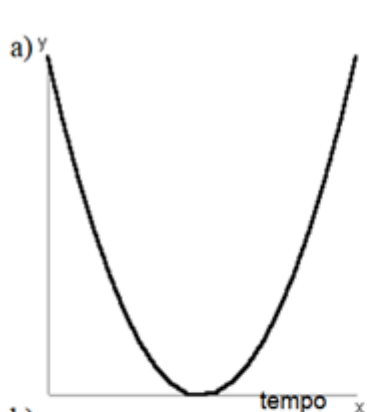
EXERCÍCIOS

Os exercícios desta seção são baseados em *da Silva Ignácio (2002)*

- 1 Um bloco está preso à extremidade de uma mola tensionada, conforme mostra a figura a seguir. Ao destravar a mola, o bloco passa a se movimentar em vaivém, levando sempre o mesmo tempo para retornar à posição original (desprezamos atritos e resistências).

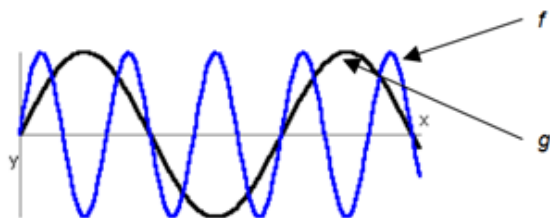


Nesse sentido, qual o gráfico que melhor representa a posição horizontal y do bloco em função do tempo? Justifique sua resposta.



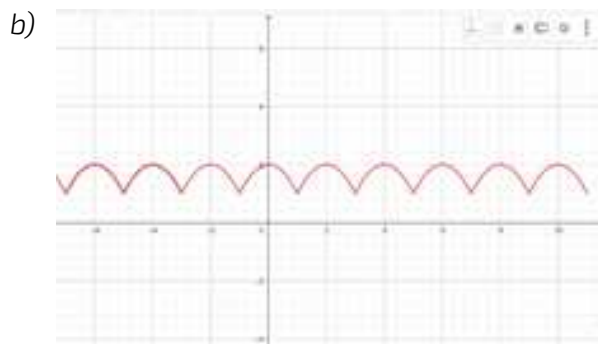
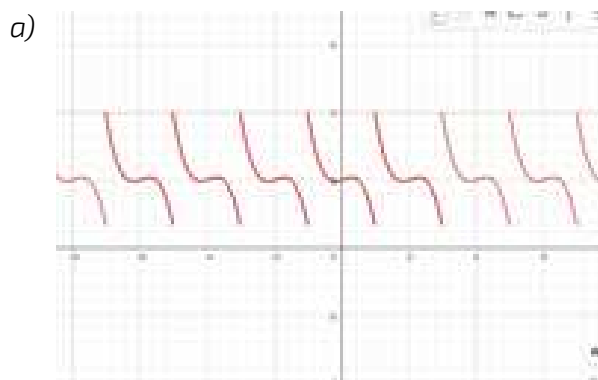
f) Nenhum destes. Desenhe.

- 2 Temos duas funções representadas no mesmo sistema de eixos cartesianos, conforme podemos ver a seguir:



- a) Compare os períodos de f e g .
b) Compare as amplitudes de f e g

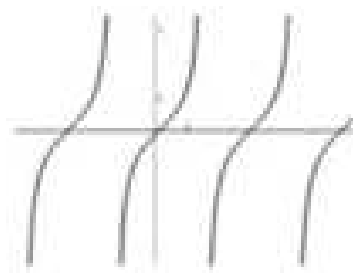
- 3 Nas imagens a seguir, temos funções periódicas representadas graficamente. Pinte um intervalo em O_x que corresponda ao período dessa função



- 4 Quais das imagens a seguir podem representar funções periódicas? Justifique suas escolhas!



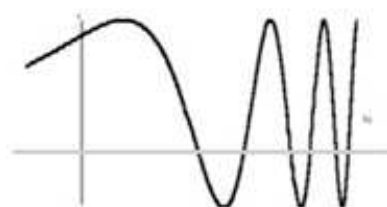
c)



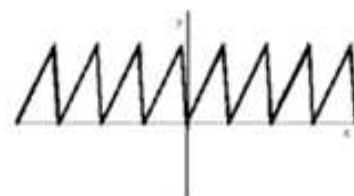
d)



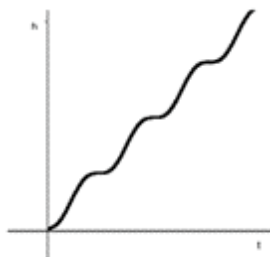
e)



f)



- 5 A ilustração a seguir mostra o gráfico da altura de uma bandeira em seu mastro em vários momentos.



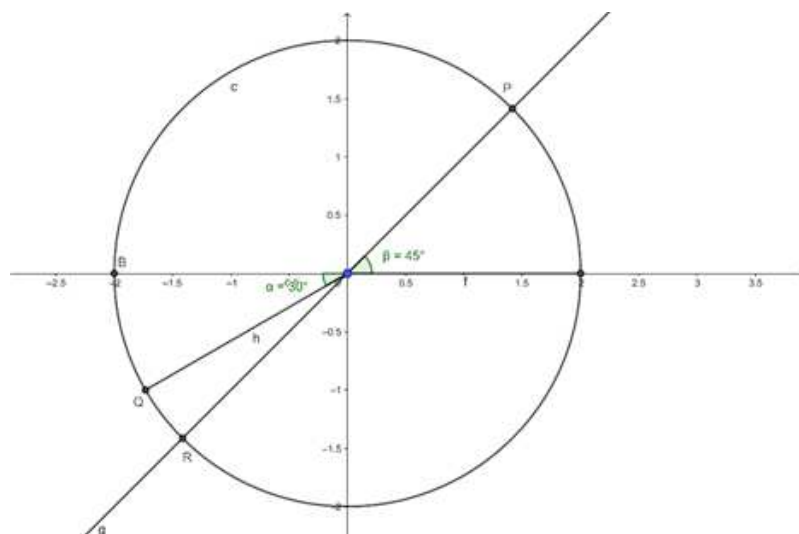
- a) Descreva o movimento da bandeira levando em conta sua altura em relação ao tempo.
b) Este gráfico pode descrever uma função periódica? Justifique.

- 6 Uma torneira danificada começa a gotejar em um balde com água. Uma pessoa, observando, notou que do primeiro para o segundo pingo decorreram 40 segundos; do segundo para o terceiro, 20 segundos; 10 segundos do terceiro para o quarto e assim por diante. Esse seria um fenômeno periódico? Justifique.

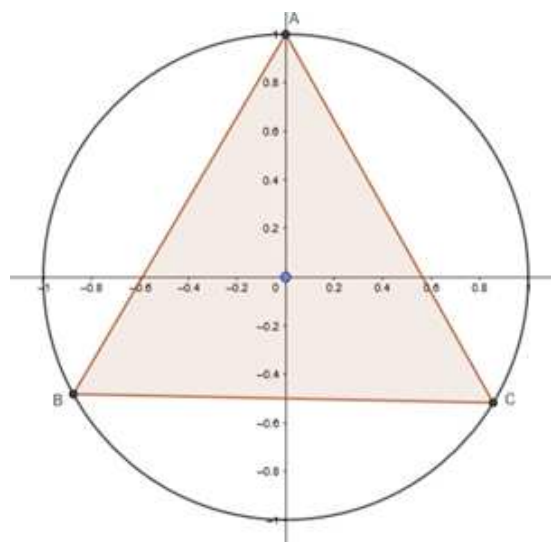
- 7 Retorne ao [Para Refletir: Roda Gigante Virtual](#) e ao seu gráfico vistos no link do GeoGebra. Imagine que essa mesma roda-gigante agora roda mais rápido, levando duas vezes menos tempo para dar uma volta completa. Esboce o gráfico das duas situações: a inicial, em que a roda gigante leva um tempo t para dar uma volta completa, e a nova, em que a roda gigante leva a metade desse tempo para dar uma volta completa. Justifique sua resposta.



- 8 Sejam os pontos P , Q e R no círculo trigonométrico a seguir. Qual o número real x , com $0 \leq x < 2\pi$, associado a P , Q e R ?



- 9 O triângulo equilátero ABC está desenhado no círculo trigonométrico de modo que A , B e C são pontos do círculo trigonométrico.

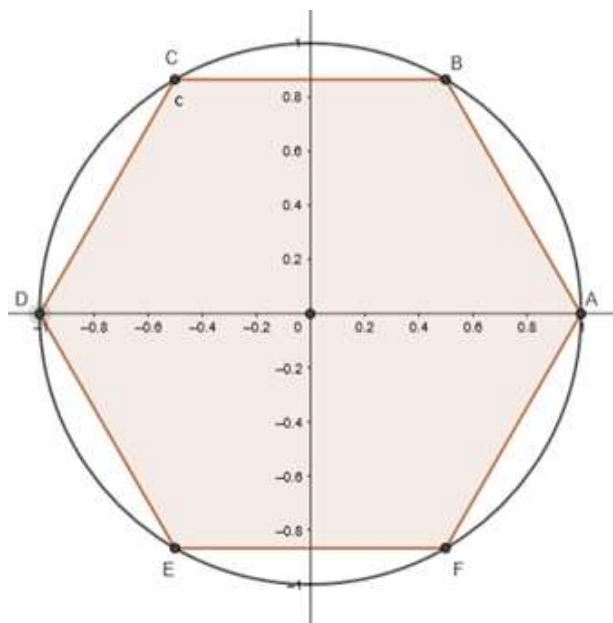


- a) Quais são os números reais $0 < x < 2\pi$ que têm imagens nos vértices desses triângulos?

b) Que número real é simétrico, em relação ao eixo vertical, ao real 2 no círculo trigonométrico? E em relação ao eixo horizontal? E em relação à origem $(0, 0)$?

10

Na figura, tem-se um hexágono regular $ABCDEF$ com pontos sobre o círculo trigonométrico. O vértice A é a imagem do número real zero. Obtenha os números reais entre 0 e 2π associados aos outros vértices desse hexágono.



Glossário do Capítulo

Amplitude – Parâmetro associado a uma função periódica, mede a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo obtido por uma tal função (quando estes existem). Geometricamente, representa a metade da largura da menor faixa horizontal que contém o gráfico da função periódica.

Círculo Trigonométrico – círculo unitário com centro na origem do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, utilizado como referência para cálculo de senos e cossenos de números reais.

Frequência – Parâmetro associado a uma função periódica, definido como sendo o inverso multiplicativo de seu período. É um parâmetro importante no contexto das ondas sonoras para diferenciar um som mais agudo e um som mais grave.

Função de Euler – Função sobrejetiva que transforma a reta real no círculo de centro na origem e raio 1 (círculo trigonométrico). Denotando esta função por " E ", cada número real t determina um arco no círculo trigonométrico com comprimento $|t|$ e extremidades dadas pelos pontos $(1, 0)$ e $E(t)$. O arco é construindo seguindo o sentido anti-horário a partir de $(1, 0)$ se $t > 0$ e no sentido horário se $t < 0$.

Função Cosseno – Função periódica que associa cada número real t à abscissa do ponto $E(t)$, onde E é a Função de Euler.

Função Periódica – Função real " f " para a qual existe um número real positivo p tal que, para todo número real x em seu domínio, com $x+p$ também pertencendo ao domínio, apresenta mesma imagem nos pontos x e $x+p$. São utilizadas para descrever matematicamente fenômenos periódicos

Função Seno – Função periódica que associa cada número real t à ordenada do ponto $E(t)$, onde E é a Função de Euler.

Fenômeno Periódico – Fenômenos que se repetem exatamente da mesma maneira com o passar do tempo.

Período – Comprimento de um intervalo do domínio de uma função periódica no qual os valores das imagens e o comportamento do seu gráfico se repetem.

Radiano – Unidade de medida utilizada para mensurar o tamanho de um arco de uma circunferência. Um arco de uma circunferência que mede 1 radiano tem o comprimento exatamente igual ao seu raio.

Senóide – Gráfico de uma função envolvendo a função seno, cujas imagens são calculadas por uma expressão da forma $y = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$, onde a, b, c e d são constantes reais e a e b são não nulos

Referências Bibliográficas

- Bassanezi, R. C. (1999). Modelagem matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. Relatório técnico, UNICAMP - IMECC, Departamento de Matemática, São Paulo, Brasil. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf.
- Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil.
- Costa, F. d. A. (2017). O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo, Brasil.
- da Silva Ignácio, R. (2002). Concepções sobre periodicidade em atividades de modelagem. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil.
- Ekici, C. (2010). *Treatments of Trigonometric Functions During Reforms in the United States*. Tese de doutorado, The school of the thesis, Georgia, Estados Unidos.
- Feijó, R. S. A. A. (2017). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: Um estudo com alunos do ensino médio do distrito federal. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.
- Ferreira, D. H. L., Jacobini, O. R., Campos, C. R. e Wodewotzki, M. L. L. (2013). Recursos tecnológicos e modelagem matemática: três experiências na sala de aula. *REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 8(14):160–184.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 de *Coleção do Professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 9ª edição.
- Marvila, M. G. (2017). Música e funções trigonométricas: uma abordagem interdisciplinar. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil.
- Orhun, N. (2010). The gap between real numbers and trigonometric relations. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 20:175–184.
- Siyepu, S. W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education*, 2(1).
- Soares, M. Z. M. C., editor (2010). *A Roda Gigante*, São Paulo, Brasil. Projeto Matemática Multimídia, Universidade de Campinas.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17:91–112.